FIZYKA BUDOWLI W TEORII I PRAKTYCE
TOM II, 2007

Sekcja
Fizyki
Budowli
KILiW PAN

PRZEWODNICTWO CIEPŁA W KOMPOZYCIE Z GRADACJĄ WŁASNOŚCI (FGM)

Alina RADZIKOWSKA*, Jarosław JĘDRYSIAK**

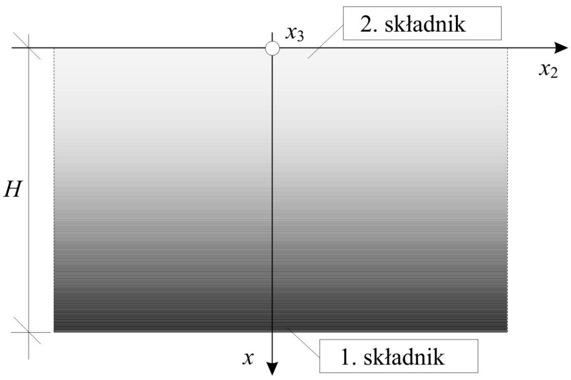
* Politechnika Łódzka, Katedra Mechaniki Konstrukcji
Al.Politechniki 6, 90-924 Łódź, e-mail: alina.radzikowska@o2.pl
** Politechnika Łódzka, Katedra Mechaniki Konstrukcji
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź, e-mail:jarek@p.lodz.pl

Streszczenie: W pracy rozpatrywane jest przewodnictwo ciepła w warstwie utworzonej z dwóch przewodników nieperiodycznie rozmieszczonych w podwarstwach o stałej grubości. Własności makroskopowe warstwy zmieniają się w sposób ciągły wzdłuż jej grubości. W pracy zastosowano uśredniony model przewodnictwa ciepła, otrzymany przy wykorzystaniu zmodyfikowanej techniki tolerancyjnego uśredniania, przedstawionej w monografii Woźniaka i Wierzbickiego [6].

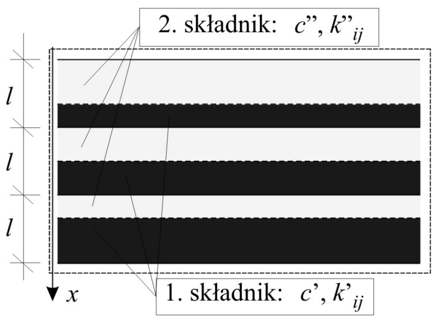
Słowa kluczowe: nieperiodycznie laminowana warstwa, przewodnictwo ciepła, tolerancyjne uśrednianie.

1. WPROWADZENIE

Obiektem rozważań jest warstwa złożona z dwóch przewodników, rozmieszczonych nieperiodycznie w postaci lamin wzdłuż grubości warstwy. Zakłada się, że makroskopowe własności takiego kompozytu zmieniają się w sposób ciągły po jego grubości, Rys. 1. Materiały tego rodzaju noszą nazwę *materiałów (kompozytów) z gradacją własności* (ang. *functionally graded materials*, FGM, za monografią Suresha i Mortensena [4]).
Dokładny opis geometrii mikrostruktury kompozytu typu FGM jest zwykle niemożliwy. Znany jest tylko rozkład poszczególnych składników. Oznacza to, że zjawiska termomechaniczne w materiale typu FGM mogą być analizowane tylko w ramach modeli mikromechanicznych o wyidealizowanej geometrii. Założenia idealizujące mogą być podobne do tych, które są wykorzystywane przy opisie kompozytów makroskopowo jednorodnych. Pomimo tego, że materiały typu FGM nie są makroskopowo jednorodne, ich ogólne zachowanie można analizować adaptując i modyfikując metody stosowane dla materiałów jednorodnych. Niektóre podstawowe metody, stosowane do określania własności kompozytów typu FGM, są omówione w monografii [4]. Wśród wielu modeli należy wymienić takie, które są oparte na homogenizacji asymptotycznej. Jednakże modele te pomijają zwykle wpływ wielkości mikrostruktury na ogólne zachowanie laminatów o budowie periodycznej.



Rys. 1. Fragment warstwy w makroskali
Fig. 1. A fragment of the macrostructure of the layer



Rys. 2. Fragment warstwy w mikroskali
Fig. 2. A fragment of the microstructure of the layer

W celu uniknięcia powyższych ograniczeń stosowana jest *technika tolerancyjnego uśredniania*, zaproponowana do modelowania głównie zagadnień dynamicznych dla kompozytów i struktur periodycznych, a omówiona w książce Woźniaka i Wierzbickiego [6]. Została ona zmodyfikowana i wykorzystana w analizie różnych zagadnień dotyczących materiałów z funkcyjną gradacją własności m. in. w pracach: Rychlewskiej i Woźniaka [3], Szymczyk i Woźniaka [5], a także struktur wykonanych z takich materiałów, np. w pracy Jędrysiaka, Rychlewskiej i Woźniaka [2]. Powyższy sposób modelowania wykorzystano także do uśrednienia znanego równania różniczkowego opisującego model przewodnictwa ciepła Fouriera w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej [1], gdzie w przykładzie ograniczono się do analizy szczególnego przypadku przewodnictwa w kierunku równoległym do lamin.

Wyżej wspomniane równanie przewodnictwa ciepła jest dla nieperiodycznie laminowanego kompozytu równaniem o zmiennych, silnie oscylujących współczynnikach. Zastosowanie procedury tolerancyjnego uśredniania prowadzi do otrzymania układu równań różniczkowych o współczynnikach ciągłych, wolnozmiennych.

Celem tej pracy jest zastosowanie wyprowadzonych równań tzw. *modelu tolerancyjnego* w analizie zagadnienia przewodnictwa w kierunku prostopadłym do lamin.

2. PODSTAWY MODELOWANIA

Niech indeksy $i, j, \ldots$ przyjmują wartości 1, 2, 3 i związane będą z kartezjańskim układem współrzędnych $Ox_1x_2x_3$, a indeksy $\alpha, \beta, \ldots$ przyjmują wartości 2, 3 i będą związane z układem Ox_2x_3. Wprowadźmy oznaczenia: $\mathbf{x}\equiv(x_2,x_3)$, $x\equiv x_1$ oraz t dla współrzędnej czasowej. Przez H oznaczmy grubość warstwy wzdłuż osi x. Rozpatrywana warstwa wykonana jest z dwóch materiałów, tworzących m lamin o jednakowej grubości l. Zakładamy, że spełniony jest warunek $l<<H$, stąd grubość l można nazwać *parametrem mikrostruktury*. Każda lamina o numerze n, $n=1,\ldots,m$, składa się z dwóch jednorodnych podwarstw, których grubości l'_n, l''_n zależą od współrzędnej x, por. Rys. 2. Własności podwarstw opisane są przez ciepło właściwe c', c'' oraz tensory przewodnictwa ciepła k'_{ij}, k''_{ij}, $i,j=1, 2, 3$. Oznaczmy współczynniki określające udział każdego materiału w laminie n przez $\nu'_n \equiv l'_n/l, \nu''_n \equiv l''_n/l$. Zakładając, że $\{\nu'_n\}$, $n=1,\ldots,m$, ciąg jest monotoniczny oraz spełniony jest warunek $|\nu'_{n+1}-\nu'_n|<<1$, dla $n=1,\ldots,m-1$, rozpatrywaną warstwę możemy traktować jak warstwę wykonaną z materiału typu FGM. Ponieważ zachodzi relacja $\nu'_n+\nu''_n=1$, powyższe warunki spełnia również ciąg $\{\nu''_n\}$. W związku z powyższym, ciągi $\{\nu'_n\}$, $\{\nu''_n\}$, $n=1,\ldots,m$, mogą być przybliżone ciągłymi funkcjami $\nu'(\cdot)$, $\nu''(\cdot)$, opisującymi rozkład własności materiałowych wzdłuż grubości warstwy. Wprowadźmy tzw. współczynnik niejednorodności ν, zdefiniowany jako $\nu(\cdot)\equiv[\nu'(\cdot)\nu''(\cdot)]^{1/2}$. Zakładamy przy tym, że powyższe funkcje ν', ν'' są funkcjami wolnozmiennymi (por. [6, 1]). Fragment warstwy w skali makro pokazano na Rys. 1, a w skali mikro na Rys. 2.

Przyjmując małe zmiany temperatury T oraz pomijając źródła ciepła, równanie przewodnictwa w nieperiodycznie laminowanej warstwie możemy zapisać w postaci:

$$-(k_{ij}T_{,j})_{,i}+c\dot{T}=0 \tag{1}$$

W powyższym równaniu współczynniki $k_{ij}=k_{ij}(x)$, $c=c(x)$, mogą być silnie oscylującymi, nieciągłymi funkcjami argumentu x. Równanie (1) można zastąpić układem równań o ciągłych, wolnozmiennych współczynnikach, stosując technikę tolerancyjnego uśredniania, por. [6, 1].

3. TECHNIKA MODELOWANIA

W technice tolerancyjnego uśredniania wykorzystuje się takie pojęcia, jak: operacja uśredniania, funkcja wolnozmienna, funkcja oscylująca, fluktuacyjna funkcja kształtu. Niektóre z tych pojęć zostaną przytoczone poniżej za [6, 1].

Dla dowolnej całkowalnej funkcji f określonej w przedziale $[0,H]$ (która może zależeć również od $\mathbf{x}$ oraz t), *operację uśredniania* zdefiniujemy następująco:

$$< f >(\bar{x})=l^{-1}\int_{\bar{x}-l/2}^{\bar{x}+l/2} f(x)dx, \qquad \bar{x}\in[l/2,H-l/2] \tag{2}$$

Różniczkowalną funkcję F, w przedziale $[0,H]$, nazywamy *funkcją wolnozmienną* (dla pewnego parametru tolerancji $\varepsilon<<1$) i oznaczamy $F\in SV$, jeśli funkcja $l\partial F$ (gdzie ∂ oznacza różniczkowanie względem x) oraz $O(\varepsilon F)$ są tego samego rzędu, tzn. $l\partial F\in O(\varepsilon F)$, $0<\varepsilon<<1$.

Wprowadzamy także *fluktuacyjną funkcję kształtu* φ, zakładając, że jest funkcją ciągłą, liniową wzdłuż grubości każdej podwarstwy oraz przyjmuje wartości rzędu $O(l)$. W przypadku rozpatrywanego laminatu przyjmujemy ją w następującej postaci:

$$\varphi(x)=\begin{cases} -l\sqrt{3}\,\frac{\nu(\bar{x})}{\nu''(\bar{x})}[2\frac{x}{l}+\nu'(\bar{x})] & \text{for} \quad x\in(-\frac{l}{2},-\frac{l}{2}+l\nu''(\bar{x})) \\ l\sqrt{3}\,\frac{\nu(\bar{x})}{\nu'(\bar{x})}[2\frac{x}{l}-\nu''(\bar{x})] & \text{for} \quad x\in(\frac{l}{2}-l\nu'(\bar{x}),\frac{l}{2}) \end{cases} \tag{3}$$

Ponieważ współczynnik niejednorodności ν jest funkcją wolnozmienną, można wykazać, że średnia wartość funkcji φ w każdej laminie jest równa zeru.

Wykorzystując powyższe pojęcia wprowadzamy podstawowe założenia techniki tolerancyjnego uśredniania, [4].

Pierwsze założenie modelowania, tzw. *dekompozycja temperatury*, stanowi, że temperaturę $T=T(x,\mathbf{x},t)$, $x\in[0,H]$, można opisać następującym wyrażeniem:

$$T(x,\mathbf{x},t)=W(x,\mathbf{x},t)+\varphi(x)V(x,\mathbf{x},t) \tag{4}$$

gdzie $W(\cdot,\mathbf{x},t)\in SV$ to tzw. *temperatura uśredniona*, $V(\cdot,\mathbf{x},t)\in SV$ to *zmienna fluktuacyjna temperatury*. Funkcje W, V są nowymi niewiadomymi opisującymi temperaturę w nieperiodycznie laminowanej warstwie (w skali makro – warstwa z materiału z gradacją własności).
Drugie założenie modelowania, tzw. *przybliżenie tolerancyjne*, stanowi, że dla dowolnej funkcji wolnozmiennej F można stosować przybliżenie postaci $F+O(\varepsilon F)\cong F$, zgodnie z którym wielkości rzędu $O(\varepsilon)$ są pomijalnie małe w porównaniu z 1.
Procedura modelowania wykorzystywana dla kompozytów z gradacją własności (typu FGM) jest podobna do stosowanej dla kompozytów o budowie periodycznej, por. [4], i można ją podzielić na trzy etapy:

- w pierwszym z nich uśredniane jest równanie (1) przy użyciu wzoru (2);
- w kolejnym etapie otrzymuje się warunek wariacyjny przez pomnożenie równania (1) przez funkcję testową o cechach fluktuacyjnej funkcji kształtu oraz uśrednienie równania wynikowego przy wykorzystaniu (2);
- w etapie trzecim, po podstawieniu dekompozycji (4) do uzyskanych uśrednionych równań i przeprowadzeniu stosownych przekształceń, otrzymuje się równania różniczkowe dla temperatury uśrednionej W oraz zmiennej fluktuacyjnej V.

4. MODEL UŚREDNIONY

Wykorzystując opisaną wyżej procedurę modelowania oraz wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} &K_{ij}\equiv<k_{ij}>,\quad \tilde{K}_{ij}\equiv<k_{ij}\varphi_{,j}>,\quad \breve{K}_{ij}\equiv<k_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}> \\ &\bar{K}_{ij}\equiv l^{-2}<k_{ij}\varphi\varphi>,\quad C\equiv<c>,\quad \bar{C}\equiv l^{-2}<c\varphi\varphi> \end{aligned} \tag{5}$$

otrzymujemy równania różniczkowe *modelu tolerancyjnego przewodnictwa ciepła w nieperiodycznie laminowanej warstwie*:

$$\begin{aligned} &K_{\alpha j}W_{,j\alpha}+(K_{1j}W_{,j})_{,1}-C\dot{V}+(\tilde{K}_{11}V)_{,1}+\tilde{K}_{\alpha 1}V_{,\alpha}=0 \\ &\tilde{K}_{1j}W_{,j}+\breve{K}_{11}V+l^{2}(\bar{C}\dot{V}-\bar{K}_{\alpha\beta}V_{,\alpha\beta})=0 \end{aligned} \tag{6}$$

Wyprowadzone równania (6) mają następujące cechy charakterystyczne:

- współczynniki są funkcjami wolnozmiennymi argumentu x,
- niektóre współczynniki są zależne od parametru mikrostruktury l, zatem zaproponowany model opisuje pewne zjawiska związane z mikrostrukturą.

Można zauważyć, że dla stałych wartości parametrów ν', ν'', $\nu'+\nu''=1$, równania (6) reprezentują pewien uśredniony model przewodnictwa ciepła w periodycznie laminowanej warstwie (makroskopowo jednorodnej).

5. ZASTOSOWANIE: STACJONARNE PRZEWODNICTWO CIEPŁA

5.1. Równania modelu

Rozpatrzmy warstwę, w której występuje różnica temperatur w kierunku prostopadłym do lamin. Rozważamy zatem zagadnienie przewodnictwa ciepła tylko wzdłuż osi x. Przyjmijmy, że temperatura w analizowanym przypadku jest niezależna od czasu. Wówczas podstawowe niewiadome są funkcjami tylko argumentu x, tj. $W=W(x)$, $V=V(x)$. Ponadto, podwarstwy wykonane są z dwóch różnych izotropowych materiałów o współczynnikach przewodnictwa ciepła równych k', k''. Wprowadźmy następujące oznaczenia $K\equiv K_{11}, \breve{K}\equiv\breve{K}_{11}, \tilde{K}\equiv\tilde{K}_{11}$. Równania przewodnictwa (6) przyjmują wówczas postać:

$$\begin{aligned} &KW_{,11}+K_{,1}W_{,1}+\tilde{K}V_{,1}+\tilde{K}_{,1}V=0 \\ &\tilde{K}W_{,1}+\breve{K}V=0 \end{aligned} \tag{7}$$

Ponieważ otrzymany układ równań ma współczynniki funkcyjne, można go rozwiązać wykorzystując program do obliczeń symboliczno-numerycznych, np. Mathcad.

5.2. Wyniki obliczeń

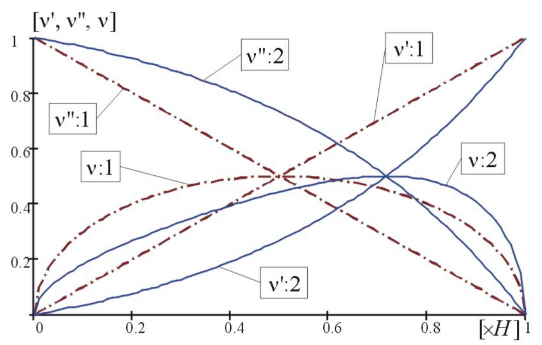
Rozpatrzmy dwa różne przypadki rozkładu materiałów wzdłuż grubości warstwy:
1) funkcje liniowe opisujące rozkład materiałów

$$\nu'(x)=x/H, \qquad \nu''(x)=1-\nu'(x) \tag{8}$$

2) funkcje wykładnicze opisujące rozkład materiałów

$$\nu'(x)=\frac{1-\exp(2x/H)}{1-\exp(2)}, \qquad \nu''(x)=1-\nu'(x) \tag{9}$$

Wykresy funkcji ν', ν'' i współczynnika niejednorodności ν w zależności od współrzędnej x pokazane są na Rys. 3.

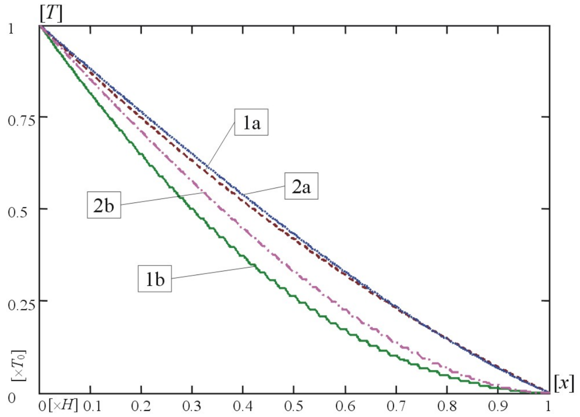


Rys. 3. Wykresy funkcji ν', ν'', ν (1 – dla wzorów (8), 2 – dla wzorów (9))
Fig. 3. Plots of functions ν', ν'', ν (1 – for formulas (8), 2 – for formulas (9))

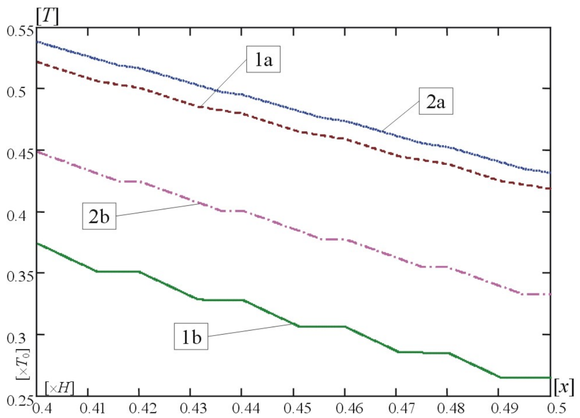
Niektóre wyniki obliczeń w postaci całkowitej temperatury T, określonej wzorem (4), przedstawione są na Rys. 4. Obliczenia przeprowadzono dla przypadku, w którym rozpatrywany kompozyt składa się z m=50 lamin, stąd l/H=0.02. Przyjęto warunki brzegowe dla temperatury uśrednionej W=$W(x)$ w postaci:

$$W(0)=T_0, \qquad W(H)=0 \tag{10}$$

Dla zmiennej fluktuacyjnej V=$V(x)$ nie formułuje się warunków brzegowych. Ponadto założono następujące ilorazy współczynników przewodnictwa ciepła obu materiałów: k''/k'=0.5 lub k''/k'=0.02.



Rys. 4. Wykresy rozkładu temperatury T wzdłuż grubości warstwy H dla $x\in[0,H]$ (1 – dla wzorów (8), 2 – dla wzorów (9); a – dla k''/k'=0.5, b – dla k''/k'=0.02)
Fig. 4. Diagrams of temperature T along the thickness H of the layer for $x\in[0,H]$ (1 – for formulas (8), 2 – for formulas (9); a – for k''/k'=0.5, b – for k''/k'=0.02)



Rys. 5. Wykresy rozkładu temperatury T wzdłuż grubości warstwy H dla $x\in[0.4H,0.5H]$ (1 – dla wzorów (8), 2 – dla wzorów (9); a – dla k''/k'=0.5, b – dla k''/k'=0.02)
Fig. 5. Diagrams of temperature T along the thickness H of the layer for $x\in[0.4H,0.5H]$ (1 – for formulas (8), 2 – for formulas (9); a – for k''/k'=0.5, b – for k''/k'=0.02)

Na Rys. 5 pokazano powiększony fragment wykresów z Rys. 4 dla przedziału $x\in[0.4H,0.5H]$.

6. UWAGI KOŃCOWE

Podsumowując rozważania, możemy sformułować następujące uwagi ogólne dotyczące rozpatrywanego zagadnienia *przewodnictwa ciepła w nieperiodycznie laminowanej warstwie*.

- Wyjściowe równanie przewodnictwa ciepła o nieciągłych, silnie oscylujących współczynnikach zostało zastąpione przez układ równań tzw. *modelu tolerancyjnego* o współczynnikach ciągłych, wolnozmiennych.
- Otrzymane równania modelu tolerancyjnego pozwalają uwzględnić *wpływ mikrostruktury* warstwy w przewodnictwie ciepła.
- Proponowany model pozwala opisać *zaburzenia rozkładu temperatury* spowodowane mikroniejednorodną, nieperiodyczną strukturą warstwy.

THE HEAT CONDUCTION IN NON-PERIODIC COMPOSITE (FGM)

Summary: In the note, a heat conduction in a layer made of non-periodically distributed laminas of two conductors is considered. Macroscopic properties of the layer are continuously graded across its thickness. The aim of the note is to apply an averaged model of heat conduction of a layer with functionally graded properties, based on the modelling approach called the tolerance averaging technique, shown in the book [6] by Woźniak and Wierzbicki.

Literatura

[1] Jędrysiak J., Radzikowska A. *On the modelling of heat conduction in a non-periodically laminated layer.* J. Theor. Appl. Mech. 45 (2007) (w druku)
[2] Jędrysiak J., Rychlewska J., Woźniak Cz. *Microstructural 2D-models of functionally graded laminated plates*. Shell Structures: Theory and Applications, ed. by W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak. Taylor & Francis, London - Leiden 2005,119-123
[3] Rychlewska J., Woźniak Cz. *Boundary layer phenomena in elastodynamics of functionally graded laminates*. Archives of Mechanics 58 (2006) 1-14
[4] Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of functionally graded materials*. The University Press, Cambridge 1998
[5] Szymczyk J., Woźniak Cz. *Continuum modelling of laminates with a slowly graded microstructure*, Archives of Mechanics 58 (2006) 445-458
[6] Woźniak Cz., Wierzbicki E. *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*. Wyd. PCz, Częstochowa 2000