

RÓWNANIA RUCHU NIEKIEROWANYCH POCISKÓW RAKietOWYCH STABILIZOWANYCH BRZECHWOWO ZGODNE ZE STANAGIEM 4355 ED.4

Streszczenie: W pracy przedstawiono sposób konstruowania modelu matematycznego dynamiki lotu niekierowanych pocisków raketowych rozróżniając cztery fazy lotu: po wyrzutni, od momentu zejścia z wyrzutni do rozłożenia się stabilizatorów, od momentu rozłożenia się stabilizatorów do chwili zakończenia pracy silnika raketowego oraz na biernym odcinku lotu do momentu eksplozji głowicy. Zastosowano nazewnictwo i oznaczenia zgodne ze Stanagiem 4355 ed.4. Skalarne równania zarówno ruchu postępowego jak i obrotowego rakiety wyprowadzono w układzie związanym z Ziemią, wykorzystując zamiast kątów Eulera, kosinusy kierunkowe osi symetrii rakiety.

EQUATIONS OF MOTION FOR UNGUIDED FIN-STABILIZED ROCKETS CONSISTENT WITH STANAG 4355 ED.4

Abstract: In the paper was introduced the equations of motion for unguided fin-stabilized rockets during four phases of the flight, namely, during launch, from launch to fin opening, from fin opening to the end of motion requiring five degrees of freedom (5 DoF), and from the end of the 5 DoF segment to the end of the 3 DoF phase which normally is the burst point of the warhead. This model is consistent with Stanag 4355 ed.4 and is formulated to solve the rockets pitching and yawing motion in terms of direction cosines of the projectile's axis of symmetry, rather than the Euler-angle method.

1. Wstęp

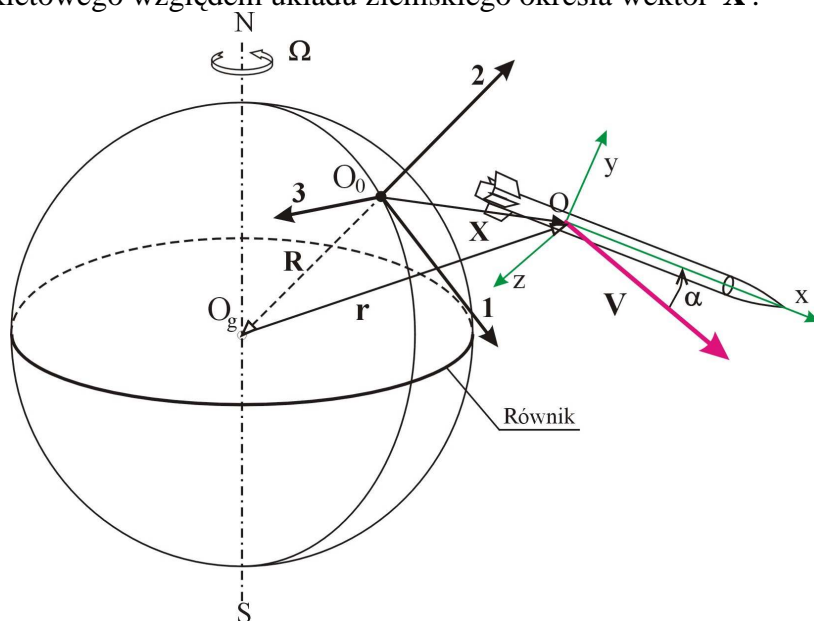
Podstawowym celem Stanagu 4355, prowadzonego przez grupę NAAG (NATO Army Armament Group) LG/4 SG/2, jest ujednoczenie procedur obliczania trajektorii lotu szeroko rozumianych pocisków artylerii polowej celem ułatwienia i rozszerzenia współpracy między różnymi ośrodkami badawczymi i konstrukcyjnymi państw członkowskich NATO, w głównej mierze przy opracowywaniu tabel strzelniczych oraz systemów kierowania ogniem.

Edycja 4 Stanagu 4355 z 21.03.2006 roku, w stosunku do wersji poprzednich, została wzbogacona między innymi o metodykę opracowywania modelu matematycznego lotu raket niekierowanych stabilizowanych brzechwowo. Postać modelu fizycznego oraz matematycznego zależy od fazy ruchu pocisku raketowego. W modelowaniu rozróżnia się następujące cztery fazy ruchu:

- faza 1 ($t_0 \leq t \leq t_L$) - ruch rakiety po wyrzutni z pracującym silnikiem raketowym,
- faza 2 ($t_L \leq t \leq t_{FO}$) - lot rakiety od momentu zejścia z wyrzutni t_L do momentu rozłożenia stateczników t_{FO} (lot ze złożonymi statecznikami i pracującym silnikiem raketowym),

- faza 3 ($t_{FO} \leq t \leq t_{ESD}$) - lot rakiety od momentu rozłożenia stateczników t_{FO} do czasu nieznacznie przekraczającego koniec pracy silnika raketowego t_{ESD} (lot z rozłożonymi statecznikami i pracującym silnikiem raketowym),
- faza 4 ($t \geq t_{ESD}$) - lot rakiety z rozłożonymi statecznikami i niepracującym silnikiem raketowym.

Do określenia położenia pocisku raketowego względem Ziemi w Stanagu 4355 ed.4 [6] stosuje się prawoskrętny, ortonormalny, kartezjański układ odniesienia, związany z Ziemią o początku w punkcie stania wyrzutni, oznaczany następująco O_0123 (rys. 1). Położenie środka masy pocisku raketowego względem układu ziemskiego określa wektor \vec{X} .



Rys. 1. Położenie pocisku raketowego względem układu związanego z Ziemią O_0123

Do opisu sił i momentów aerodynamicznych działających na raketę w locie wykorzystuje się dwa wektory jednostkowe (wersory) \vec{x} i \vec{i}_v przyłożone w środku masy pocisku raketowego:

- wektor jednostkowy \vec{x} położony jest wzdłuż osi symetrii pocisku raketowego i zwrócony w kierunku noska (rys. 1), w układzie ziemskim ma składowe oznaczone następująco $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$,
- wektor jednostkowy \vec{i}_v położony jest wzdłuż osi pokrywającej się z wektorem prędkości pocisku raketowego określonej względem powietrza \vec{v} , który w układzie ziemskim ma składowe oznaczone następująco $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$.

W pracy przedstawiono wektorowe i skalarne równania ruchu rakiety w poszczególnych fazach lotu, przy czym skalarne równania zarówno ruchu postępowego jak i obrotowego rakiety jako bryły sztywnej, wyprowadzono w układzie związanym z Ziemią, wykorzystując zamiast kątów Eulera, kosinusy kierunkowe jej osi symetrii. W opisie modelu matematycznego zastosowano angielskie oznaczenia wszystkich występujących wielkości zgodnie ze Stanagiem 4355. Ponieważ wiele sił i momentów aerodynamicznych działających na obiekty latające zostało szczegółowo opisane w pracy [1], w niniejszej pracy ograniczono się do szczegółowego opisu zależności na siły i momenty wywołane pracą silnika raketowego.

2. Wektorowa postać równań ruchu pocisku raketowego

W układzie związanym z Ziemią równania ruchu pocisku raketowego jako bryły sztywnej można wyprowadzić z prawa zmiany pędu $m\mathbf{u}$ i krętu \mathbf{H} określonego względem środka masy [2, 3, 5]. Postać równań ruchu zależy od fazy ruchu pocisku raketowego.

2.1. Równania ruchu rakiety w fazie 1

Faza 1 ($t_0 \leq t \leq t_L$) to ruch pocisku raketowego z pracującym silnikiem po wyrzutni. Wektorowe równanie ruchu środka masy pocisku raketowego zgodnie z [6] ma postać

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{TF} + m|\mathbf{g}|(-\sin(QE) - \mu_f \cos(QE))\mathbf{x}_0 \quad (1)$$

gdzie:

\mathbf{DF} - wektor siły oporu [1];

$m\mathbf{g}$ - wektor siły ciężkości [1];

\mathbf{TF} - wektor ciągu silnika raketowego;

\mathbf{u} - wektor prędkość pocisku względem Ziemi,

μ_f - współczynnik tarcia rakiety o wyrzutnię,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos(QE) \cos(\Delta AZ) \\ \sin(QE) \\ \cos(QE) \sin(\Delta AZ) \end{bmatrix} - \text{kierunek położenia wyrzutni względem układu } O_0123, \quad (2)$$

QE - kąt podniesienia wyrzutni [mil],

ΔAZ - kątowe odchylenie wyrzutni w płaszczyźnie poziomej od osi $O1$ [mil],

1 [mil] = $2\pi/6400$ [rad].

Stanag 4355 dopuszcza dwie metody modelowania ciągu silnika raketowego \mathbf{TF} (ang. thrust force). Według metody nr 2 wektor ciągu jest skierowany wzdłuż osi podłużnej rakiety i wyraża się następującą zależnością [6]

$$\mathbf{TF} = (f_T \dot{m}_f I_{sp} + (P_r - P)A_e)\mathbf{x} \quad (3)$$

Równania opisujące wydatek masowy paliwa spalane w silniku raketowym zależą od parametrów lotu pocisku i w funkcji czasu lotu wyrażają się następująco: w chwili $t = 0$

$$m = m_0 \quad \text{oraz} \quad \dot{m} = 0 \quad (4)$$

dla $0 < t < t_B$

$$\dot{m} = -\dot{m}_f \quad (5)$$

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m}_f dt \quad (6)$$

$$\dot{m}_f = \left(\frac{t_B^* - t_{(t)}^*}{t_{B(t)}^* - t} \right) \dot{m}_f^* \quad (7)$$

$$t_{(t)}^* = \frac{t_B^* - t_{(t)}^*}{t_{B(t)}^* - t} \quad (8)$$

$$t_{B(t)}^* = (t_{B(t)} - t) \left[f_{BT_p} \frac{\dot{p}}{p} + f_{BT_p} \frac{\dot{P}}{P} \right] \quad (9)$$

gdzie
$$\dot{P} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta E_2} u_2 \quad (10)$$

dla $t \geq t_B$

$$m = m_B = m_0 - m_{DI} - m_f \quad (11)$$

$$\dot{m} = 0 \quad (12)$$

gdzie: t – obliczany bieżący czas lotu pocisku,

t^* - pseudo-czas pracy silnika;

t_B - czas pracy silnika raketowego;

t_B^* - wzorcowy czas pracy silnika raketowego;

I_{SP} - impuls właściwy;

m_f - masa paliwa raketowego;

m_0 - początkowa masa pocisku raketowego z zapalnikiem;

m_B - masa pocisku raketowego po wypaleniu się paliwa raketowego;

P_r - standardowe ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza;

$\dot{m}_f^* = F(t^*)$ - standardowy wydatek masowy określony dla standardowej temperatury paliwa MT , standardowej prędkości obrotowej pocisku raketowego p_r i standardowego ciśnienia atmosferycznego P_r .

Uwzględniając zależność (3) oraz wzory zawarte w pracy [1] na siłę oporu i siłę ciężkości, wektorowe równanie ruchu pocisku raketowego (1) można wyrazić następująco

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left[-\frac{\pi p_i d^2}{8m} C_{D_0} v^2 + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P) A_e)}{m} + g_0 (-\sin(QE) - \mu_f \cos(QE)) \right] \mathbf{x}_0 \quad (13)$$

2.2. Równania ruchu rakiety w fazie 2

Faza 2 ($t_L \leq t \leq t_{FO}$) to lot rakiety ze złożonymi statecznikami i pracującym silnikiem raketowym. Równania ruchu rakiety jako bryły sztywnej zgodnie z [6] zawierają:

- wektorowe dynamiczne równanie ruchu środka masy pocisku raketowego

$$m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF} + \mathbf{PDF} + \mathbf{TF} + m\mathbf{\Lambda} \quad (14)$$

gdzie:

LF - wektor siła nośna (ang. lift force),

MF - siła Magnusa (ang. Magnus force),

PDF - siła tłumiąca oscylacje (ang. pitch damping force),

$m\mathbf{\Lambda}$ - siła Coriolisa wynikająca z ruchu obrotowego Ziemi,

- wektorowe dynamiczne równanie ruchu dookoła środka masy pocisku raketowego

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{OM} + \mathbf{PDM} + \mathbf{MM} + \mathbf{SDM} + \mathbf{FCM} + \mathbf{AJDM} + \mathbf{TJDM} \quad (15)$$

gdzie:

OM - moment wywracający (ang. overturning moment),

PDM - moment tłumiący oscylacje (ang. pitch damping moment),

MM - moment siły Magnusa,

SDM - moment tłumiący wirowanie (ang. spin damping moment),

FCM - moment przechylający (ang. fin cant moment),

AJDM - osiowy tłumiący moment wywołany strumieniem silnika raketowego (ang. axial jet damping moment):

$$\mathbf{AJDM} = \frac{\dot{m}r_{ne}^2}{2I_x} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (16)$$

r_{ne} - promień przekroju wylotowego dyszy silnika raketowego,

TJDM - poprzeczny tłumiący moment wywołany strumieniem silnika raketowego (ang. transverse jet damping moment):

$$\mathbf{TJDM} = \frac{\dot{m}r_e r_t}{I_y} [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}] \quad (17)$$

r_e - położenie środka masy pocisku raketowego względem przekroju wylotowego dyszy silnika raketowego:

r_t - położenie środka masy pocisku raketowego względem przewężenia dyszy silnika raketowego

- wektorowe równanie na wersor $\bar{\mathbf{x}}$ na podstawie zależności (2.11)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{(\mathbf{H} \times \mathbf{x})}{I_y} \quad (18)$$

- zależność na kąt nutacji α otrzymujemy z iloczynu skalarnego,

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}{v} \quad (19)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{w}}$ - wektor prędkości pocisku raketowego względem powietrza,
 $\bar{\mathbf{w}}$ - wektor prędkości wiatru.

Uwzględniając zależności (16 i 17) oraz wzory zawarte w pracy [1] na pozostałe siły i momenty aerodynamiczne, wektorowe równania ruchu rakiety (14) i (15) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & -\frac{\pi\rho id^2}{8m} (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \mathbf{v} + \frac{\pi\rho f_L d^2}{8m} (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) [v^2 \mathbf{x} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{v}] + \\ & + \frac{\pi\rho d^3}{8I_x} C_{mag-f} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) + \frac{\pi\rho d^3 v}{8m I_y} (C_{N_q} + C_{N_\alpha}) (\mathbf{H} \times \mathbf{x}) + \\ & + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P) A_e)}{m} \mathbf{x} - g_0 (R^2 / r^3) \mathbf{r} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{8} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}) (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_\alpha}) [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}] + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} + \\ & + \frac{\rho d^3 \pi}{8} C_{l_\delta} \varepsilon v^2 \mathbf{x} + \frac{\dot{m}r_{ne}^2}{2I_x} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} + \frac{\dot{m}r_e r_t}{I_y} [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (21)$$

Uwaga: współczynniki sił i momentów aerodynamicznych występujące w równaniach (20) i (21) należy wziąć dla rakiety w konfiguracji bez rozłożonych stateczników.

2.3. Równania ruchu rakiety w fazie 3

Faza 3 ($t_{FO} \leq t \leq t_{ESD}$) to lot rakiety z rozłożonymi statecznikami i pracującym silnikiem raketowym. Równania ruchu rakiety jako bryły sztywnej mają identyczną postać jak w fazie drugiej z tą różnicą, że współczynniki sił i momentów aerodynamicznych występujące w równaniach (20 i 21) należy wziąć dla rakiety w konfiguracji z rozłożonymi statecznikami.

2.4. Równania ruchu rakiety w fazie 4

Faza 4 ($t \geq t_{E5D}$) to lot rakiety z rozłożonymi statecznikami i niepracującym silnikiem raketowym. Równanie ruchu rakiety jako punktu materialnego zgodnie z [6] ma postać

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda} \quad (22)$$

Uwzględniając wzory zawarte w pracy [1] na siłę oporu, ciężkości i Coriolisa, wektorowe równanie ruchu pocisku raketowego (22) można wyrazić następująco

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\pi\rho d^2}{8m} C_D v \mathbf{v} - g_0 \left(R^2 / r^3 \right) \mathbf{r} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (23)$$

2.5. Równania wektorowe wspólne dla wszystkich faz ruchu pocisku raketowego

- wektor prędkość pocisku raketowego względem Ziemi w danej chwili t wyznaczamy z zależności:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_0 + \int_0^t \vec{\mathbf{u}} dt \quad (24)$$

gdzie

$$\vec{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \cos(QE) \cos(\Delta AZ) \\ u_0 \sin(QE) \\ u_0 \cos(QE) \sin(\Delta AZ) \end{bmatrix} \quad (25)$$

- wektor położenia pocisku raketowego $\vec{\mathbf{X}}$ w układzie ziemskim wyznaczamy z zależności

$$\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}_0 + \int_0^t \vec{\mathbf{u}} dt \quad (26)$$

gdzie

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} l_w \cos(QE) \cos(\Delta AZ) \\ X_{2w} + l_w \sin(QE) \\ l_w \cos(QE) \sin(\Delta AZ) \end{bmatrix} \quad (27)$$

l_w - odległość od czopa zawieszenia obrotowego broni do przekroju wylotowego lufy [m] (w przypadku rakiet $l_w = 0$),

X_{2w} - wysokość czopa zawieszenia obrotowego lufy ponad poziom morza [m],

- wektor położenia pocisku raketowego względem sferycznej powierzchni Ziemi można wyrazić następującą uproszczoną zależnością

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 + \frac{X_1^2 + X_3^2}{2R} \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

3. Skalarna postać równań ruchu pocisku raketowego

Skalarną postać równań ruchu pocisku raketowego, uzyskano rzutując równania wektorowe (zarówno środka masy, jak i dookoła środka masy) na osie ziemskiego układu współrzędnych O_0I23 , wykorzystując zamiast kątów Eulera, kosinusy kierunkowe osi symetrii pocisku (wersora \vec{x}). Tak skonstruowany model matematyczny jest układem równań różniczkowo-algebraicznych (najbardziej złożonym dla fazy 2 i 3 lotu rakiety). W poszczególnych fazach lotu równania mają następującą postać:

faza 1 - ($t_0 \leq t \leq t_L$) - równania ruchu środka masy pocisku raketowego po wyrzutni:

$$\frac{du_1}{dt} = \left(-\frac{\pi\rho id^2}{8m} C_{D_0} v^2 + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P)A_e)}{m} - g_0(\sin(QE) + \mu_f \cos(QE)) \right) \cos(QE) \cos(\Delta AZ) \quad (29)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \left(-\frac{\pi\rho id^2}{8m} C_{D_0} v^2 + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P)A_e)}{m} - g_0(\sin(QE) + \mu_f \cos(QE)) \right) \sin(QE) \quad (30)$$

$$\frac{du_3}{dt} = \left(-\frac{\pi\rho id^2}{8m} C_{D_0} v^2 + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P)A_e)}{m} - g_0(\sin(QE) + \mu_f \cos(QE)) \right) \cos(QE) \sin(\Delta AZ) \quad (31)$$

faza 2 - ($t_L \leq t \leq t_{FO}$) – równania ruchu rakiety jako bryły sztywnej:

- dynamiczne równania ruchu środka masy pocisku raketowego otrzymane z (2.65):

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right) (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \cdot v_1 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right) (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) (v^2 x_1 - v v_1 \cos \alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8m I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (x_2 v_3 - x_3 v_2) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_{\dot{\alpha}}})}{8m I_y} (H_2 x_3 - H_3 x_2) + \\ & + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P)A_e)}{m} x_1 - g_0 \frac{X_1}{R} - 2\Omega (\sin(lat) u_3 + \cos(lat) \sin(AZ) u_2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right) (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \cdot v_2 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right) (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) (v^2 x_2 - v v_2 \cos \alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8m I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_{\dot{\alpha}}})}{8m I_y} (H_3 x_1 - H_1 x_3) + \\ & + \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P)A_e)}{m} x_2 - g_0 \left(1 - \frac{2X_2}{R}\right) + 2\Omega (\cos(lat) \sin(AZ) u_1 + \cos(lat) \cos(AZ) u_3) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right) (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \cdot v_3 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right) (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) (v^2 x_3 - v v_3 \cos \alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8m I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (x_1 v_2 - x_2 v_1) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_{\dot{\alpha}}})}{8m I_y} (H_1 x_2 - H_2 x_1) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(f_T \dot{m}_f I_{SP} + (P_r - P) A_e)}{m} x_3 - g_0 \left(\frac{X_3}{R} \right) - 2\Omega (\cos(lat) \cos(AZ) u_2 - \sin(AZ) u_1) \quad (34)$$

- dynamiczne równania ruchu dookoła środka masy pocisku raketowego otrzymane z (2.66)

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{8} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}) (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_1 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_1 - v x_1 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1 + \\ & + \frac{\pi\rho d^3}{8} C_{I_\delta} \varepsilon v^2 x_1 + \frac{\dot{m} r_{ne}^2}{2I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1 + \frac{\dot{m} r_{e} r_t}{I_y} [H_1 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{8} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}) (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_2 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_2 - v x_2 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2 + \\ & + \frac{\pi\rho d^3}{8} C_{I_\delta} \varepsilon v^2 x_2 + \frac{\dot{m} r_{ne}^2}{2I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2 + \frac{\dot{m} r_{e} r_t}{I_y} [H_2 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_3}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{8} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}) (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_3 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_3 - v x_3 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3 + \\ & + \frac{\pi\rho d^3}{8} C_{I_\delta} \varepsilon v^2 x_3 + \frac{\dot{m} r_{ne}^2}{2I_x} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3 + \frac{\dot{m} r_{e} r_t}{I_y} [H_3 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3] \end{aligned} \quad (37)$$

- równania na kosinusy kierunkowe otrzymujemy z zależności (2.63)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{(H_2 x_3 - H_3 x_2)}{I_y} \quad (38)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{(H_3 x_1 - H_1 x_3)}{I_y} \quad (39)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{(H_1 x_2 - H_2 x_1)}{I_y} \quad (40)$$

- równanie określające kąt nutacji otrzymujemy z zależności na iloczyn skalarny (2.64)

$$\cos \alpha = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3}{v} \quad (41)$$

- zależność na bieżące położenie środka masy pocisku raketowego wyznacza się z zależności

$$X_{CG} = X_{CG_B} + \frac{(X_{CG_{j_0}} - X_{CG_B})(m - m_B)}{m} \quad (42)$$

gdzie
$$X_{CG_{f_0}} = X_{CG_B} + \frac{(X_{CG_0} - X_{CG_B})m_0}{m_0 - m_B} \quad (43)$$

- zależność na bieżący współczynnik momentu stabilizującego opisuje równanie

$$C_{M_\alpha} = C_{M_\alpha}^* + \left[\frac{(X_{CG} - X_{CG_0})(C_{D_0} + C_{L_\alpha})}{d} \right] \quad (44)$$

W czasie trwania pracy silnika raketowego przyjmuje się, że współczynnik siły oporu pocisku przy zerowym kącie nutacji wynosi $C_{D_{0T}}$.

- zależność na bieżący sześcienny współczynnik momentu stabilizującego opisuje równanie

$$C_{M_{\alpha^3}} = C_{M_{\alpha^3}}^* + \left[\frac{(X_{CG} - X_{CG_0})(C_{L_{\alpha^3}} + C_{D_{\alpha^2}} - 0.5C_{L_\alpha})}{d} \right] \quad (45)$$

- zależność na bieżący osiowy moment bezwładności pocisku raketowego opisuje równanie

$$I_X = I_{X_0} + \left[\frac{(I_{X_0} - I_{X_B})(m - m_0)}{m_0 - m_B} \right] \quad (46)$$

- zależność na bieżący poprzeczny moment bezwładności pocisku raketowego opisuje równanie

$$I_Y = I_{Y_0} - (m_0 - m)r_f^2 + m_0(X_{CG_{f_0}} - X_{CG_0})^2 - m(X_{CG_f} - X_{CG})^2 \quad (47)$$

faza 3 - ($t_{FO} \leq t \leq t_{ESD}$) - równania ruchu rakiety jako bryły sztywnej zgodnie z [6] mają identyczną postać jak w fazie drugiej z tą różnicą, że współczynniki sił i momentów aerodynamicznych występujące w równaniach (14 i 15) należy wziąć dla rakiety w konfiguracji z rozłożonymi statecznikami.

faza 4 - ($t \geq t_{ESD}$) - równania ruchu pocisku raketowego jako punktu materialnego

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{\pi\rho id^2}{8m_B} C_D v v_1 - g_0 \frac{X_1}{R} - 2\Omega(\sin(lat)u_3 + \cos(lat)\sin(AZ)u_2) \quad (48)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{\pi\rho id^2}{8m_B} C_D v v_2 - g_0 \left(1 - \frac{2X_2}{R}\right) + 2\Omega(\cos(lat)\sin(AZ)u_1 + \cos(lat)\cos(AZ)u_3) \quad (49)$$

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{\pi\rho id^2}{8m_B} C_D v v_3 - g_0 \left(\frac{X_3}{R}\right) - 2\Omega(\cos(lat)\cos(AZ)u_2 - \sin(AZ)u_1) \quad (50)$$

Wspólne równania dla wszystkich czterech faz ruchu pocisku raketowego

- kinematyczne równania ruchu środka masy pocisku

$$\frac{dX_1}{dt} = u_1 \quad (51)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = u_2 \quad (52)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = u_3 \quad (53)$$

- równania na składowe i moduł wektora prędkości pocisku względem powietrza

$$v_1 = u_1 - w_1, \quad v_2 = u_2 - w_2, \quad v_3 = u_3 - w_3 \quad (54)$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (55)$$

- współczynniki aerodynamiczne występujące w równaniach ruchu są funkcją liczby Macha i przedstawia się je w postaci wielomianu czwartego lub niższego stopnia:

$$C_i = a_0 + a_1M + a_2M^2 + a_3M^3 + a_4M^4 \quad (56)$$

gdzie:

C_i - poszczególne współczynniki aerodynamiczne,
 M - liczba Macha.

4. Podsumowanie i wnioski końcowe

Artykuł stanowi kontynuację prac dotyczących popularyzowania modeli ruchu różnorodnych pocisków artylerii polowej, opisanych w najnowszym Stanagu 4355 Edycja 4 z 2006 roku [6]. Problem jest ważny albowiem modele matematyczne zawarte w powyższym Stanagu są rekomendowane do wykorzystania w natowskich systemach kierowania ogniem artylerii polowej.

W bieżącej pracy przedstawiono udoskonalone, zgodne z wymaganiami dokumentów standaryzacyjnych NATO (Stanag 4355 ed. 4), metody modelowania lotu niekierowanych pocisków raketowych, celem przyszłościowego wykorzystania opracowanej metodyki w oprogramowaniu zautomatyzowanego systemu kierowania ogniem artylerii raketowej Wojska Polskiego.

Aby zminimalizować czas trwania obliczeń trajektorii lotu rakiety, zapewniając jednocześnie dostateczną z artyleryjskiego punktu widzenia dokładność, ruch rakiety został podzielony na cztery charakterystyczne fazy lotu. Dla każdej z faz zastosowano optymalny model fizyczny rakiety i odpowiednie wektorowe równania ruchu. Szczególny nacisk położono na wyprowadzenie jednolitych, dla wszystkich czterech faz lotu, skalarnych równań ruchu rakiety w układzie ziemskim, wykorzystując zamiast kątów Eulera, kosinusy kierunkowe jej osi symetrii.

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2010
jako projekt badawczy*

Literatura

- [1] BARANOWSKI L., *Model trajektorii lotu pocisku wirującego o sześciu stopniach swobody zgodny ze Stanagiem 4355*, Biul. WAT, vol. LVII, nr 3 (651), 2008, str. 155-172.
- [2] MCCOY R. L. , *Modern Exterior Ballistics .The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, Schiffer Publishing, 1999.
- [3] OSIŃSKI Z., *Mechanika ogólna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.
- [4] *Procedures to Determine the Fire Control Inputs for use in Indirect Fire Control Systems*, STANAG 4144 (Edition 2).
- [5] *Textbook of Ballistics and Gunnery*, Part I, Her Majesty's Stationery Office, London, 1987.
- [6] *The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models*, STANAG 4355 (Edition 4).