

Mirosław PAJOR<sup>1</sup>  
Bartosz POWAŁKA<sup>1</sup>  
Marcin HOFFMANN<sup>1</sup>

## **IDENTYFIKACJA MODELU PROCESU SKRAWANIA NARZĘDZIAMI WIELOOSTRZOWYMI DLA POTRZEB ANALIZY WIBROSTABILNOŚCI**

W artykule przedstawiono analityczną metodę wyznaczania krzywych stabilności dla frezowania. Model stabilności wymaga znajomości częstotliwościowej funkcji przejścia (FRF) struktury masowo - dyssypacyjno - sprężystej (MDS) obrabiarki, współczynników oporu skrawania oraz danych dotyczących narzędzia skrawającego. Do opisu przebiegów sił skrawania zastosowano model liniowy zaproponowany przez Altintasa, w którym współczynniki materiałowe estymowano w dziedzinie częstotliwości na podstawie zmierzonych doświadczalnie sił skrawania. Krzywa granicy stabilności pozwala na określenie stabilnych parametry pracy i uniknięcie powstawania drgań samowzbudnych, które są niepożądanym zjawiskiem podczas obróbki. Wyznaczone krzywe stabilności zweryfikowano doświadczalnie poprzez badania pracą na obrabiarce sterowanej numerycznie JAFO FNU-50.

### **1. WSTĘP**

Wibrostabilność systemu O-PS (obrabiarka - proces skrawania) wiąże się z jego odpornością na powstawanie i rozwój drgań samowzbudnych. Jedną z głównych przyczyn powstawania drgań samowzbudnych podczas obróbki jest tzw. zjawisko regeneracji śladu [1],[5-6],[8-9]. Regeneracja drgań, a więc powstanie drgań samowzbudnych jest możliwe przy zaistnieniu odpowiednich wewnętrznych sprzężeń pomiędzy układem masowo-dyssypacyjno-sprężystym (MDS) obrabiarki, a procesem skrawania (PS), co skutkuje pojawieniem się zmiennej siły generującej te drgania. Zjawisko regeneracji śladu zależy zatem od parametrów ruchu systemu drgającego [5] i procesu skrawania.

Drgania samowzbudne bezpośrednio związane są z pojęciem stabilności systemu O-PS, tj. wibrostabilności. Dynamiczny układ O-PS jest wibrostabilny, jeżeli po krótkotrwałym pobudzeniu powstają w nim zanikające drgania swobodne. Jeśli jednak drgania nie zanikają a rozwiną się, czyli następuje wzrost ich amplitudy pomimo ustania

---

<sup>1</sup> Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Instytut Technologii Mechanicznej,  
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki

pobudzenia, układ uważa się za niestabilny. Powstawanie drgań samowzбудnych w czasie obróbki jest zjawiskiem niepożądanym. Przy określonych parametrach skrawania drganie te rozwijają się i utrzymują na stałym, wysokim poziomie. Obróbka w takich warunkach jest niedopuszczalna. Drgania te wpływają niekorzystnie na trwałość narzędzia i poszczególnych elementów obrabiarki, jak również na jakość obrobionej powierzchni.

Prognozowanie wibrostabilności polega na wyznaczeniu wykresu granicznej głębokości skrawania w funkcji prędkości obrotowej – tzw. *krzywych workowych*. Krzywe takie dzielą płaszczyznę prędkości obrotowej wrzeciona i głębokości skrawania na obszar stabilny i niestabilny. Do wyznaczenia wykresu stabilności konieczna jest znajomość modelu dynamiki obrabiarki oraz modelu sił skrawania. Własności dynamiczne obrabiarki zazwyczaj definiuje się w formie częstotliwościowej funkcji przejścia określonej w punkcie styku narzędzia i przedmiotu. Siły skrawania opisuje się zwykle modelem mechanistycznym [2-3].

W niniejszym artykule przedstawiono metodykę wyznaczania krzywych workowych na przykładzie obróbki frezowaniem przedmiotu o dużej podatności. Pokazano sposób wyznaczania częstotliwościowej funkcji przejścia oraz identyfikacji współczynników oporu skrawania potrzebnych w modelu sił skrawania. Model ten utworzono dla frezu trzpieniowego DIN 845-B K-N HSS z wykorzystaniem transformacji Fouriera [4].

## 2. METODYKA WYZNACZANIA KRZYWYCH WORKOWYCH

Na podstawie wieloletnich badań i obserwacji stwierdzono, że przy frezowaniu utrata stabilności następuje najczęściej dla postaci drgań odpowiadających drganiom stołu frezarki lub przedmiotu obrabianego w kierunku zgodnym z kierunkiem posuwu [5]. Jeśli podatność przedmiotu obrabianego jest największa właśnie w tym kierunku, to największy poziom drgań przedmiotu spodziewany jest właśnie na kierunku posuwu, czyli bez znacznej straty na dokładności opisu można przyjąć, że w układzie MDS dominuje jedna postać drgań i jego model fizyczny można zastąpić układem o jednym stopniu swobody (rys. 1).

Własności dynamiczne układu MDS opisuje macierz funkcji przejścia zdefiniowana w układzie odniesienia związanym z umownym punktem styku narzędzia i przedmiotu obrabianego. W tym samym układzie odniesienia określone są względne przemieszczenia narzędzia i przedmiotu.

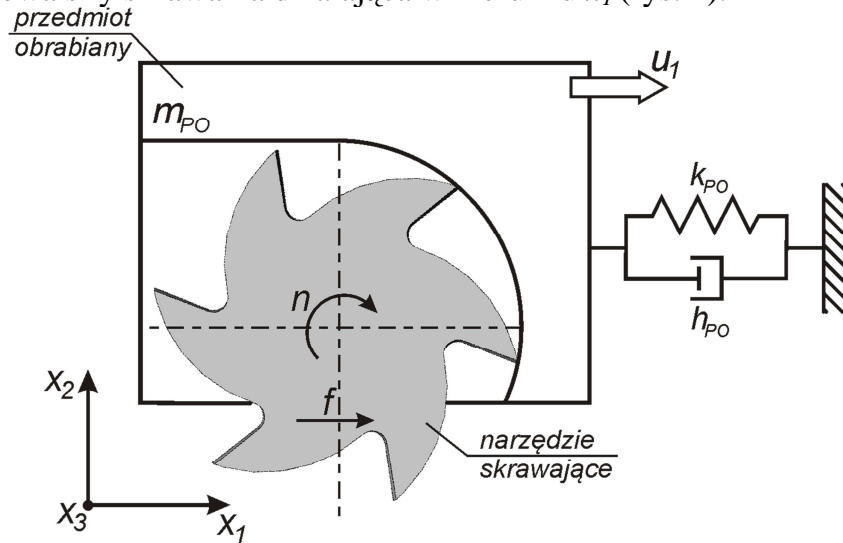
Macierz funkcji przejścia układu MDS w przypadku układu o jednym stopniu swobody opisuje pojedyncze wyrażenie:

$$W_{MDS}(s) = \frac{u_1(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{m_{PO}s^2 + h_{PO}s + k_{PO}} \quad (1)$$

gdzie:

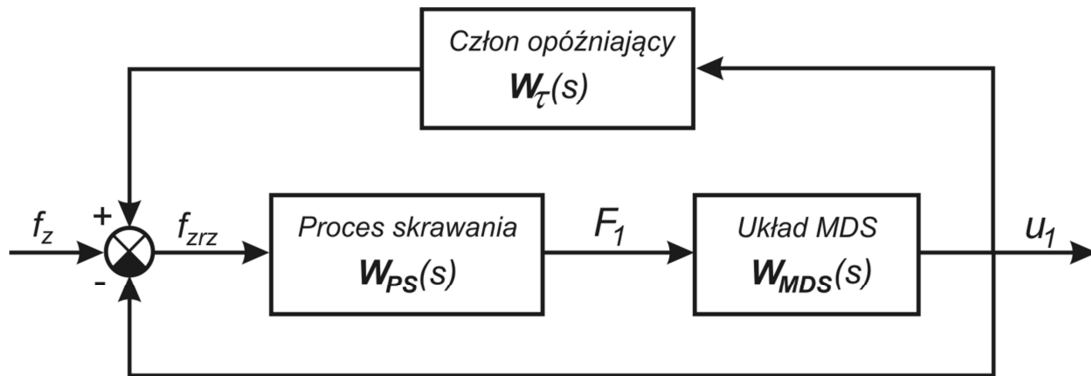
- $m_{PO}$ ,  $h_{PO}$ ,  $k_{PO}$  – odpowiednio: masa, współczynnik tłumienia i współczynnik sztywności przedmiotu obrabianego (rys. 1),
- $u_1$  – przemieszczenie przedmiotu obrabianego (rys. 1),

$F_1$  – składowa siły skrawania działająca w kierunku  $x_1$  (rys. 4).



Rys. 1. Model fizyczny (o jednym stopniu swobody) podatnego przedmiotu obrabianego  
 Fig. 1. Physical (one degree of freedom) model of a flexible workpiece

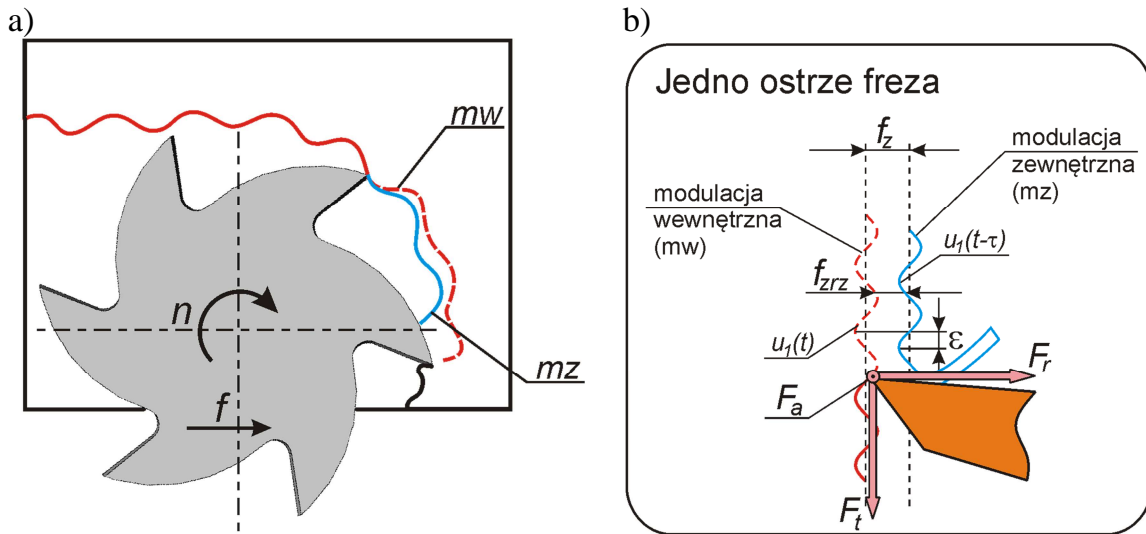
Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy dynamicznego układu O-PS przy frezowaniu frezem walcowo-czołowym, uwzględniający obróbkę po śladzie [5]. Schemat obróbki po śladzie przedstawiony na rysunku 3 objaśnia powstawanie zmian wartości chwilowego posuwu na ostrze  $f_{zrz}$ .



Rys. 2. Schemat blokowy dynamicznego układu O-PS przy frezowaniu po śladzie  
 Fig. 2. Block diagram of the O-PS dynamic system for milling with chatter vibration

Sygnal wejściowy członu PS, czyli rzeczywisty chwilowy posuw na ostrze, wyraża się zależnością (zob. rys. 3b):

$$f_{zrz}(t) = f_z - u_1(t) - u_1(t - \tau) \tag{2}$$



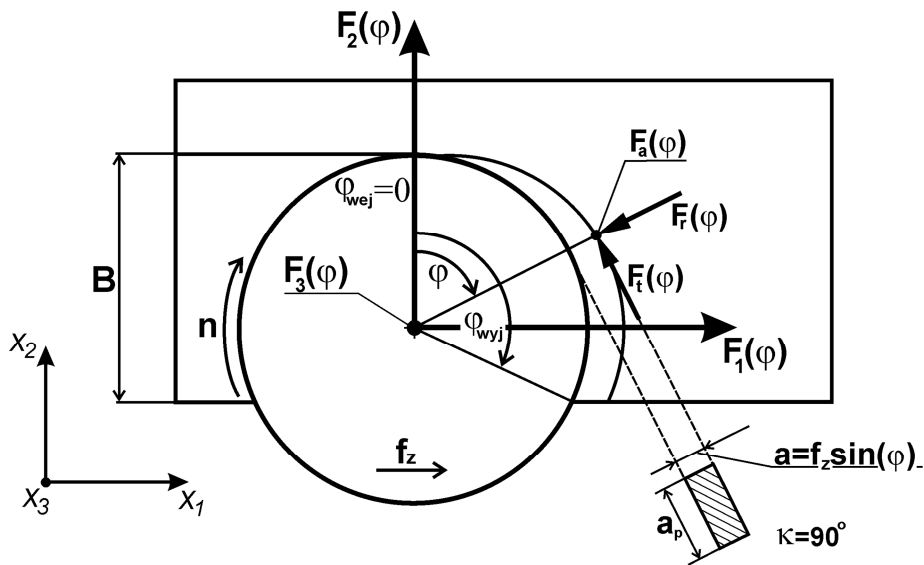
Rys. 3. Schemat obróbki po śladzie podczas frezowania  
 a) tory ostrzy narzędzia podczas obróbki, b) zmiany rzeczywistego posuwu na przykładzie pracy jednego ostrza  
 Fig. 3. Schematic formation of chatter vibration during milling  
 a) paths of cutting edges in milling, b) changes of instantaneous feed of an individual insert of the tool

przy czym opóźnienie wynosi

$$\tau = \frac{60}{zn} \tag{3}$$

gdzie:

$n$  – prędkość obrotowa frezu w obr/min,  
 $z$  – liczba ostrzy frezu.



Rys. 4. Schemat sił działających na przedmiot obrabiany przy obróbce frezem walcowo-czołowym  
 Fig. 4. Diagram of the force action on the workpiece during milling

Własności dynamiczne członu PS opisuje wyrażenie:

$$W_{PS}(s) = \frac{F_I(s)}{f_{zrz}(s)} \quad (4)$$

gdzie:

$F_I(s)$  – składowa siły skrawania w postaci operatorowej,  
 $f_{zrz}(s)$  – rzeczywisty posuw na ostrze w postaci operatorowej.

Schemat sił działających na przedmiot obrabiany przedstawiono na rysunku 4. Z rysunku tego wynika, że składowa posuwowa siły skrawania  $F_I$  opisana jest następującą zależnością:

$$F_I = -F_t \cos(\varphi) - F_r \sin(\varphi) \quad (5)$$

przy czym składowe siły skrawania działającej na jedno ostrze zdefiniowane są następująco:

$$F_t = K_{tc} A(\varphi) \quad (6)$$

$$F_r = K_{rc} A(\varphi) \quad (7)$$

Pole przekroju  $A(\varphi)$  warstwy skrawanej przez pojedyncze ostrze wyznaczyć można z zależności:

$$A(\varphi) = ab = a_p f_{zrz} \sin(\varphi) \quad (8)$$

gdzie:

$F_t, F_r, F_a$  – składowe siły skrawania działającej na jedno ostrze frezu (odpowiednio: siła styczna, promieniowa i osiowa),  
 $K_{tc}, K_{rc}$  – współczynniki oporu właściwego skrawania odpowiednio: dla stycznej i promieniowej składowej siły skrawania,  
 $a_p$  – głębokość skrawania,  
 $f_z$  – posuwu na ostrze,  
 $a$  – grubość warstwy skrawanej,  
 $b$  – szerokość warstwy skrawanej (dla  $\kappa = 90^\circ$   $b = a_p$ ),  
 $B$  – szerokość powierzchni obrabianej,  
 $\varphi$  – chwilowy kąt położenia ostrza,  
 $\varphi_{wej}$  – kąt wejścia narzędzia w materiał,  
 $\varphi_{wyj}$  – kąt wyjścia narzędzia z materiału,  
 $\Psi = \varphi_{wyj} - \varphi_{wej}$  – kąt pracy frezu.

Podstawiając wzory (5)÷(8) do (4) otrzymuje się:

$$\mathbf{W}_{PS} = a_p \mathbf{K} \mathbf{C}(\varphi) \quad (9)$$

przy czym

$$\mathbf{K} = [K_{tc} \quad K_{rc}] \quad (10)$$

$$\mathbf{C}(\varphi) = \text{col} \left\{ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \quad -\sin^2(\varphi) \right\} \quad (11)$$

Funkcja przejścia członu PS opisana zależnością (9) zależy od kierunku siły skrawania wyrażonego za pomocą kąta  $\varphi$  określającego położenie ostrzy frezu względem przedmiotu obrabianego. Kąt ten jest zmienny w czasie i przyjmuje wartości z przedziału  $0 \leq \varphi \leq \Psi$ . Zależność (9) jest funkcją nieliniową, którą można zlinearyzować dokonując uśrednienia zależności (11):

$$\mathbf{C}_{srik} = \frac{1}{\Psi} \int_0^{\Psi} \mathbf{C}_{ik}(\varphi) d\varphi \quad (12)$$

W przypadku równoczesnego skrawania większą liczbą ostrzy, do wzoru (9) można podstawić sumaryczne średnie [5]:

$$\mathbf{C}_{srik} = \sum_{l=1}^{z_c} \mathbf{C}_{srik l} \quad (13)$$

gdzie:

$i = 1, 2$  oraz  $k = 1$  – są odpowiednio liczbą wierszy oraz kolumn macierzy  $\mathbf{C}(\varphi)$ ,  
 $l$  – numer pracującego ostrza.

Dla zamkniętego dynamicznego układu O-PS, którego schemat pokazano na rysunku 2, operatorową funkcję przejścia opisuje zależność:

$$\mathbf{W}_z^{\tau}(s) = \frac{\mathbf{W}_{MDS}(s) \mathbf{W}_{PS}(s)}{1 + \mathbf{W}_{MDS}(s) \mathbf{W}_{PS}(s) (1 - \mathbf{W}_{\tau}(s))} \quad (14)$$

Funkcja przejścia układu otwartego opisana jest wzorem:

$$\mathbf{W}_o^{\tau}(s) = \mathbf{W}_{MDS}(s) \mathbf{W}_{PS}(s) (1 - \mathbf{W}_{\tau}(s)) = \mathbf{W}_{o1}^{\tau}(s) - \mathbf{W}_{o2}^{\tau}(s) \quad (15)$$

Funkcję przejścia członu opóźniającego przedstawia zależność:

$$\mathbf{W}_{\tau}(s) = e^{-s\tau} \quad (16)$$

Uwzględniając w (15) zależności (1), (9) oraz (16), otrzymuje się:

$$W_0^\tau(s) = \frac{a_p \mathbf{KC}_{sr}}{m_{PO}s^2 + h_{PO}s + k_{PO}} - \frac{a_p \mathbf{KC}_{sr} e^{-s\tau}}{m_{PO}s^2 + h_{PO}s + k_{PO}} \quad (17)$$

Podstawiając do (17)  $s=j\omega$ , uzyskuje się częstotliwościową funkcję przejścia układu otwartego:

$$\begin{aligned} W_0^\tau(j\omega) &= W_{01}^\tau(j\omega) - W_{02}^\tau(j\omega) = \\ &= \frac{a_p \mathbf{KC}_{sr} \left[ (k_{PO} - m_{PO}\omega^2) - j\omega h_{PO} \right]}{(k_{PO} - m_{PO}\omega^2)^2 + h^2\omega^2} - \frac{a_p \mathbf{KC}_{sr} \left[ (k_{PO} - m_{PO}\omega^2) - j\omega h_{PO} \right] e^{-j\omega\tau}}{(k_{PO} - m_{PO}\omega^2)^2 + h^2\omega^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Zgodnie z kryterium Nyquista badany układ będzie stabilny wówczas, gdy charakterystyka  $W_0^\tau(j\omega)$  nie obejmuje na płaszczyźnie zespolonej punktu o współrzędnych  $(-1, j0)$ . Warunek ten spełniony będzie, gdy [5],[9]:

$$\operatorname{Re}[W_{01}^\tau(j\omega)] > -0,5 \quad (19)$$

Część rzeczywista funkcji przejścia  $W_{01}^\tau(j\omega)$  dla rozważanego przypadku ma postać:

$$\operatorname{Re}[W_{01}^\tau(j\omega)] = \frac{a_p \mathbf{KC}_{sr} (k_{PO} - m_{PO}\omega^2)}{(k_{PO} - m_{PO}\omega^2)^2 + h^2\omega^2} \quad (20)$$

Układ osiągnie granicę wibrostabilności w przypadku, gdy część rzeczywista funkcji przejścia  $W_{01}^\tau(j\omega)$  równa będzie 0,5.

Warunek ten pozwala wyznaczyć zależność opisującą graniczną głębokość frezowania  $a_{pgr}$  w funkcji parametrów układu. Ma ona postać:

$$a_{pgr} = \frac{-\left[ (k_{PO} - m_{PO}\omega^2)^2 + h^2\omega^2 \right]}{2\mathbf{KC}_{sr} (k_{PO} - m_{PO}\omega^2)} = \frac{-1}{2\mathbf{KC}_{sr} \operatorname{Re}[W_{MDS}(j\omega)]} \quad (21)$$

Jeżeli podczas obróbki głębokość skrawania będzie mniejsza lub równa  $a_{pgr}$ , wówczas zapewniona jest obróbka stabilna niezależnie od wartości prędkości obrotowej, która zasadniczo wpływa na fazę sygnału opóźnionego.

Aby wyznaczyć graniczną głębokości skrawania, a tym samym krzywą stabilności układu, należy eksperymentalnie określić funkcję przejścia  $W_{MDS}(j\omega)$  oraz zidentyfikować model procesu skrawania, tj. współczynnik  $\mathbf{K}$  oporu skrawania.

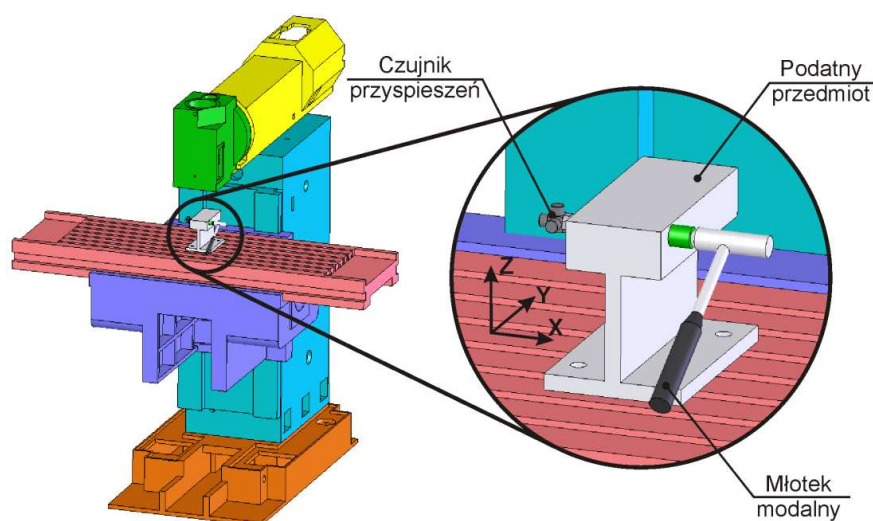
### 3. WŁASNOŚCI DYNAMICZNE OBRABIARKI

Układy korpusowe obrabiarki powinny zapewniać wymaganą sztywność dynamiczną w całej jej przestrzeni roboczej. Jednak duży wpływ na własności dynamiczne układu MDS obrabiarki może mieć przedmiot obrabiany lub narzędzie. W przypadku, gdy któreś z nich ma dużą podatność, właściwości dynamiczne obrabiarki, ujęte w funkcji przejścia, zdominowane są przez właściwości samego przedmiotu lub narzędzia i opisane są przez jego przemieszczenia pod wpływem określonego wymuszenia siłowego. Funkcję  $W_{MDS}(j\omega)$  wyznacza się eksperymentalnie, np. przez przeprowadzenie testu impulsowego z użyciem młotka modalnego, który służy do wymuszenia drgań swobodnych podatnego przedmiotu lub końcówki podatnego narzędzia.

W przeprowadzonych badaniach przyjęto, że silnie podatnym elementem będzie przedmiot obrabiany. Na potrzeby wyznaczania krzywych workowych, przeprowadzono impulsowe badania przedmiotu obrabianego stosując młotek z czujnikiem siły i trójskładowy czujnik przyspieszeń przytwierdzony do podatnego przedmiotu. Na rysunku 5 pokazano schematycznie sposób realizacji tych badań.

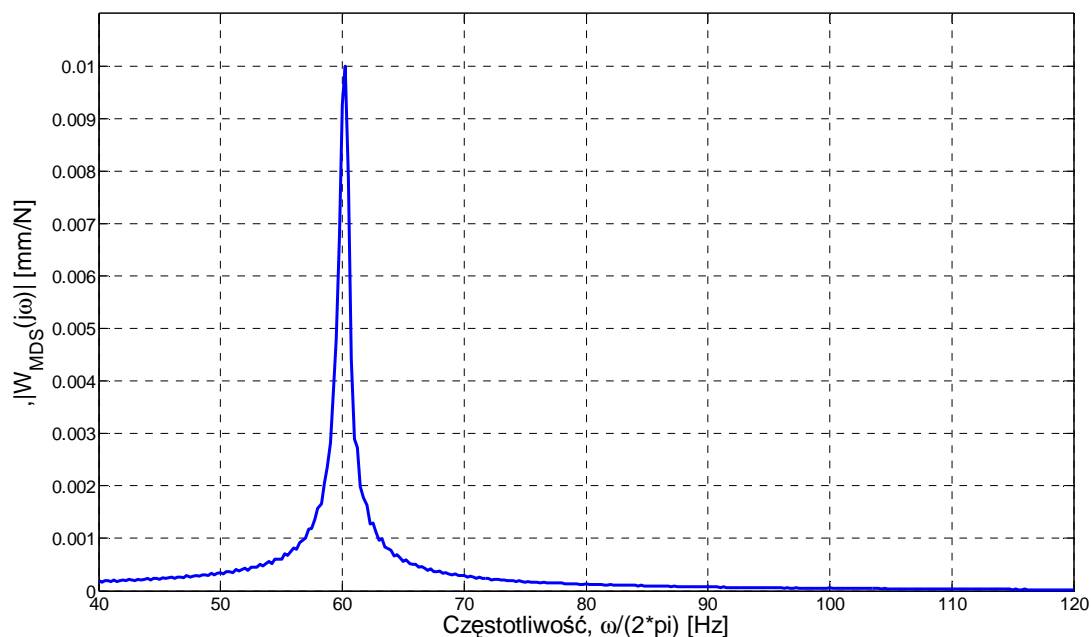
Na rysunku 6 pokazano moduł uzyskanej charakterystyki funkcji przejścia, jaką zarejestrowano na kierunku X, przy wymuszeniu impulsem siły przyłożonej w tym kierunku.

Przeprowadzone badania wykazały, że w kierunku osi X występuje jeden dominujący rezonans, przy częstotliwości 60,1 Hz z tłumieniem modalnym 0,21%. W innych kierunkach i przy innych częstotliwościach poziom drgań przedmiotu obrabianego był znacznie mniejszy. Jest to zgodne z przyjętymi założeniem, że przedmiot będzie miał zwiększoną podatność w jednym tylko kierunku i potwierdza przypuszczenie o niewielkim wpływie dynamiki obrabiarki. Do dalszej analizy, jako funkcję przejścia  $W_{MDS}(j\omega)$  układu masowo sprężystego obrabiarki, przyjęto zatem charakterystykę częstotliwościową przedmiotu w kierunku X.



Rys. 5. Schemat wyznaczania częstotliwościowej funkcji przejścia  
Fig. 5. Set-up for determination of FRFs of the workpiece





Rys. 6. Moduł częstotliwościowej funkcji przejścia podatnego przedmiotu obrabianego  
Fig. 6. FRF's module measured on flexible workpiece

#### 4. LINIOWY MODEL PROCESU SKRAWANIA

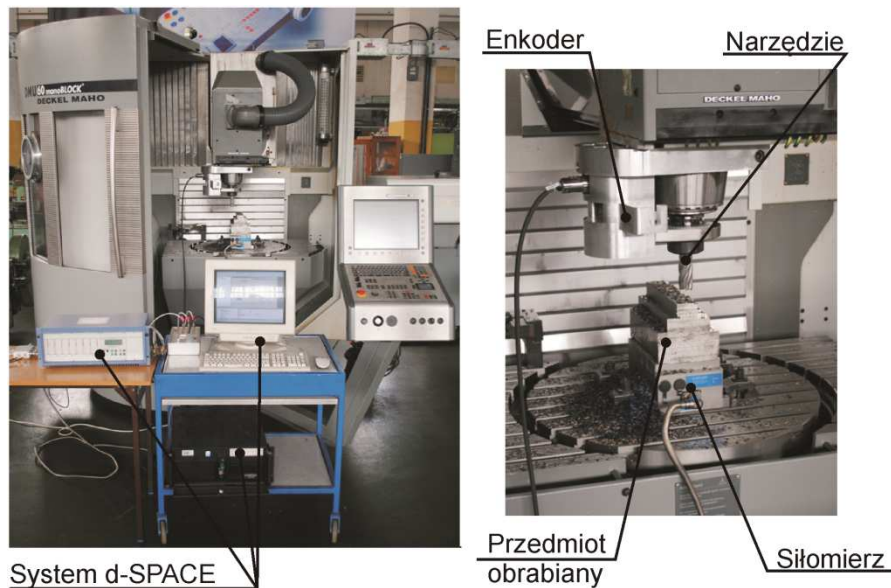
Identyfikację modelu procesu skrawania przeprowadzono dla frezu trzpieniowego walcowo-czołowego DIN 845-B K-N HSS (rys.7).



Rys. 7. Identyfikowane narzędzie, frez trzpieniowy walcowo-czołowy DIN 845-B K-N HSS  
Fig. 7. The identified tool, end mill DIN 845-B K-N HSS

Doświadczenia przeprowadzono na stanowisku badawczym zbudowanym na centrum frezarskim DMU 60 monoblock, gdzie rejestrowano siły skrawania podczas frezowania przeciwbieżnego. Stanowisko to składa się z 6-składowego siłomierza typu 9265B firmy Kistler, na którym umieszczono przedmiot obrabiany. Przedmiot obrabiany wykonano w postaci prostopadłościenną kostki ze stali 45. Siłomierz wraz z przedmiotem obrabianym zamontowano na stole obrabiarki. Na stanowisku pomiarowym dokonano także pomiarów prędkości obrotowej wrzeciona za pomocą enkodera. Enkoder umieszczono w specjalnej obudowie i połączono z wrzecionem za pomocą przekładni zębatej. Siły skrawania rejestrowano wykorzystując system d-SPACE. Na rysunku 8 przedstawiono fotografię

stanowiska pomiarowego przy centrum obróbkowym DMU 60, które wykorzystano do badań identyfikacyjnych sił skrawania.



Rys. 8. Fotografia stanowiska pomiarowego sił skrawania na centrum obróbkowym DMU 60 monoblock  
Fig. 8. Photograph of the set-up for measuring cutting forces on DMU 60 monoblock machining center

W analizach posłużono się linowym mechanistycznym modelem sił skrawania, przedstawionym w pracy [1]. Na rysunku 4 pokazano układ sił tego modelu dla frezowania walcowo-czołowego z uwzględnieniem parametrów technologicznych i geometrycznych. Równania opisujące siły skrawania mają postać liniową a poszczególne składowe siły skrawania ( $F_t$ ,  $F_r$ ,  $F_a$ ) opisane są zależnościami:

$$\begin{aligned} F_t(\varphi) &= K_{tc}A(\varphi) + K_{te}b \\ F_r(\varphi) &= K_{rc}A(\varphi) + K_{re}b \\ F_a(\varphi) &= K_{ac}A(\varphi) + K_{ae}b \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$K_{tc}$ ,  $K_{rc}$ ,  $K_{ac}$  – współczynniki siły właściwej skrawania, odpowiednio: na kierunku stycznym, promieniowym oraz osiowym [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ],  
 $K_{te}$ ,  $K_{re}$ ,  $K_{ae}$  – współczynniki jednostkowego obciążenia czynnej krawędzi skrawającej [ $\text{N}/\text{mm}$ ], [1].

Składowe siły skrawania w układzie narzędzia rys. 4): posuwową ( $F_1$ ), poprzeczną ( $F_2$ ) oraz osiową ( $F_3$ ) można wyznaczyć z zależności geometrycznych, rozpatrując chwilowe położenie ostrza skrawającego.

$$F_N = {}^N_O \mathbf{O} F_O \quad (23)$$

gdzie:

- $F_N$  – macierz chwilowej siły skrawania w układzie narzędzia ( $F_N = col\{F_1, F_2, F_3\}$ ),  
 $F_O$  – macierz chwilowej siły skrawania w układzie ostrza, działającej na ostrze frezu  
 $F_O = col\{F_t, F_r, F_a\}$ ,  
 ${}^N_O\Theta$  – macierz transformacji sił skrawania z układu ostrza (O) do układu narzędzia (N).

przy czym

$${}^N_O\Theta = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poszczególne składowe siły mają wartości różne od zera wówczas, gdy ostrze znajduje się w materiale, czyli spełniony jest warunek:  $\varphi_{wej} < \varphi < \varphi_{wyj}$ . Istotne jest również uwzględnienie w opisie procesu skrawania faktu, że w przypadku ogólnym jednocześnie w materiale może pracować więcej niż jedno ostrze. Wyrażenia na sumaryczną wartość składowych sił skrawania w układzie narzędzia można zapisać następująco:

$$F_1 = \sum_{i=1}^n F_{1i}(\varphi_i), F_2 = \sum_{i=1}^n F_{2i}(\varphi_i), F_3 = \sum_{i=1}^n F_{3i}(\varphi_i) \quad (24)$$

przy czym  $\varphi_i = \varphi + \rho_i$

gdzie:  $i$  – numer pracującego ostrza,

$n$  – liczba ostrzy,

$\varphi_i$  – chwilowy kąt położenia  $i$ -tego ostrza,

$\rho_i$  – podziałka katowa między ostrzami narzędzia.

## 5. IDENTYFIKACJI WSPÓŁCZYNNIKÓW SKRAWANIA

Współczynniki skrawania wyznacza się doświadczalnie wykonując próbę frezowania dla określonych parametrów technologicznych i geometrycznych. W czasie próby rejestruje się wartości siły skrawania  $F_N$ .

W pracy przedstawiono metodę identyfikacji współczynników modelu sił skrawania opisanego w dziedzinie częstotliwości [4] i wykorzystano przebiegi sił skrawania do estymacji tych współczynników.

W mechanistycznym modelu liniowym poszczególne składowe siły skrawania opisano w układzie ostrza (22), jak pokazano na rysunku 4. Istnieje konieczność transformacji sił z układu ostrza do układu narzędzia, w celu porównania modelu z zarejestrowanymi przebiegami sił skrawania podczas badań pracą. Transformacji tej dokonuje się przez zastosowanie równania (23) z uwzględnieniem zależności (8) i (22):

$$F_N(\varphi) = W(\varphi) \cdot K \quad (25)$$

przy czym

$$\mathbf{W}(\phi) = \begin{bmatrix} W_{11}(\phi) & W_{12}(\phi) & W_{13}(\phi) & W_{14}(\phi) & 0 & 0 \\ W_{21}(\phi) & W_{22}(\phi) & W_{23}(\phi) & W_{24}(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{35}(\phi) & W_{36}(\phi) \end{bmatrix} \quad (26)$$

lub po uwzględnieniu zależności (8)

$$\mathbf{W}(\phi) = \begin{bmatrix} -a_p f_z s(\phi) c(\phi) H(\phi) & -b \cdot c(\phi) H(\phi) & -a_p f_z s(\phi) s(\phi) H(\phi) & -b \cdot s(\phi) H(\phi) & 0 & 0 \\ a_p f_z s(\phi) s(\phi) H(\phi) & b \cdot s(\phi) H(\phi) & a_p f_z s(\phi) c(\phi) H(\phi) & b \cdot c(\phi) H(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_p f_z s(\phi) H(\phi) & b \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie:

$$s(\phi) = \sin(\phi), \quad c(\phi) = \cos(\phi),$$

$$\mathbf{K} = \text{col}\{K_{tc}, K_{te}, K_{rc}, K_{re}, K_{ac}, K_{ae}\},$$

$H(\phi)$  – funkcja skokowa Heaviside'a, określająca które ostrza spełniają warunek  $\phi_{wej} < \phi < \phi_{wyj}$  (warunek ten opisuje, które ostrza pracują w materiale),

Po transformacji Fouriera równanie (25) przyjmuje postać:

$$F_N(\omega) = \mathbf{W}(\omega) \cdot \mathbf{K} \quad (28)$$

Wartości współczynników oporu właściwego wyznacza się z pomocą pseudoodwrotnej macierzy  $\mathbf{W}(\omega)$

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}(\omega)^+ \cdot F_N(\omega) \quad (29)$$

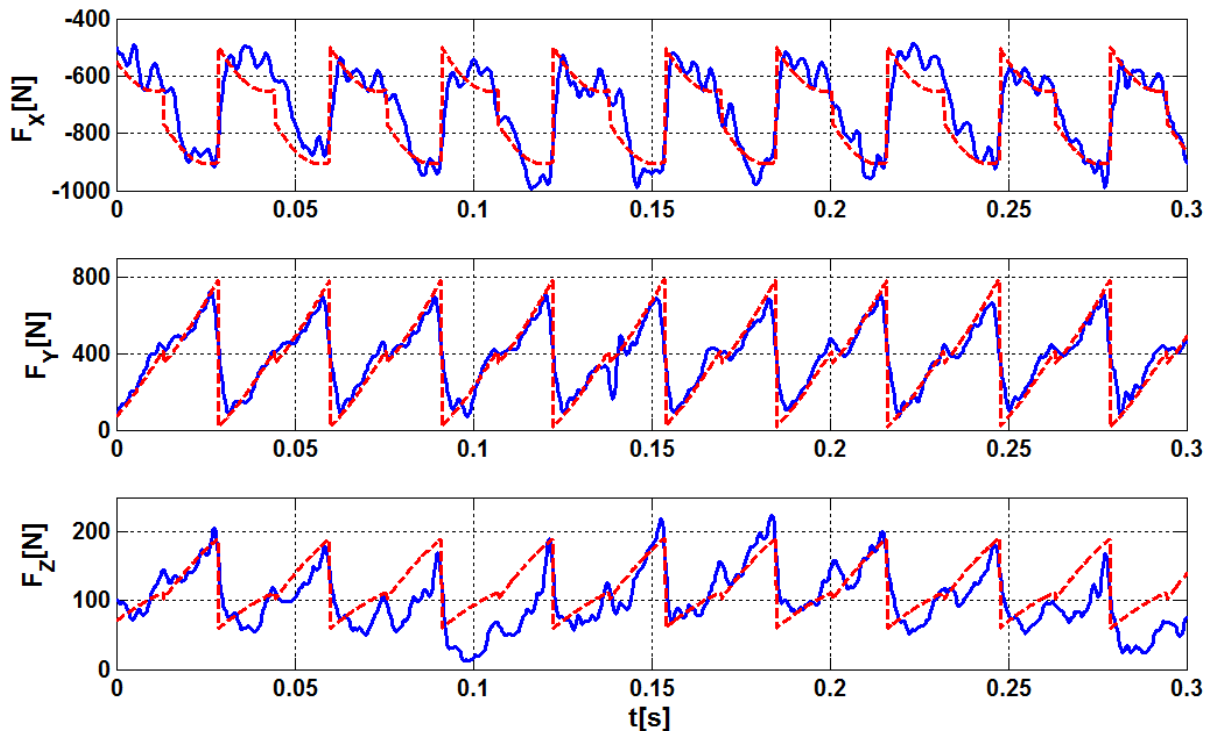
Identyfikację współczynników oporu skrawania przeprowadza się z wykorzystaniem równań opisujących model sił skrawania w dziedzinie częstotliwości, używając szybkiej transformaty Fouriera (FFT). W równaniu (29) macierz kolumnowa  $\mathbf{K}$  zawiera sześć współczynników materiałowych dla linowego modelu sił skrawania. W macierzy  $\mathbf{W}$  zapisano parametry technologiczne i geometryczne modelu skrawania oraz związki występujące pomiędzy tymi parametrami. Opisuje ona również transformację sił skrawania z układu ostrza do układu narzędzia. Wartości sił skrawania zapisane są w macierzy kolumnowej  $F_N$ .

Wyznaczenie wartości współczynników materiałowych przeprowadzono na podstawie równania (29). W obliczeniach uwzględniono przebiegi sił rzeczywistych zarejestrowanych dla stałej wartości głębokości skrawania i prędkości obrotowej, lecz dla czterech różnych wartości posuwów.

Na podstawie wartości składowej stałej (częstotliwość  $\omega_0 = 0$ ) oraz wartości części rzeczywistej i urojonej dla dwóch pierwszych harmonicznych (częstotliwości  $\omega_I$  i  $\omega_{II}$ ), zbudowano układ równań w następującej postaci:

$$\begin{matrix} K_{tc} \\ K_{te} \\ K_{rc} \\ K_{re} \\ K_{ac} \\ K_{ae} \end{matrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(\omega_0) & W_{12}(\omega_0) & W_{13}(\omega_0) & W_{14}(\omega_0) & 0 & 0 \\ W_{21}(\omega_0) & W_{22}(\omega_0) & W_{23}(\omega_0) & W_{24}(\omega_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{34}(\omega_0) & W_{35}(\omega_0) \\ \text{Re}[W_{11}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{12}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{13}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{14}(\omega_t)] & 0 & 0 \\ \text{Re}[W_{21}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{22}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{23}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{24}(\omega_t)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Re}[W_{34}(\omega_t)] & \text{Re}[W_{35}(\omega_t)] \\ \text{Im}[W_{11}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{12}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{13}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{14}(\omega_t)] & 0 & 0 \\ \text{Im}[W_{21}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{22}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{23}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{23}(\omega_t)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Im}[W_{34}(\omega_t)] & \text{Im}[W_{35}(\omega_t)] \\ \text{Re}[W_{11}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{12}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{13}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{14}(\omega_{II})] & 0 & 0 \\ \text{Re}[W_{21}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{22}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{23}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{24}(\omega_{II})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Re}[W_{34}(\omega_{II})] & \text{Re}[W_{35}(\omega_{II})] \\ \text{Im}[W_{11}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{12}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{13}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{14}(\omega_{II})] & 0 & 0 \\ \text{Im}[W_{21}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{22}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{23}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{23}(\omega_{II})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Im}[W_{34}(\omega_{II})] & \text{Im}[W_{35}(\omega_{II})] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x(\omega_0) \\ F_y(\omega_0) \\ F_z(\omega_0) \\ \text{Re}[F_x(\omega_t)] \\ \text{Re}[F_y(\omega_t)] \\ \text{Re}[F_z(\omega_t)] \\ \text{Im}[F_x(\omega_t)] \\ \text{Im}[F_y(\omega_t)] \\ \text{Im}[F_z(\omega_t)] \\ \text{Re}[F_x(\omega_{II})] \\ \text{Re}[F_y(\omega_{II})] \\ \text{Re}[F_z(\omega_{II})] \\ \text{Im}[F_x(\omega_{II})] \\ \text{Im}[F_y(\omega_{II})] \\ \text{Im}[F_z(\omega_{II})] \end{bmatrix} \quad (30)$$

Rozwiązując układ równań (30) wyznaczono odpowiednie współczynniki dla liniowego modelu mechanicznego.



Rys. 9. Przebiegi rzeczywistych składowych sił skrawania ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ) dla narzędzia DIN 845 (linia ciągła) oraz przebiegi sił wyznaczonych dla modelu liniowego (linia przerywana), (parametry obróbki:  $a_p = 3$  mm;  $n = 256$  obr/min;  $f_z = 0,12$  mm/ostrze;  $B = 12,5$  mm;  $z = 6$ ;  $v = 20$  m/min)

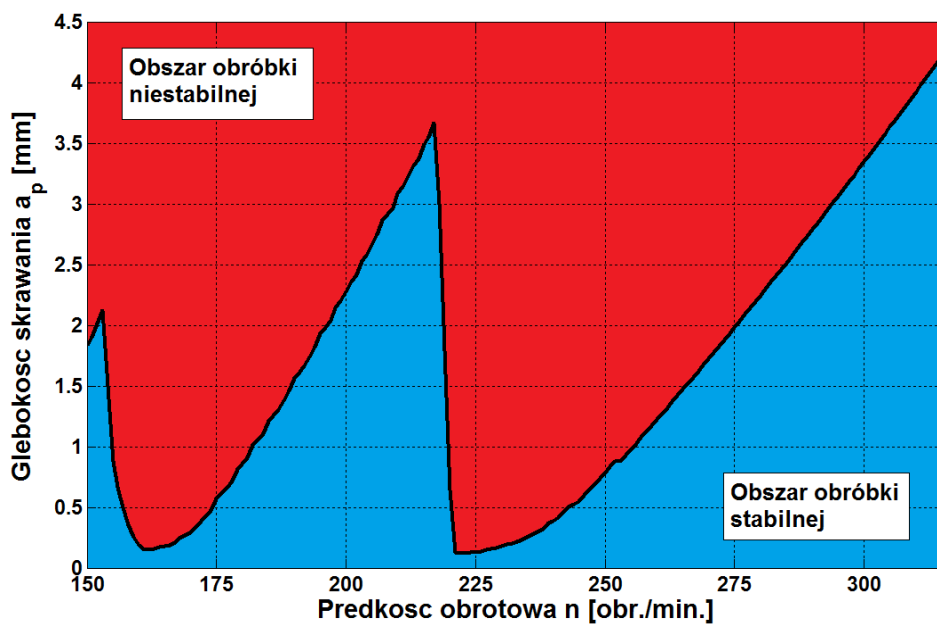
Fig. 9. Graphs of real cutting forces ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ) for tool DIN 845 (solid line) and calculated cutting forces from linear model (dashed line); machining parameters:  $a_p = 3$  mm;  $n = 256$  rpm;  $f_z = 0.12$  mm/insert;  $B = 12,5$  mm;  $z = 6$ ;  $v = 20$  m/min

Na rysunku 9 przedstawiono wykresy składowych sił skrawania, zarejestrowanych w czasie skrawania frezem DIN 845 oraz przebiegi tych sił wyznaczone za pomocą modelu mechanistycznego. Wartości estymowanych współczynników oporu skrawania modelu liniowego wynoszą:  $K_{tc} = 1801,7$ ,  $K_{te} = 40,52$ ,  $K_{rc} = 816,38$ ,  $K_{re} = 24,83$ ,  $K_{ac} = 395,72$ ,  $K_{ae} = 3,72$ .

## 6. KRZYWE WORKOWE

Na podstawie zależności określającej graniczną głębokość skrawania  $a_{pgr}$  (21) oraz zmierzoną doświadczalnie funkcję przejścia  $W_{MDS}(j\omega)$  układu MDS obrabiarki w kierunku posuwu i zidentyfikowane współczynniki  $K$  oporu skrawania (10), dla frezów DIN 845-B K-N, wyznaczono krzywe workowe rozpatrywanego układu (rys. 10).

Wyznaczona krzywa granicy stabilności pozwala na określenie stabilnych parametrów pracy i uniknięcie niebezpiecznych drgań samowzbudnych.



Rys. 10. Wykres stabilności dla stolika przy obróbce frezem DIN 845-B K-N

Fig. 10. Stability chart for table when machining of mill DIN 845-B K-N

## 7. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA4

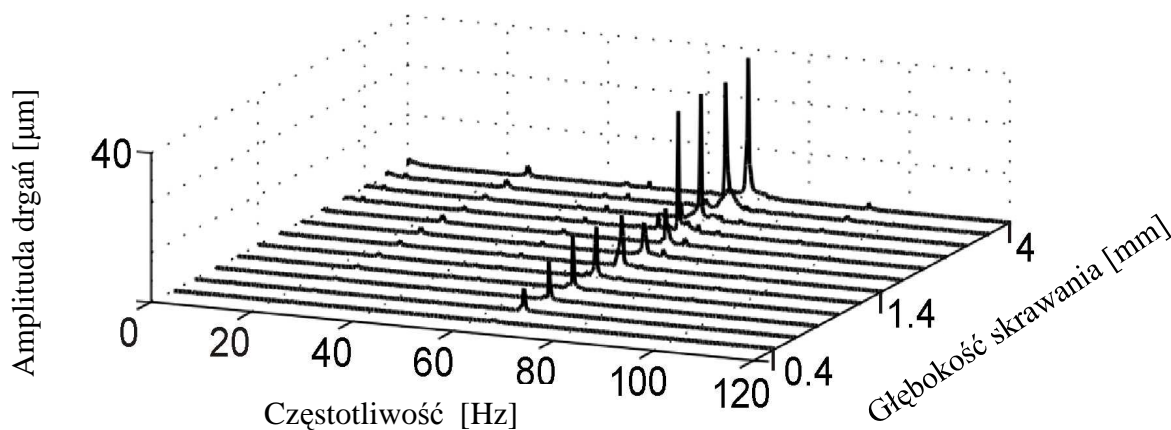
Doświadczalną weryfikację wyznaczonych krzywych workowych (rys.10) przeprowadzono poprzez badania pracą na obrabiarce sterowanej numerycznie JAFO FYN-50. Próby skrawania przeprowadzono dla nominalnych parametrów obróbki bez konieczności stosowania chłodzenia. Parametry technologiczne zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry obróbki dla frezu DIN 845-B K-N  
 Table 1. Machining parameters for mill DIN 845-B K-N

Prędkość obrotowa $n$ [obr/min]	Posuw realizowany $f_i$ [mm/min]	Głębokość skrawania $a_p$ [mm]
190	68	0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,3; 2,8; 3,5; 4,0
	94	
240	84	
	118	
300	106	
	150	

Parametry obróbki zawierają się w zakresie prędkości skrawania  $v_c = 20-30$  m/min przy dwu prędkościach posuwu na ostrze  $f_z = 0,05$  i  $0,07$  mm. W czasie prób skrawania rejestrowano przemieszczenia przedmiotu obrabianego z wykorzystaniem czujnika optycznego Philtec RC-63.

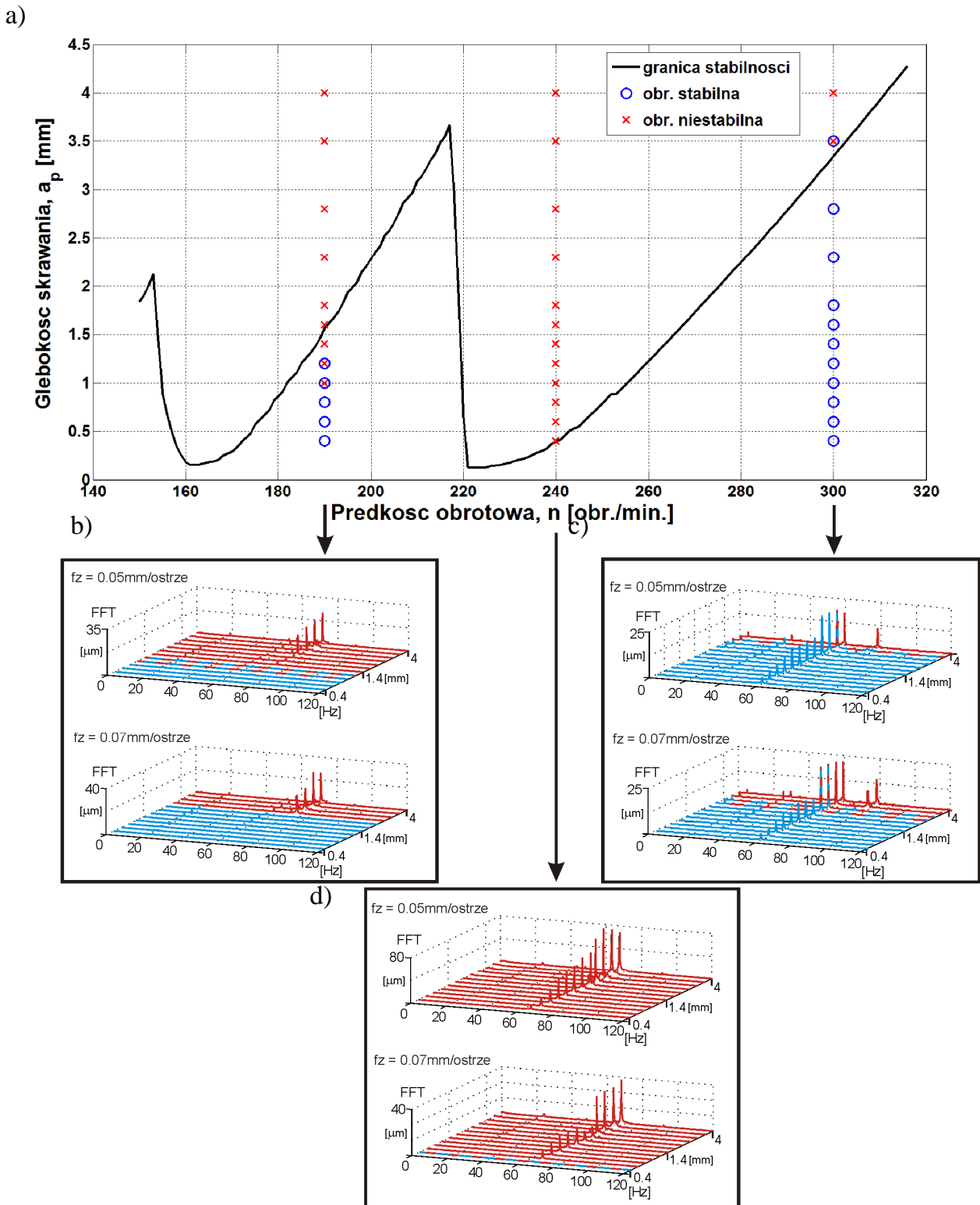
Zmierzone sygnały przemieszczeń przy frezowaniu frezem DIN-845 z różnymi głębokościami skrawania poddano transformacji Fouriera. Przykładowy wykresy widm sygnału przemieszczenia przedstawiono na rys. 11.



Rys. 11. Widmo sygnału przemieszczenia (amplituda drgań [ $\mu\text{m}$ ]) dla frezowania narzędziem DIN-845 (parametry obróbki:  $a_p$  – cały zakres (tabela 1),  $f_z = 0,07$  mm/ostrze,  $n = 240$  obr/min)

Fig. 11. Workpiece displacement spectra for cutting with end mill DIN-845 (vibration amplitude given in [ $\mu\text{m}$ ]); machining parameters:  $a_p$  – full range shown in table 1,  $f_z = 0,07$  mm/insert,  $n = 240$  rpm

Z powyższego wykresu widać, że dominująca składowa w widmie drgań ma częstotliwość 72 Hz. Częstotliwość ta jest związana z powstającymi w układzie drganiami samowzbudnymi. Wyznaczone charakterystyki widmowe przemieszczenia przedmiotu obrabianego posłużyły do zweryfikowania obszaru obróbki stabilnej i niestabilnej na wykresie granicznej głębokości skrawania. Na podstawie wykresów widm drgań przedmiotu obrabianego określono czy i przy jakiej głębokości skrawania nastąpiło pojawienie się częstotliwości związanej z drganiami samowzbudnymi.



Rys. 12. Wykres granicy stabilności dla przypadku frezowania frezem DIN-845 podatnego przedmiotu obrabianego (a). Widma sygnałów przemieszczeń dla poszczególnych prędkości obrotowych wrzeciona: b) 190 obr/min, c) 240 obr/min, d) 300 obr/min

Rys. 12. Graph of stability loop for flexible workpiece and end mill DIN 845 (a). Spectra of a displacement signal for individual spindle speeds: b) 190 rpm, c) 240 rpm, d) 300 rpm



Na rysunku 12, na tle wykresu granicy stanilności układu, niebieskimi kółkami oznaczono punkty opowiadające obróbce stanilnej, zaś czerwonymi krzyżykami obróbkę stanilną. Poszczególnym punktom przypisane są głębokości skrawania oraz widma drgań przedmiotu obrabianego, pokazane na wykresach poniżej.

Można stwierdzić dużą zgodność prognozowanej granicznej głębokości skrawania z wynikami weryfikacji doświadczalnej. Dla obróbki z parametrami odpowiadającymi obróbce stanilnej, w widmach przemieszczeń dominuje jeden prążek o częstotliwości odpowiadającej drganiom samowzbudnym. W przypadku frezowania stanilnego ujawniają się tylko częstotliwości drgań wymuszonych, wywołanych wcinaniem się ostrza frezu w materiał obrabiany.

## 8. PODSUMOWANIE

Przedstawiono zastosowanie metody „widmowej” do estymacji współczynników oporu skrawania dla modelu liniowego [1], opisującego frezowanie walcowo-czołowe. Identyfikację modelu przeprowadzono na podstawie sił skrawania uzyskanych podczas frezowania danym frezem. Obróbka frezowaniem charakteryzuje się m.in. cyklicznym wcinaniem się ostrzy w materiał i ich wychodzeniem z materiału. Powoduje to powstanie dodatkowych sił dynamicznych, co z jednej strony utrudnia proces identyfikacji, bo model dopasowuje się do rzeczywistych sił skrawania „obarczonych” wspomnianymi zjawiskami dynamicznymi a z drugiej strony, ułatwia go, gdyż nie musi się uwzględniać dynamiki układu. Prezentowana w tym artykule metoda „widmowa” identyfikacji modelu sił skrawania jest szybka – zarówno pod względem czasu realizacji eksperymentu, jak i analizy wyników. Może być ona również z powodzeniem zastosowana do modeli nieliniowych.

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2011 jako projekt badawczy NR03-0031-04.*

## LITERATURA

- [1] ALTINTAS Y., 2000, *Manufacturing automation*, Cambridge UK, Cambridge University Press.
- [2] DMOCHOWSKI J., 1983, *Podstawy obróbki skrawaniem*, PWN, Warszawa.
- [3] EHMANN K., KAPOOR S., DEVOR R., LAZOGLU I., 1997, *Machining process modeling: A review*. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 119/655-663.
- [4] JAYARAM S., KAPOOR S.G., DEVOR R.E., 2001, *Estimation of the specific cutting pressures for mechanistic cutting force models*, International Journal of Machine Tool and Manufacture, 41/265-281.
- [5] MARCHELEK K., 1991, *Dynamika obrabiarek*, WNT, Warszawa.
- [6] OLSZAK W., 2009, *Obróbka skrawaniem*, WNT, Warszawa.
- [7] PAJOR M. i inni, 2011, *Specjalne stanowisko badawcze do badania sił skrawania kształtowymi narzędziami obrotowymi*. Sprawozdanie końcowe z projektu rozwojowego MNiSW nr R03 008 03, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Szczecin.
- [8] TLUSTÝ J., POLÁČEK M., 1963, *The stability of machine tools against self-excited vibrations in machining*, International Research in Production Engineering, ASME, 465-474.
- [9] TOMKÓW J., 1997, *Wibrostanilność obrabiarek*, WNT, Warszawa.

**IDENTIFICATION OF CUTTING FORCE MODEL OF MULTI-POINT CUTTING TOOL FOR VIBROSTABILITY ANALYSIS**

The article presents methodology for the analytical prediction of stability limits in milling. In order to calculate stability lobes it is necessary to have information regarding the structural dynamics of the machine tool and of the cutting force model. The dynamics of the machine tool is represented in terms of Frequency Response Functions (FRFs). The cutting process is described by the mechanistic model that assumes proportionality of the cutting force to the chip cross-sectional area [1]. The paper presents the identification of cutting force coefficients determined from the model defined in the frequency domain [4]. The determined stability lobes are verified in experimental tests.