

## NAPRĘŻENIA SKURCZOWE W ZABYTKOWYCH MAŁOWIDŁACH

Jan KUBIK\*, Andrzej KUCHARCZYK\*\*

\*Politechnika Opolska, Katedra Fizyki Materiałów  
ul. Katowicka 48, 45-061 Opole, e-mail: [kubik@po.opole.pl](mailto:kubik@po.opole.pl)

\*\*Politechnika Opolska, Katedra Fizyki Materiałów  
ul. Katowicka 48, 45-061 Opole, e-mail: [andkuc@o2.pl](mailto:andkuc@o2.pl)

**Streszczenie:** W artykule zaprezentowano metodę wyznaczania naprężeń skurczowych w zabytkowych powłokach malarskich. Na podstawie tego modelu zostały wyznaczone mapy naprężeń skurczowych w funkcji podstawowych parametrów decydujących o trwałości wypraw malarskich.

**Słowa kluczowe:** Powłoki malarskie, naprężenia skurczowe

### 1. WPROWADZENIE

Obniżenie trwałości powłok malarskich oraz ich podłoży należy upatrywać głównie w oddziaływaniach atmosferycznych. Czynniki atmosferyczne, jako że występują powszechnie tj. wahania wilgotności i temperatury, promieniowanie słoneczne, wiatr stanowią największe zagrożenie.

W referacie wyznaczono naprężenia spowodowane cyklicznymi zmianami koncentracji wilgoci w trakcie suszenia, w przypowierzchniowych warstwach murów. W wyniku tego procesu dochodzi do skurczu a w konsekwencji do tworzenia się i zagęszczania rys, łuszczenia oraz odpadania fragmentów malowideł.

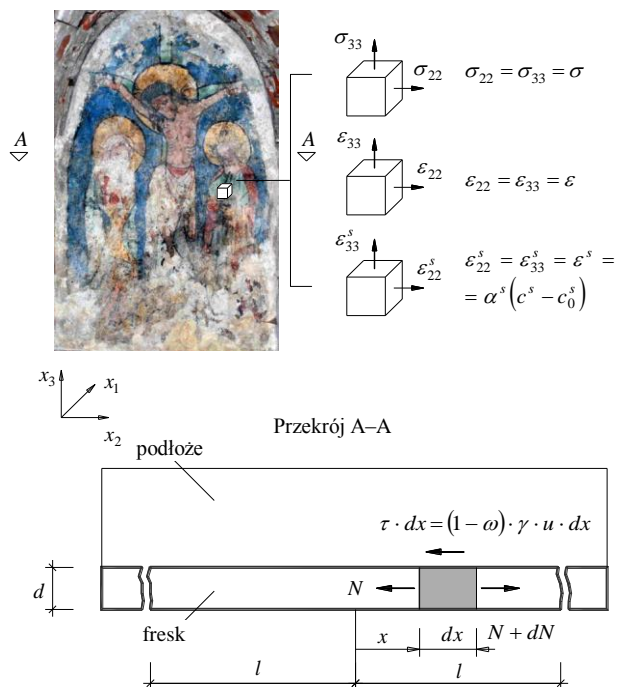
### 2. MODEL PROCESU

Model procesu obejmuje warstwę malowidła szczipionego z podłożem. W trakcie eksploatacji podłoże ulega zarysowaniu, co umożliwi powstanie sieci rys na malowidłach. W wyniku cyklicznych wahań wilgotności dochodzi do powstawania wewnętrznych stanów naprężeń skurczowych oraz do zagęszczania sieci rys. Proces ten powtarzany jest do momentu aż warstwa malowidła odpadnie.

Poniżej zostanie przedstawiony model określający naprężenia skurczowe w przypowierzchniowych warstwach malowideł. W rozważaniach przyjęto, iż w trakcie eks-

ploatacji wystąpią jedynie naprężenia ścinające oraz że w miejscu gdzie powstała rysa naprężenia są równe zero.

Stan naprężenia i odkształcenia w malowidle



Rys. 1. Model materiału.  
Fig. 1. The model of the material.

Naprężenia skurczowe w powłoce zostaną wyznaczone w oparciu o równania równowagi, fizyczne, geometryczne oraz warunki brzegowe. Równanie równowagi uzyskano po zrutowaniu wszystkich sił działających na powłokę malarską zgodnie z poniższym:

$$-N + N + dN - \tau \cdot dx_2 = 0 \quad (1)$$

Po wprowadzeniu wyrażenia określającego przyczepność powłoki do podłoża, uzyskano:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - (1 - \omega) \cdot \gamma \cdot u = 0. \quad (2)$$

Równanie geometryczne na odkształcenia w przypadku jednoosiowym posiada klasyczną formę:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3)$$

Równanie fizyczne na naprężenia oraz naprężenia normalne materiału powłoki mają postać

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^s) \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^s, \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (5)$$

W powyższych równaniach muszą być dodatkowo określone dystorsje. Równanie fizyczne określające skurcz w powłoce malarskiej można przedstawić w następującej formie

$$\varepsilon^s = \alpha^s (c^w - c_0^w). \quad (6)$$

Pochodna cząstkowa równania (2) wynosi

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - (1 - \omega) \cdot \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Wprowadzając do powyższej zależności równanie (3), następnie równanie (4) i (5) uzyskujemy

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - (1 - \omega) \cdot \frac{\gamma}{E \cdot F} \cdot N = (1 - \omega) \cdot \gamma \cdot \varepsilon^s. \quad (8)$$

Powyższe równanie to równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego, można je zapisać w postaci

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - k^2 \cdot N = p. \quad (9)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest wyrażenie

$$N(x) = C_1 \cdot \exp(-k \cdot x) + C_2 \cdot \exp(k \cdot x) - \frac{p}{k^2}. \quad (10)$$

Stałe całkowania zostaną wyznaczone z warunków brzegowych

$$N(x = -l) = 0, \quad N(x = l) = 0. \quad (11)$$

Ze względu na symetrię zadania  $C_1$  równa się  $C_2$ . Równanie określające siłę osiową w powłoce można zapisać w postaci

$$N(x) = 2C_1 \cdot \cosh(k \cdot x) - \frac{p}{k^2}. \quad (12)$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{p}{k^2} \cdot \frac{1}{2 \cosh(k \cdot l)},$$

$$k = \sqrt{(1 - \omega) \frac{\gamma}{E \cdot F}} = \sqrt{(1 - \omega) \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{1}{l}},$$

$$p = (1 - \omega) \cdot \gamma \cdot \varepsilon^s = (1 - \omega) \cdot \gamma \cdot \alpha^s (c^w - c_0^w).$$

Podstawiając stałe całkowania do powyższego wyrażenia otrzymujemy równanie określające siłę w powłoce

$$N(x) = E \cdot F \cdot \varepsilon^s \left\{ \frac{\cosh(k \cdot x)}{\cosh(k \cdot l)} - 1 \right\} = E \cdot F \cdot \varepsilon^s \Omega. \quad (13)$$

natomiast naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= E \cdot \alpha^s (c^w - c_0^w) \left\{ \frac{\cosh(k \cdot x)}{\cosh(k \cdot l)} - 1 \right\} = \\ &= E \cdot \alpha^s (c^w - c_0^w) \Omega \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie  $\Omega = \frac{\cosh(k \cdot x)}{\cosh(k \cdot l)} - 1$ .

### 3. NAPRĘŻENIA SKURCZOWE

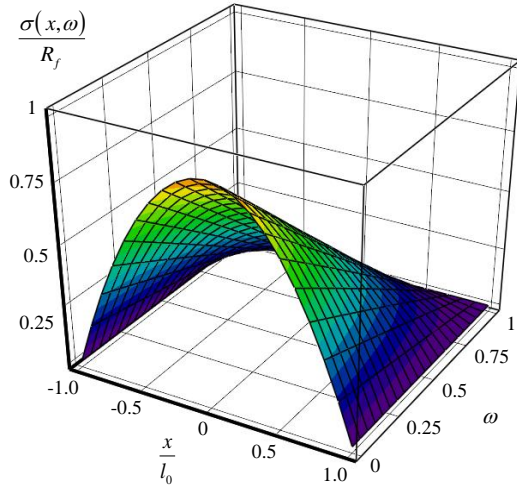
Naprężenia skurczowe w zabytkowych powłokach malarskich zostaną wyznaczone na podstawie równania 14. W pierwszej kolejności należy jednak wyznaczyć współczynniki materiałowe. Zostały określone na podstawie badań zawartych w [2]. Dla zaprawy wapiennej mamy:

- moduł sprężystości  $E=8400\text{MPa}$ ,
- wytrzymałość na rozciąganie  $R_f=0.2\text{MPa}$ ,
- współczynnik skurczu  $\alpha^s=0.0047$ .

Graniczna odległość między rysami  $l_0=0.1\text{m}$  została oszacowana na podstawie obserwacji zarysowanych malowideł. Współczynnik szepienia wyznaczono z warunku  $\sigma(x=0)=R_t$ , otrzymując:

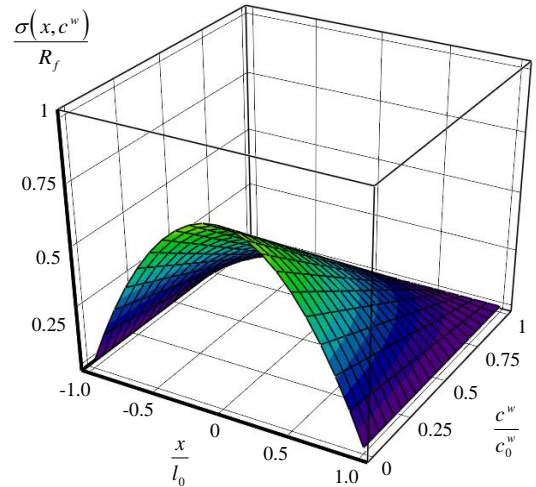
$$\gamma = \frac{E}{1-\omega} \cdot \operatorname{acosh}^2 \left\{ \frac{E \cdot \varepsilon^s}{E \cdot \varepsilon^s - R_t} \right\} \quad (15)$$

Po uwzględnieniu danych literaturowych uzyskano  $\gamma=793.5\text{MPa}$ .



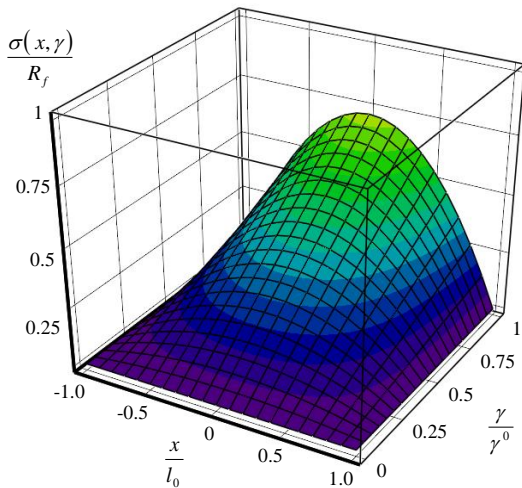
Rys. 2. Naprężenia skurczowe jako funkcja odległości i parametru uszkodzenia  $\sigma = f(x, \omega)$ .

Fig. 2. Shrinkage stresses as the function of distance and the parameter of damage  $\sigma = f(x, \omega)$ .



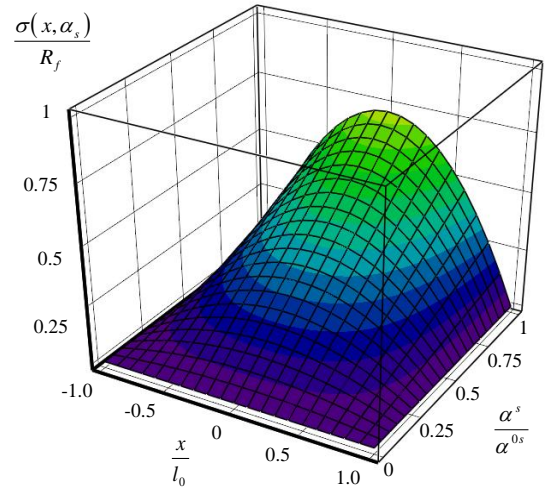
Rys. 4. Naprężenia jako funkcja odległości i koncentracji wilgoci  $\sigma = f(x, c^w)$ .

Fig. 4. Shrinkage stresses as the function of distance and the moisture concentration  $\sigma = f(x, c^w)$ .



Rys. 3. Naprężenia jako funkcja odległości i parametru szpieienia  $\sigma = f(x, \gamma)$ .

Fig. 3. Shrinkage stresses as the function of distance and the adhesion parameter  $\sigma = f(x, \gamma)$ .



Rys. 5. Naprężenia jako funkcja odległości i parametru skurczu  $\sigma = f(x, \alpha^s)$ .

Fig. 5. Shrinkage stresses as the function of distance and the shrinkage coefficient  $\sigma = f(x, \alpha^s)$ .

#### 4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono model naprężeń skurczowych w zabytkowych malowidłach. Zostało on wykorzystany do określenia parametru szepienia malowidła do podłoża. Korzystając z tego wyrażenia oraz z danych literaturowych określono rozkład naprężeń. Wyznaczono rozkłady naprężeń w funkcji odległości między rysami, współczynnika szepienia do podłoża, współczynnika skurczu, oraz moduł rozszerzalności liniowej.

#### SHRINKAGE STRESSES IN LAYERS OF MONUMENTAL PAINTINGS

In the article the model of the shrinkage was presented in layers of paintings. The stresses maps were marked depended from basic parameters.

#### Spis oznaczeń

$\gamma$  – współczynnik szepienia malowidła do podłoża,

$\alpha^s$  – współczynnik skurczu,

$E$  – moduł rozszerzalności liniowej,

$l_0$  – graniczna odległość między,

$c^w$  – aktualna koncentracja wilgoci,

$c_0^w$  – początkowa koncentracja wilgoci.

#### Literatura

[1] Kubik Jan, Haupt Peter *Problemy fizyki budowli zabytkowych*, Zesz. Nauk. PO Bud. 1996 z.40, 1996, s.5-15

[2] Al-Saad Z., Abdel-Halim M. A.H., *Laboratory evaluation of various types of mortars for the conservation of Qasr al-Bint monument, Petra-Jordan*, *Engineering Structures* 23 (2001) 926–933