

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DYNAMIKI GRUBOŚCIENNEJ KULISTEJ OSŁONY BALISTYCZNEJ OBCIĄŻONEJ UDAROWO CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM Z UWZGLĘDNIENIEM PRZEMIESZCZENIA POWIERZCHNI PRZYŁOŻENIA WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Streszczenie: Zbadano dynamiczne pola: przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w kulistej grubościennej osłonie balistycznej, obciążonej wewnątrz ciśnieniem produktów detonacji materiału wybuchowego. Założono, że materiał osłony jest jednorodny izotropowy i sprężyste nieściśliwy. Okazuje się, że taka osłona pod wymienionym obciążeniem drga radialnie z określoną częstością kołową, podobnie jak układ mechaniczny o jednym stopniu swobody. Rozpatrzono dwa modele matematyczne badanego zagadnienia: liniowy, w którym warunki brzegowe lokalizowano na początkowym położeniu powierzchni granicznych osłony (współrzędne Lagrange'a) i nieliniowy, uwzględniający ruch granicznych powierzchni osłony w warunkach brzegowych (współrzędne Eulera). Dla modelu liniowego uzyskano analityczne zamknięte rozwiązanie problemu. W przypadku bardzo małych odkształceń sprężystych, mniejszych od 1% otrzymuje się z niego wyniki zbieżne z rozwiązaniem nieliniowym. Tylko w tym przedziale odkształceń ($\varepsilon_\varphi < 0,01$) można go stosować w inżynierskich obliczeniach. Dla większych odkształceń błędy wynikające z linearyzacji problemu są rzędu kilkunastu i więcej procent. Linearyzacja zagadnienia zniekształca ilościowy i jakościowy obraz dynamicznych parametrów osłony.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF A SPHERICAL THICK- WALLED BALLISTIC CASING DYNAMICS SURGE-LOADED BY THE INTERNAL PRESSURE WITH RESPECT TO MOVEMENT OF BOUNDARY CONDITIONS APPLICATION SURFACES

Abstract: Dynamic fields of: displacements, strains and stresses in a spherical thick-walled ballistic casing loaded internally by the pressure of high explosive detonation products were studied. The casing material is assumed to be homogenous, isotropic and elastically incompressible. It turns out that this kind of casing loaded as mentioned above oscillates radially with determinate angular frequency, likewise the mechanical system of one degree of freedom. Two mathematical models of studied problem were considered: the linear model, in which boundary conditions were applied to the initial position of limiting surfaces of casing (Lagrangian coordinates), and the nonlinear model, taking into account the movement of casing limiting surfaces in boundary conditions (Eulerian coordinates). For the linear model the analytic closed solution to the problem were obtained. In case of very small elastic strains, less than 1%, the results obtained for this model are convergent to the nonlinear solution. Only in this range of strains ($\varepsilon_\varphi < 0,01$) it can be used in engineering calculations. For larger strains the errors resulting from the linearization of the problem are of the order of dozen and more per cent. The linearization of the problem distorts quantitative and qualitative view of casing dynamic parameters.

1. Wprowadzenie

Jednowymiarowe zagadnienia początkowo-brzegowe, związane z wybuchowym obciążaniem różnych ośrodków i konstrukcji o symetriach cylindrycznej i kulistej były i są analizowane przez wielu badaczy [1-11]. Do tej grupy zagadnień należą, między innymi, dynamiczne obciążanie wewnętrznym ciśnieniem grubościennych cylindrycznych i kulistych zbiorników (osłon balistycznych). W produkcji luf armatnich i wysokociśnieniowych zbiorników stosuje się autofrettage. Jest to samowzmocnienie wymienionych obiektów za pomocą wysokiego ciśnienia (wybuchu mieszaniny gazowej) powodującego plastyczne odkształcenie ich wewnętrznych warstw. Po takim przepięciu obiektów robocze obciążenie powoduje w nich tylko odkształcenia sprężyste.

Z przytoczonych, wybranych zagadnień technicznych wynika wniosek, że dynamika balistycznych osłon obciążonych wybuchowo jest ważnym problemem zasługującym na szczegółowe teoretyczne badania z różnych punktów widzenia. W ujęciu ogólnym są to skomplikowane pod względem matematycznym problemy początkowo-brzegowe. Dla pokonania matematycznych trudności stosuje się rozsądny kompromis z fizyką zjawiska. Z tego powodu teoretyczne prognozy należy traktować w sposób umiarkowany i weryfikować eksperymentalnie.

W celu uzyskania analitycznych rozwiązań konkretnych zagadnień granicznych przyjmuje się modelowe uproszczenia oparte na fizycznych przesłankach konkretnego problemu. Na przykład, bazując na liniowej teorii sprężystości małych przemieszczeń i odkształceń, zaniedbuje się w warunkach brzegowych ruch powierzchni granicznych podczas procesu odkształcania danego układu [1, 10, 11]. Warunki brzegowe formułowane są dla początkowego położenia granicznych powierzchni (brzegów) danego układu. Takie założenia przyjmuje się arbitralnie bez ograniczenia jego stosowania. W dostępnej literaturze brak jest ilościowych oszacowań wpływu tego uproszczenia na dynamiczne charakterystyki badanych obiektów.

W niniejszej pracy podjęto próbę ilościowego określenia błędu, jaki wynika z takiego uproszczenia. Problem rozpatrzono na przykładzie dynamiki kulistej grubościennej osłony balistycznej obciążonej wewnętrznym ciśnieniem produktów detonacji materiału wybuchowego.

2. Sformułowanie problemu

Określimy dynamiczne stany mechanicznych charakterystyk w grubościennej metalowej osłonie kulistej, obciążonej wewnątrz ciśnieniem produktów detonacji gazowej mieszaniny wybuchowej.

Materiał osłony jest jednorodny, izotropowy i sprężyste nieściśliwy. Ruch osłony charakteryzuje się kulistą symetrią i podlega prawu Hooke'a. Oznaczmy przez a i b początkowe promienie osłony, odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny. Stosujemy sferyczny układ współrzędnych r, φ, θ . W związku z tym stany naprężeń i odkształceń w materiale osłony reprezentowane są przez następujące składowe główne tensorów naprężenia i odkształcenia:

σ_r – naprężenie promieniowe (radialne),

$\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ – naprężenia obwodowe,

ε_r – odkształcenie promieniowe,

$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ – odkształcenia obwodowe.

Z kulistej symetrii problemu wynika, że zagadnienie jest przestrzennie jednowymiarowe. Zatem parametry charakteryzujące dynamiczny stan osłony zależą od jednej współrzędnej przestrzennej r i czasu t . Stosujemy teorię małych przemieszczeń i odkształceń. Z tego

powodu zmienne r, t można traktować jako współrzędne Lagrange'a lub Eulera. W dalszym ciągu rozważań w opisie Eulera, dla odróżnienia, współrzędną przestrzenną oznaczono literą R .

Zagadnienie jest rozwiązywane w ramach liniowej teorii sprężystości, zgodnie z którą mamy następujące relacje [3, 9]:

$$\varepsilon_r(r,t) = \frac{\partial u(r,t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi(r,t) = \varepsilon_\theta(r,t) = \frac{u(r,t)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_\varphi(r,t) - \sigma_r(r,t) = 2\mu[\varepsilon_\varphi(r,t) - \varepsilon_r(r,t)], \quad (2.2)$$

gdzie u jest przemieszczeniem radialnym elementu osłony, a μ oznacza moduł Kirchhoffa:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.3)$$

Z kolei symbolami E i ν oznaczono odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Z prawa zachowania masy, zapisanego dla elementu osłony we współrzędnych Lagrange'a r, t w symetrii kulistej, otrzymuje się:

$$(r+u)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad (2.4)$$

gdzie symbole ρ_0 i ρ oznaczają gęstości materiału osłony: początkową i bieżącą.

Dla umiarkowanych ciśnień nie przekraczających kilku tysięcy MPa, w przypadku metali można przyjąć, że $\rho \approx \rho_0 = \text{const}$. Popelniony przy tym błąd jest rzędu ułamka procenta [10]. Po uwzględnieniu tego założenia, dla małych odkształceń, ($\varepsilon_\varphi \varepsilon_r = \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \approx 0$, $\varepsilon_\varphi^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \approx 0$ i

$\varepsilon_\varphi^2 \varepsilon_r = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial r} \approx 0$) równanie (2.4) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 0. \quad (2.5)$$

Z dynamicznej równowagi elementu osłony, zapisanej we współrzędnych Lagrange'a r, t , po przekształceniach otrzymuje się ogólne równanie ruchu tego elementu w następującym kształcie:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}. \quad (2.6)$$

Dla małych przemieszczeń i odkształceń, określonych wzorami (2.1), po uwzględnieniu faktu, że $\varepsilon_\varphi = (u/r) \ll 1$ i $\varepsilon_r = (\partial u / \partial r) \ll 1$, równanie (2.6) można uprościć do postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Identyczną postać równania w przypadku małych przemieszczeń i odkształceń uzyskuje się we współrzędnych Eulera, tj.:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial R} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{R} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Przejdziemy obecnie do modelowania ruchu gazowych produktów detonacji mieszaniny wybuchowej zawartej w osłonie.

Zakładamy, że inicjacja detonacji mieszaniny wybuchowej nastąpiła w centrum osłony. Po zakończeniu procesu detonacji produkty wybuchu nie dyfundują do metalu i, podobnie jak w wybuchach podwodnych [2], tworzą pęcherz gazowy o początkowym promieniu $R_a(0) = a$. Fala detonacyjna po uderzeniu w wewnętrzną powierzchnię osłony $r = a$ ulega refrakcji i powstają dwie rozbieżne fale uderzeniowe. Jedna z nich przemieszcza się w ścianie osłony na zewnątrz układu, a druga propaguje się koncentrycznie w produktach detonacji do środka pęcherza gazowego. W dalszym ciągu tego procesu następują kolejne odbicia fal uderzeniowych od centrum pęcherza i powierzchni osłony. Ze względu na duże prędkości fal uderzeniowych (rzędu kilku tysięcy m/s) i skończone wymiary osłony, niestacjonarny proces refrakcji fal uderzeniowych jest krótkotrwały. W tym czasie następuje intensywny nieodwracalny transport znacznej ilości energii z pęcherza do osłony. Na przykład w wybuchach podwodnych około 2/3 energii produktów detonacji przekazywana jest bezpowrotnie do otoczenia [1, 2]. Energia ta zostaje przekształcona w ciepło i pracę mechaniczną. Wskutek tego ciśnienie w pęcherzu intensywnie maleje, szybko wyrównuje się i produkty detonacji w całości rozszerzają się w przybliżeniu adiabatycznie. Krótkotrwały (rzędu kilka mikrosekund) niestacjonarny proces refrakcji fal uderzeniowych w pęcherzu i osłonie pomija się. W procesie tym następuje wzmocnienie materiału osłony (autofrettage).

Po wyrównaniu się ciśnienia w pęcherzu termodynamiczne charakterystyki produktów detonacji można aproksymować modelem gazu politropowego [1, 8]. Przy takich uproszczeniach z zasady zachowania masy gazu w pęcherzu i adiabaty Poissona wynika, że na wewnętrzną powierzchnię osłony, po zakończeniu detonacji mieszaniny wybuchowej, działa ciśnienie określone następującym wzorem [6, 8]:

$$p[R_a(t)] = p_0 \left[\frac{a}{R_a(t)} \right]^{3k}, \quad p_0 = np_j, \quad n < 1, \quad (2.9)$$

gdzie $R_a(t)$ oznacza wewnętrzny bieżący promień osłony (współrzędna Eulera), tj. :

$$R_a(t) = a + u(a, t), \quad (2.10)$$

a współczynnik n charakteryzuje ilość energii wewnętrznej odprowadzonej z pęcherza do osłony podczas refrakcji fal uderzeniowych. Symbole k i p_j odpowiednio oznaczają wykładnik politropy Poissona i ciśnienie w punkcie Chapmana-Jougeta produktów detonacji.

Dla domknięcia układu równań problemu należy określić jeszcze warunki brzegowe i początkowe rozpatrywanego układu.

Zlinearyzowany układ równań (2.5) i (2.8) rozwiązano dla następujących warunków brzegowych:

$$\sigma_r[R_a(t), t] = -p_0 \left[\frac{a}{R_a(t)} \right]^{3k} \quad \text{dla} \quad R = R_a(t), \quad (2.11)$$

$$\sigma_r[R_b(t), t] \equiv 0 \quad \text{dla} \quad R = R_b(t), \quad (2.12)$$

i jednorodnych warunków początkowych:

$$u(r, 0) \equiv 0, \quad v(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \equiv 0, \quad (2.13)$$

gdzie

$$R_b(t) = b + u(b, t). \quad (2.14)$$

Rozwiązanie tak sformułowanego problemu prezentujemy w następnym paragrafie.

3. Rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego

Całka ogólna równania (2.5) ma postać:

$$u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie $C(t)$ jest dowolną ciągłą, dwa razy różniczkowalną funkcją czasu t .

Przemieszczenia granicznych powierzchni osłony można wyrazić za pomocą współrzędnych Eulera tych powierzchni $R_a(t)$ i $R_b(t)$, a mianowicie:

$$u(a, t) = R_a(t) - a, \quad (3.2)$$

$$u(b, t) = R_b(t) - b.$$

Następnie z wyrażeń (3.1) i (3.2) wynika, że funkcja $C(t)$ jest również jednoznacznie określona przez współrzędną $R_a(t)$, tj. :

$$C(t) = a^2[R_a(t) - a]. \quad (3.3)$$

Z wyrażeń tych otrzymuje się:

$$R_b(t) = b + \frac{a^2[R_a(t) - a]}{b^2}. \quad (3.4)$$

Ostatecznie z zależności (3.1) i (3.2) mamy:

$$u(r, t) = \frac{a^2[R_a(t) - a]}{r^2} \approx \frac{a^2[R_a(t) - a]}{R^2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \ddot{R}_a(t) \approx \frac{a^2}{R^2} \ddot{R}_a(t); \quad \ddot{R}_a(t) = \frac{d^2 R_a(t)}{dt^2} \quad (3.6)$$

Wyrażenia (2.1) i (2.2), po wykorzystaniu zależności (3.5) można zapisać w następującej postaci:

$$\varepsilon_r(r,t) = -2 \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{r^3}, \quad \varepsilon_\varphi(r,t) = \varepsilon_\theta(r,t) = \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{r^3} = -\frac{1}{2} \varepsilon_r(r,t), \quad (3.7)$$

$$\sigma_\varphi(r,t) - \sigma_r(r,t) = 6\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{r^3} \approx 6\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R^3} \approx 6\mu \varepsilon_\varphi(r,t). \quad (3.8)$$

Po podstawieniu zależności (3.6) i (3.8) do równania (2.8) mamy:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial R} = 12\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R^4} + \rho_0 \frac{a^2}{R^2} \ddot{R}_a(t),$$

a po scałkowaniu względem R otrzymuje się:

$$\sigma_r(R,t) = -4\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R^3} - \rho_0 \frac{a^2}{R} \ddot{R}_a(t) + A(t), \quad (3.9)$$

gdzie $A(t)$ jest dowolną funkcją czasu.

Z warunku brzegowego (2.12) i wyrażenia (3.9) wynika, że

$$A(t) = 4\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R_b^3(t)} + \rho_0 \frac{a^2}{R_b(t)} \ddot{R}_a(t),$$

a po uwzględnieniu relacji (3.4) mamy:

$$A(t) = 4\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{\left\{ b + \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{b^2} \right\}^3} + \frac{\rho_0 a^2}{b + \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{b^2}} \ddot{R}_a(t). \quad (3.10)$$

Z zależności (3.9) i (3.10) wynika, że napężenie $\sigma_r(R,t)$ można określić następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \sigma_r(R,t) = & -\frac{\rho_0 a^2}{R} \frac{b^3 + a^2 [R_a(t) - a] - b^2 R}{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]} \ddot{R}_a(t) + \\ & - 4\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R^3} \frac{\{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]\}^3 - b^6 R^3}{\{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]\}^3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Z kolei, po podstawieniu wyrażenia (3.11) do warunku brzegowego (2.11) i przekształceniach otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu, które powinna spełniać funkcja $R_a(t)$, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_a(t) = & \frac{R_a(t)}{\rho_0 a^2} \frac{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]}{b^3 + a^2 [R_a(t) - a] - b^2 R_a(t)} \left\{ p_0 \left[\frac{a}{R_a(t)} \right]^{3k} + \right. \\ & \left. - 4\mu \frac{a^2 [R_a(t) - a]}{R_a^3(t)} \frac{\{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]\}^3 - b^6 R_a^3(t)}{\{b^3 + a^2 [R_a(t) - a]\}^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Okazuje się jednak, że równanie to w zakresie małych przemieszczeń i odkształceń elementów osłony można zlinearyzować. Rzeczywiście, jeśli uwzględnić fakt, że $(1+u/a) \approx 1$, bo $(u/a) \ll 1$, to po takim uproszczeniu z (3.12) otrzymuje się:

$$\ddot{R}_a(t) + 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} R_a(t) - 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{ab^2} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{b}{a(b-a)} \approx 0. \quad (3.13)$$

Funkcja $R_a(t)$ charakteryzująca drgania wewnętrznej powierzchni osłony, zgodnie z (2.14) powinna spełniać następujące warunki początkowe:

$$R_a(0) = a, \quad \dot{R}_a(0) = 0. \quad (3.14)$$

Dla ułatwienia dalszej analizy zagadnienia wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, & \eta &= \frac{t}{T_0}, & \xi_a &= \frac{R_a}{a}, & \beta &= \frac{b}{a}, & U &= \frac{u}{a}, \\ \xi_R &= \frac{R}{a} = \frac{r}{a} + \frac{u}{a} = \xi + U, & \bar{\omega}_0 &= \frac{\omega_0}{(c/a)} = \frac{2\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta}, \\ S_r &= \frac{\sigma_r}{p_0}, & S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p_0}, & S_z &= S_\varphi - S_r, & P &= \frac{p_0}{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

oraz dodatkowe parametry:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, & \omega_0^2 &= 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} = 4 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta^2}, \\ \omega_0 &= \frac{2\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta} \frac{c}{a} = \frac{2\pi}{T_0}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie symbole c , ω_0 i T_0 odpowiednio oznaczają: prędkość propagacji fali poprzecznej w materiale osłony, kołową częstość i okres drgań własnych osłony.

Równania (3.12) i (3.13) oraz warunki początkowe (3.14) zapisane odpowiednio w wielkościach bezwymiarowych (3.15), po wykorzystaniu (3.16) mają postać:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_a(\eta) &= \pi^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 + \beta + 1} \frac{\xi_a(\beta^3 - 1 + \xi_a)}{\beta^3 - 1 - (\beta^2 - 1)\xi_a} \left\{ P \xi_a^{-3k} + \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\xi_a - 1}{\xi_a^3} \frac{\{\beta^3 - 1 + \xi_a\}^3 - \beta^6 \xi_a^3}{\{\beta^3 - 1 + \xi_a\}^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\ddot{\xi}_a(\eta) = (2\pi)^2 \left(-\xi_a + \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P + 1 \right) = f(\xi_a), \quad (3.18)$$

$$\xi_a(0) = 1, \quad \dot{\xi}_a(0) = 0. \quad (3.19)$$

Z analizy wyprowadzonych dotychczas zależności wynika wniosek, że wszystkie mechaniczne charakterystyki osłony po wybuchowym obciążeniu są określone analitycznymi wzorami (3.5), (3.7), (3.8), (3.11) i (3.12), w których występuje jako niewiadoma współrzędna Eulera wewnętrznej powierzchni osłony $R_a(t)$. Określamy ją jednoznacznie z równania (3.12), a w postaci zlinearyzowanej z zależności (3.13) i warunków początkowych (3.14). Równanie (3.12) jest nieliniowe i w ogólnym przypadku całkujemy je numerycznie, np. za pomocą metody Runge'go-Kutty. Natomiast równanie (3.13) rozwiązano analitycznie w zamkniętej postaci w następnym paragrafie.

4. Analityczne rozwiązanie zagadnienia dla przypadku zlinearyzowanego

Z analizy równań (3.13) i (3.18) oraz warunków początkowych (3.14) i (3.19) wynika, że stanowią one matematyczny model dla osłony obciążonej w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem p_0 , które nie zmienia się podczas całego jej ruchu. Tak uproszczony problem można rozwiązać analitycznie. W tym celu równanie (3.18) przekształcamy do postaci:

$$\frac{d}{d\eta} [\dot{\xi}_a^2(\eta)] = 2\dot{\xi}_a(\eta)f(\xi_a),$$

z której po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych otrzymuje się:

$$\dot{\xi}_a^2(\eta) = 2 \int_1^{\xi_a} f(x) dx = 2(2\pi)^2 \int_1^{\xi_a} \left[-x + \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P + 1 \right] dx = (2\pi)^2 \left\{ -x^2 + 2 \left[\frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P + 1 \right] x \right\}_1^{\xi_a}$$

lub

$$\dot{\xi}_a(\eta) = \frac{d\xi_a}{d\eta} = 2\pi \left\{ -\xi_a^2 + 2 \left[\frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P + 1 \right] \xi_a - \left[\frac{\beta^3}{2(\beta^3 - 1)} P + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych w powyższym wyrażeniu i scałkowaniu mamy:

$$2\pi\eta = \arccos \frac{-2\xi_a + 2 \left[\frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P + 1 \right]}{2 \left[\frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P \right]}$$

lub

$$\xi_a(\eta) = 1 + \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P (1 - \cos 2\pi\eta). \quad (4.1)$$

Analityczny kształt funkcji $\xi_a(\eta)$ pozwala określić w analitycznej zamkniętej postaci wszystkie mechaniczne charakterystyki osłony obciążonej w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem p_0 , a mianowicie:

$$U(\xi, \eta) = \frac{\xi_a - 1}{\xi^2} = \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} P \frac{1 - \cos 2\pi\eta}{\xi^2}, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\varepsilon_r(\xi, \eta) = \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)}P \frac{1 - \cos 2\pi\eta}{\xi^3}, \quad (4.3)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left[\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 \right] + A_r(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.4)$$

$$A_r(\xi) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left[\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - (\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - 1 \right],$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left[2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 \right] - A_\varphi(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.5)$$

$$A_\varphi(\xi) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left[\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 + 2(\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) + 2 \right],$$

$$S_z(\xi, \eta) = S_\varphi(\xi, \eta) - S_r(\xi, \eta) = \frac{3}{2} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1 - \cos 2\pi\eta}{\xi^3} = \frac{6}{P} \frac{U(\xi, \eta)}{\xi}. \quad (4.6)$$

Ze wstępnej analizy zamieszczonych wyżej wzorów opisujących rozwiązanie zlinearyzowane wynika ogólny wniosek, że rozpatrywana osłona, obciążona w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem $p_0 = \text{const}$ zachowuje się jak układ mechaniczny o jednym stopniu swobody, który drga radialnie z częstością kołową ω_0 określoną wzorem (3.16). Jak widać, częstość ta jest wprost proporcjonalna do prędkości fali poprzecznej w materiale osłony i odwrotnie proporcjonalna do wewnętrznego promienia osłony. Ponadto wielkość ω_0 maleje wraz z powiększaniem się grubości ścianki osłony (parametru β – rys. 1), co jest oczywistym faktem wynikającym ze wzrostu masy osłony.

Dynamiczny stan mechanicznych parametrów osłony zmienia się z wpływem czasu cyklicznie wokół ich wartości statycznych. W analogii do układu mechanicznego o jednym stopniu swobody współczynnik dynamiczności nagłego wewnętrznego obciążenia osłony, zgodnie ze wzorami (4.2) i (4.7)₁ określony jest wyrażeniem:

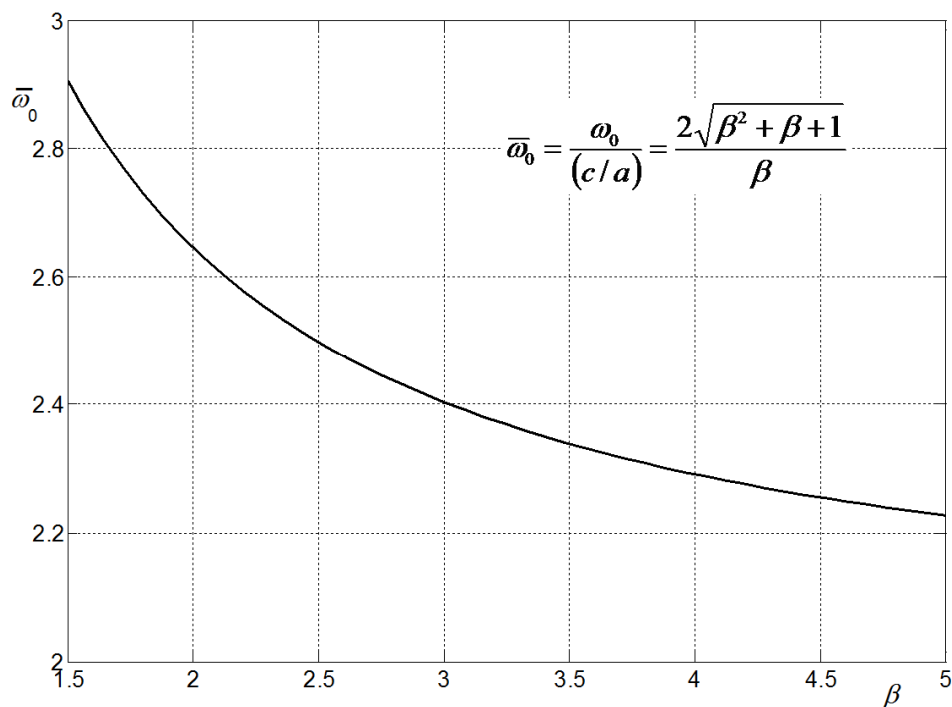
$$\Psi(\eta) = \frac{U(\xi, \eta)}{U_s(\xi)} = 1 - \cos 2\pi\eta.$$

Jak widać, maksymalna wartość Ψ wynosi 2.

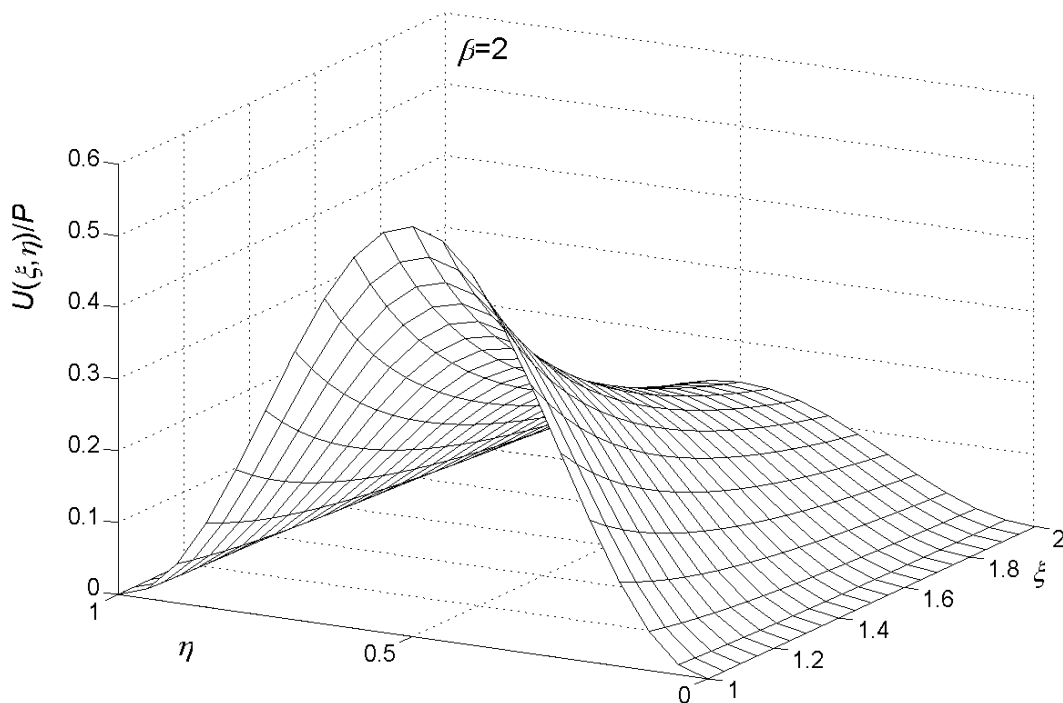
Z postaci wzorów (4.2)-(4.6) bezpośrednio wynika, że maksymalne bezwzględne wartości dynamicznych charakterystyk osłony występują w połowie okresu drgań ($\eta = 0,5$) na jej wewnętrznej powierzchni, tj. dla $\xi = 1$ i wraz ze wzrostem współrzędnej ξ intensywnie maleją. Przemieszczenie maleje odwrotnie proporcjonalnie do ξ^2 , a pozostałe wielkości – w przybliżeniu do ξ^3 . Przyczyną tych zmian jest zjawisko przestrzennej dywergencji badanych wielkości. Przestrzenne kształty funkcji $U(\xi, \eta)/P$, $S_r(\xi, \eta)$, $S_\varphi(\xi, \eta)$ i $S_z(\xi, \eta)$ pokazane są na rysunkach 2-5.

Z zamieszczonych wyżej wzorów wynika, że maksymalne wartości dynamicznych charakterystyk osłony zdeterminowane są przez parametr β (grubość osłony). Główne zmiany charakterystyk mają miejsce w przedziale $1 < \beta \leq 5$. Natomiast dla $\beta > 5$ wpływ grubości

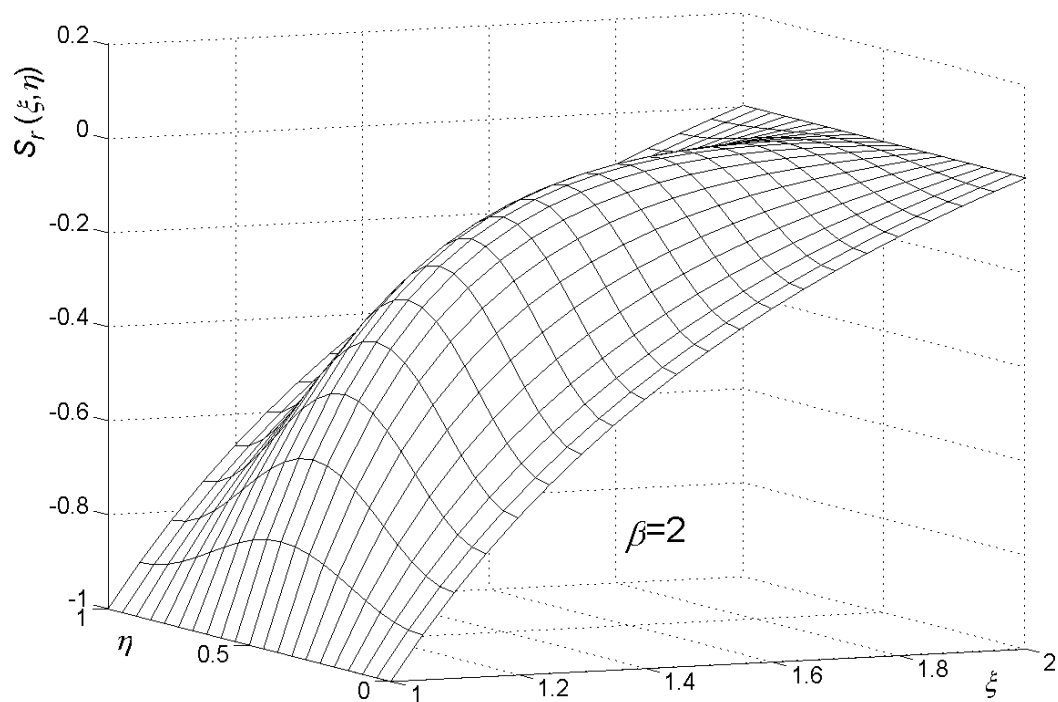
osłony na zmianę jej charakterystyk zanika. W tym przypadku z wzorów (4.2)-(4.6) uzyskuje się porównywalne wyniki jak dla kulistej kawerny w ośrodku nieograniczonym dla $\nu = 0,5$ [10]. Różnice między nimi nie przekraczają ułamka procenta.



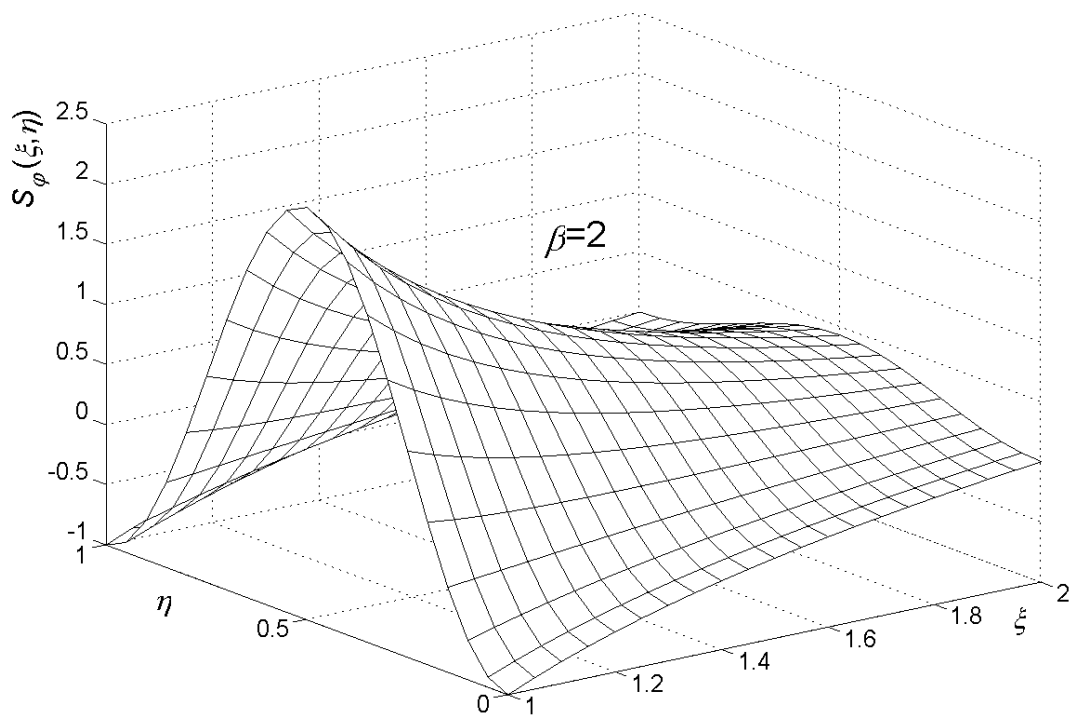
Rys. 1. Zmiana względnej kołowej częstości drgań własnych osłony $\bar{\omega}_0$ w funkcji parametru β .



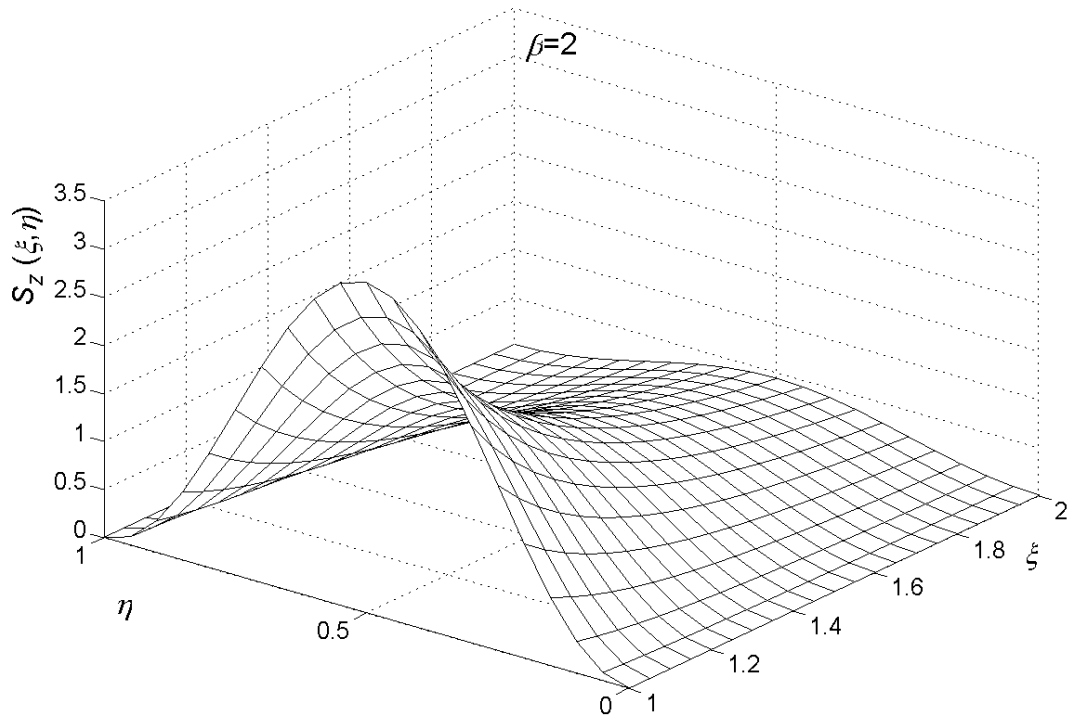
Rys. 2. Przestrzenny kształt funkcji $U(\xi, \eta)/P$ dla $\beta = 2$.



Rys. 3. Przestrzenny kształt funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla $\beta = 2$.



Rys. 4. Przestrzenny kształt funkcji $S_\varphi(\xi, \eta)$ dla $\beta = 2$.



Rys. 5. Przestrzenny kształt funkcji $S_z(\xi, \eta)$ dla $\beta = 2$.

5. Porównanie wyników rozwiązań równań nieliniowego i zlinearyzowanego

Nieliniowe równanie problemu (3.17) rozwiązano numerycznie za pomocą metody Runge'go-Kutty w pakiecie MATLAB 6.1. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów zamieszczonych na rysunkach 6-9. Charakterystyki otrzymane z rozwiązania równania nieliniowego prezentowane są liniami ciągłymi, natomiast parametry modelu zlinearyzowanego przedstawiono w postaci ciągów okręgów. Zamieszczone na rysunkach wykresy dotyczą wewnętrznej powierzchni osłony $\xi = 1$. Na niej bowiem bezwzględne wartości dynamicznych charakterystyk osłony osiągają maksima. W kulistych przekrojach osłony oddalonych od jej wewnętrznej powierzchni zmiana charakterystyk w funkcji zmiennej η jest podobna. Ulegają one tylko odpowiedniemu zmniejszeniu przez zjawisko przestrzennej dywergencji.

Na rys. 6 pokazana jest zmiana wielkości $U(1, \eta)/P$ w funkcji η dla kilku wartości parametrów P , k i β . Wielkości P i k zostały skorelowane zgodnie z termodynamicznymi właściwościami mieszanin wybuchowych [6, 8]. Funkcja $U(1, \eta)$ reprezentuje odkształcenie obwodowe wewnętrznej powierzchni osłony. Z porównania wykresów widać, że wyniki uzyskane z obydwóch rozwiązań są zbliżone, jeśli $P = 0,01$, to znaczy dla bardzo małych odkształceń rzędu ułamka procenta. Dla odkształceń rzędu kilka procent różnice między wynikami przekraczają 10%. Natomiast dla $P = 0,5$ ($\varepsilon_\phi \approx 0,2$) błędy są większe od 50%. Zmniejsza się również nieznacznie okres oscylacji, a kształt przebiegów odbiega od

sinusoidalnego. Jak widać, zastosowanie rozwiązania zlinearyzowanego jest mocno ograniczone.

Na następnych rysunkach 7, 8 i 9 przedstawiono w analogicznym układzie, jak na rys. 6, wykresy reprezentujące odpowiednio funkcje $S_r(1,\eta)$, $S_\varphi(1,\eta)$ i $S_z(1,\eta)$. Podobnie, jak dla funkcji $U(1,\eta)$, z obydwóch rozwiązań otrzymuje się porównywalne wyniki tylko dla bardzo małych odkształceń, tj. dla $P < 0,01$. Natomiast dla $P \geq 0,1$ wyniki są rozbieżne. Różnice wynoszą kilkanaście i więcej procent. Szczególnie duże różnice ilościowe i jakościowe występują dla względnego naprężenia radialnego $S_r(1,\eta)$. Wynika to z faktu, że w modelu nieliniowym ciśnienie wewnątrz osłony zmienia się wykładniczo podczas drgań, a w układzie liniowym pozostaje stałe.

W metalach zawsze występuje skończona wartość dynamicznej granicy plastyczności. Jest ona większa od granicy statycznej. Uzyskane rozwiązanie badanego problemu obowiązuje w zakresie sprężystym. Z tego faktu wynika ograniczenie na maksymalną wartość ciśnienia wytwarzanego w osłonie, tj. $p_0 \leq p_{\max}$. Wartość p_{\max} może być znacznie zwiększona przez wstępne odkształcenia plastyczne wywołane silną falą uderzeniową, która jest wygenerowana w osłonie przez refrakcję fali detonacyjnej.

Jak wiadomo, w metalach plastyczne odkształcenia powodowane są przez składowe dewiatora naprężeń. Na tej podstawie można sądzić, że warunek początku płynięcia materiału zależy tylko od różnicy naprężeń $\sigma_\varphi - \sigma_r$. Rzeczywiście, wyrażenie $(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$ określa maksymalną wartość naprężenia ścinającego. Zgodnie zatem z warunkiem plastyczności Treski, a w przypadku symetrii kulistej – również z warunkiem Hubera-Misses-Hencky'ego, mamy:

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_0, \quad (5.1)$$

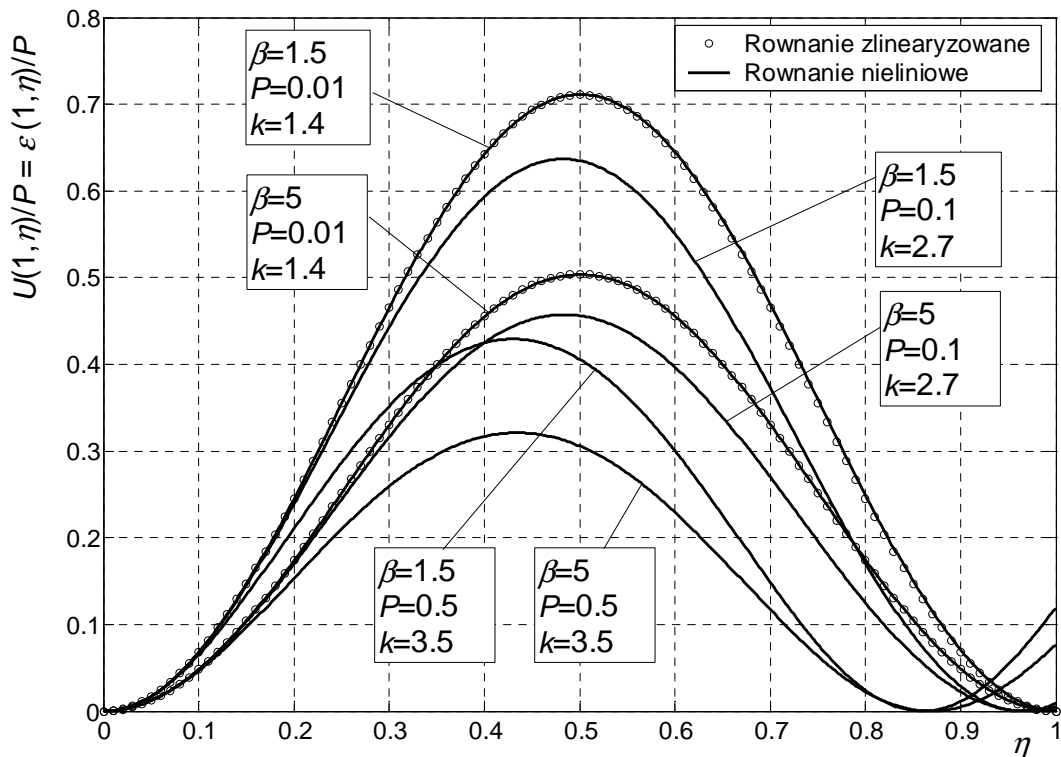
gdzie σ_0 jest wartością dynamicznej granicy plastyczności, otrzymaną z próby rozciągania danego materiału.

Z wykresów zamieszczonych na rysunku 6 i 9 oraz relacji (4.6) wynika, że wielkość $S_z(1,\eta)$ zmienia się podobnie, jak funkcja $U(1,\eta)$. Maksimum osiąga w połowie okresu ($\eta = 0,5$) w układzie zlinearyzowanym. Nieliniowość układu tłumi naprężenia zredukowane. Ze wzrostem grubości osłony jej siły inercyjne w sposób istotny zmniejszają $S_{z\max}(1,\eta)$ w obydwóch układach.

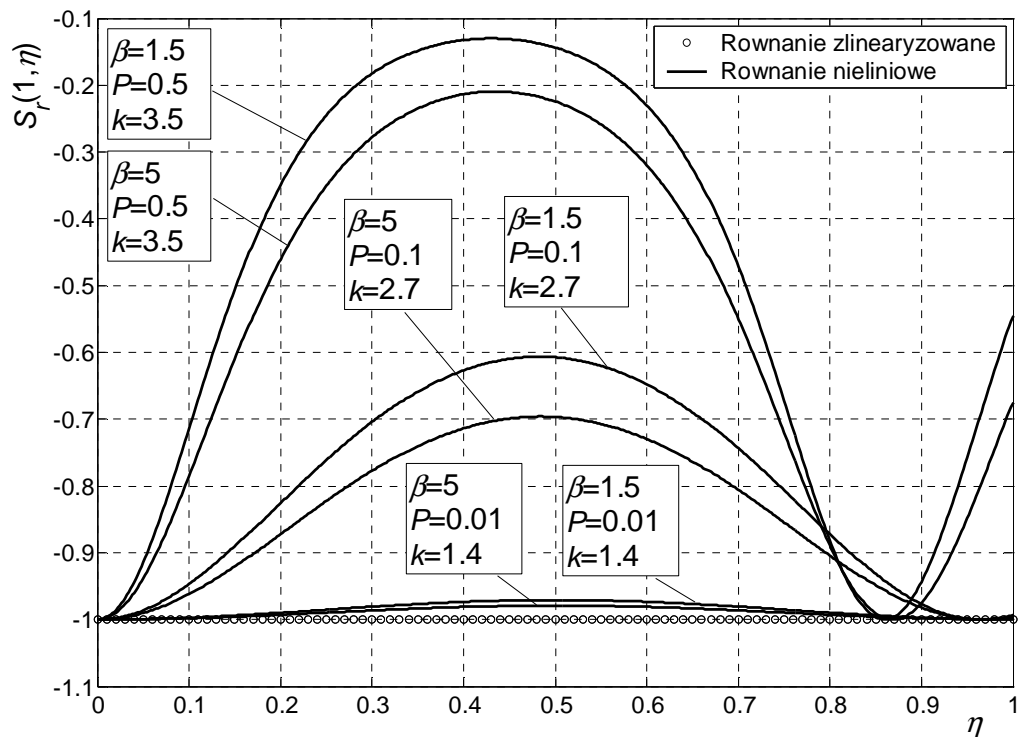
6. Wnioski końcowe

Z analizy rozpatrywanego problemu wynikają następujące wnioski:

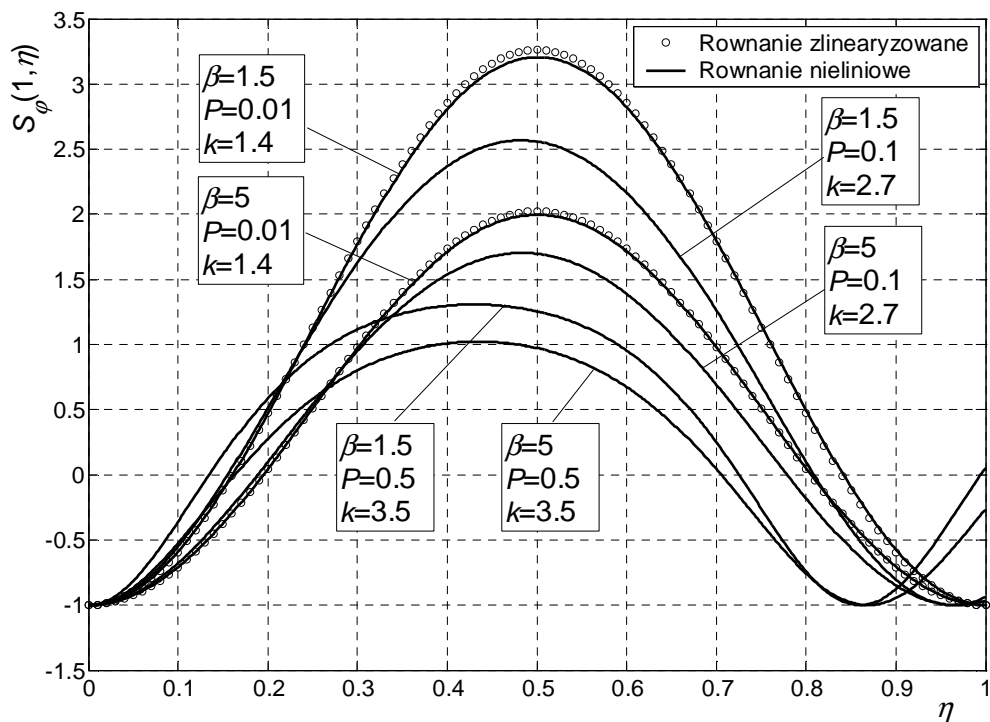
1. Grubościenna kulista osłona balistyczna, wykonana z nieściśliwego izotropowego materiału sprężystego, obciążona wewnątrz ciśnieniem produktów detonacji materiału wybuchowego, po początkowym okresie refrakcji fali detonacyjnej na jej powierzchniach, drga z określoną częstością kołową i zachowuje się podobnie jak mechaniczny układ z jednym stopniem swobody.



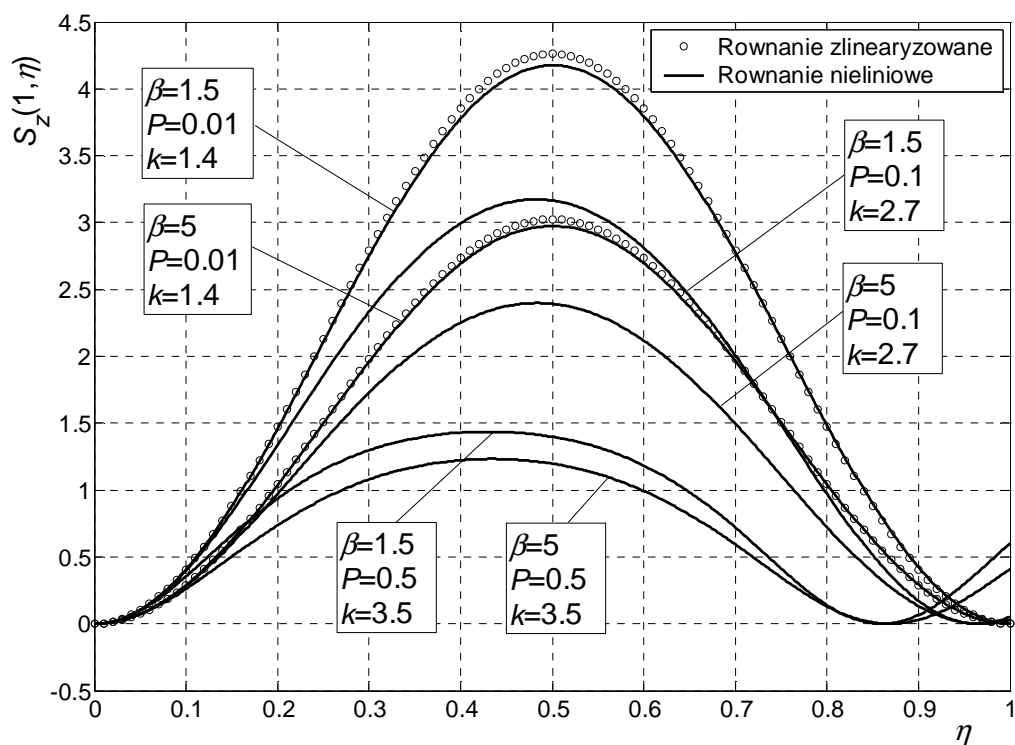
Rys. 6. Porównanie względnego przemieszczenia wewnętrznej powierzchni osłony ($\xi = 1$), uzyskanego z rozwiązań równań: zlinearyzowanego ($\circ \circ \circ$) i liniowego (—)



Rys. 7. Porównanie względnego naprężenia radialnego na wewnętrznej powierzchni osłony ($\xi = 1$), uzyskanego z rozwiązań równań: zlinearyzowanego ($\circ \circ \circ$) i liniowego (—)



Rys. 8. Porównanie względnego naprężenia obwodowego na wewnętrznej powierzchni osłony ($\xi = 1$), uzyskanego z rozwiązań równań: zlinearyzowanego ($\circ \circ \circ$) i liniowego (—)



Rys. 9. Porównanie względnego naprężenie zredukowanego na wewnętrznej powierzchni osłony ($\xi = 1$), uzyskanego z rozwiązań równań: zlinearyzowanego ($\circ \circ \circ$) i liniowego (—)

2. Na przykładzie dynamiki kulistej osłony balistycznej zaprezentowano efektywny matematyczny nieliniowy model rozwiązywania jednowymiarowych dynamicznych zagadnień początkowo-brzegowych w nieściśliwych ośrodkach sprężystych obciążonych wybuchowo. Model ten uwzględnia ruch granicznych powierzchni w warunkach brzegowych i dobrze odzwierciedla rzeczywiste problemy techniczne.
3. Pomijanie ruchu granicznych powierzchni w warunkach brzegowych, często stosowane w literaturze [1], zniekształca jakościowy i ilościowy obraz dynamicznych pól: przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w badanych obiektach. Błędy mogą przekraczać kilkanaście, a nawet kilkadziesiąt procent, w zależności od obciążenia.
4. Model liniowy nie uwzględniający ruchu granicznych powierzchni w warunkach brzegowych daje porównywalne wyniki z modelem nieliniowym tylko dla bardzo małych odkształceń nie przekraczających jednego procenta.
5. Prezentowane rozwiązanie można wykorzystać do szacowania wytrzymałości kulistych osłon balistycznych stosowanych przy wybuchowym napędzaniu cienkościennych pierścieni używanych w badaniach dynamicznych właściwości metali. Poza tym przedstawione wyniki badań dają skromny wkład wiedzy do teorii drgań technicznych układów ciągłych.

Literatura

- [1] H.G. Hopkins, *Dynamic expansion of spherical cavities in metals*, Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, 1960, p. 84-164.
- [2] R.H. COLE, *Underwater explosions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1948.
- [3] S. Kaliski, Cz. Rymarz, K. Sobczyk, E. Włodarczyk, *Waves*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1992.
- [4] J.S. Rinehart, J. Pearson, *Explosive working of metals*, A Pergamon Press Book the Macmillan Company, New York, 1963.
- [5] W. Goldsmith, *Graphical representation of the spherical propagation of explosive pulses in elastic media*, University of California, Inst. Eng. Res., Berkley, Calif., Series No. 63, Rept 1, 1953.
- [6] F.A. Baum, L.P. Orlenko, K.P. Stanjukovic, B.J. Schexter, *Physics of explosion* [in Russian], Nauka, Moscow, 1975.
- [7] J.B. Zeldovich, Ju.P. Rajzer, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena* [in Russian], Nauka, Moscow, 1966.
- [8] E. Włodarczyk, *Introduction into mechanics of explosion* [in Polish], PWN, Warszawa, 1994.
- [9] J.D. Achenbach, *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Oxford, 1975.
- [10] E. Włodarczyk, M. Zielenkiewicz, *Influence of elastic material compressibility on parameters of expanding spherical stress wave*, Shock Waves, Vol. 18, No 6, 2009, s. 465-473.
- [11] E. Włodarczyk, M. Zielenkiewicz, *The dynamics of a thick-walled spherical casing loaded with a time depending internal pressure*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol 46, No. 1, 2008. s. 21-40.

