

## DYFUZYJNO-FILTRACYJNE PRZEPLYWY MASY – WSPÓŁCZYNNIKOWE ZADANIE ODWROTNE

Jan KUBIK\*, Jadwiga ŚWIRSKA\*\*

\* Politechnika Opolska, Katedra Fizyki Materiałów  
Ul. Katowicka 48, 45-061 Opole, e-mail: [kubiki@po.opole.pl](mailto:kubiki@po.opole.pl)

\*\* Politechnika Opolska, Katedra Fizyki Materiałów  
Ul. Katowicka 48, 45-061 Opole, e-mail: [kfm@po.opole.pl](mailto:kfm@po.opole.pl)

**Streszczenie:** W pracy zaprezentowano współczynnikowe zadanie odwrotne dla filtracyjno-dyfuzyjnych przepływów masy mogących zachodzić w makroporowatych ośrodkach nienasyconych np. betonach jednofrakcyjnych, niektórych rodzajach ceramiki czy też gruboziarnistych kruszywach jednofrakcyjnych.

**Słowa kluczowe:** Fizyka budowli, dyfuzja, filtracja, zadanie odwrotne.

### 1. WPROWADZENIE

W ciałach kapilarno-porowatych mogą być realizowane różne mechanizmy transportu wilgoci. O ile dość powszechne jest występowanie dyfuzji objętościowej z powierzchniową czy też dyfuzji z przenoszeniem kapilarnym, to do wyjątków należy zaliczyć jednocześnie zachodzenie filtracji i dyfuzji. Przyczyną takiego stanu rzeczy są różnice w mechanizmach transportu obu wymienionych przepływów. A mianowicie podczas gdy dyfuzja ma charakter transportu molekularnego i wywołana jest gradientem stężenia migrującej substancji, filtracja ma charakter przepływu konwekcyjnego i wywołana jest gradientem ciśnienia w fazie ciekłej.

Z drugiej strony istnieją jednak materiały, które w pewnych warunkach pozwalają na przepływy tego typu. Należą do nich nienasycone materiały makroporowate takie jak jednofrakcyjne kruszywa gruboziarniste, betony jednofrakcyjne, czy też niektóre rodzaje ceramiki. Warunkiem jest tu występowanie w materiale makropodów charakteryzujących się dodatkowo ciągłym rozkładem po objętości ośrodka.

### 2. RÓWNANIA MODELU

Analizować będziemy przepływ w układzie trójskładnikowym:

- szkielet o stałej gęstości  $\rho^0$ ,
- woda wypełniająca część objętości kapilar o gęstości  $\rho^1$ ,
- para wodna zajmująca pozostałą część objętości porów o gęstości  $\rho^2$ .

Wielkości te spełniają parcjalne bilanse masy postaci [1, 2]

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + (\rho^0 v_i^0)_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + (\rho^1 v_i^1)_{,i} = R^1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t} + (\rho^2 v_i^2)_{,i} = R^2 \quad (3)$$

gdzie:  $\rho^\alpha = dm^\alpha/dV$  - gęstość składnika  $\alpha$ ,

$v_i^\alpha$  - prędkość komponentalna składnika  $\alpha$ ,

$R^\alpha$  - gęstość źródeł masy składnika  $\alpha$ .

Przy czym występujące w równaniach (2) i (3) człony źródłowe muszą spełniać zależność [2]

$$\sum_{\alpha} R^\alpha = 0 \Rightarrow R^1 = -R^2 \quad (4)$$

Sumując równania od (1) do (3) otrzyma się bilans masy całej mieszaniny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho w_i)_{,i} = 0 \quad (5)$$

gdzie  $w_i$  jest prędkością barycentryczną zdefiniowaną zależnością

$$\rho w_i = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} v_i^{\alpha} \quad (6)$$

Wprowadzając do równań od (1) do (3) stężenia masowe

$$c^{\alpha} = \frac{\rho^{\alpha}}{\rho} \quad (7)$$

i prędkości dyfuzyjne składnika  $\alpha$

$$u_i^{\alpha} = v_i^{\alpha} - w_i \quad (8)$$

oraz wykorzystując bilans masy całej mieszaniny (5) można równania te przedstawić w postaci

$$\rho \frac{\partial c^0}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial c^1}{\partial t} + w_i c_{,i}^1 \right) + j_{i,i}^1 = R^1 \quad (10)$$

$$\rho \left( \frac{\partial c^2}{\partial t} + w_i c_{,i}^2 \right) + j_{i,i}^2 = R^2 \quad (11)$$

gdzie

$$j_i^{\alpha} = \rho^{\alpha} u_i^{\alpha} = \rho c^{\alpha} u_i^{\alpha} \quad (12)$$

jest strumieniem dyfuzyjnym składnika  $\alpha$ . Przy czym w równaniu (9) przyjęto, że  $u_i^0 = -w_i$ .

Sumując równania (10) i (11) otrzyma się bilans masy migrujących składników

$$\rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + w_i c_{,i} \right) + j_{i,i} = 0 \quad (13)$$

gdzie zastosowano oznaczenia

$$c = c^1 + c^2 \quad (14)$$

$$j_i = j_i^1 + j_i^2 \quad (15)$$

Wprowadzając wyrażenie na sumaryczny strumień dyfuzyjny postaci

$$j_i = -K_1 p_{,i}^1 - \rho D_2 c_{,i}^2 = -K_{eff} p_{,i}^1 = -K p_{,i} \quad (16)$$

gdzie:  $K_1$  - współczynnik filtracji wody,  
 $D_2$  - współczynnik dyfuzji pary wodnej,  
 $K_{eff} = K$  - efektywny współczynnik filtracji ujmujący oba zachodzące w ciele mechanizmy transportu,

$p = p^1$  - ciśnienie w fazie ciekłej wody (np. ciśnienie hydrostatyczne),  
 można napisać

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w_i c_{,i} = \frac{1}{\rho} (K p_{,i})_{,i} \quad (17)$$

gdzie przyjęto  $\rho \cong const$ .

### 3. ZADANIE ODWROTNE

Dla przepływów dyfuzyjno-filtracyjnych opisanych równaniem (17) postawione zostanie zadanie odwrotne. Przy czym analizowany problem zawężony zostanie do zagadnienia jednowymiarowego odpowiadającego warunkom pomiaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (18)$$

Równanie (18) należy przemnożyć stronami przez stosunek oporów filtracyjnych

$$Q_x = \int_0^x \frac{1}{K(y)} dy \cong \frac{x}{K} \quad (19)$$

$$Q_h = \int_0^h \frac{1}{K(y)} dy \cong \frac{h}{K} \quad (20)$$

$$\frac{Q_x}{Q_h} \cong \frac{x}{h} \quad (21)$$

gdzie:  $Q_x$  - opór filtracyjny jednorodnej warstwy materiału o grubości  $x$ ,  
 $h$  - grubość badanej próbki,  
 oraz uśrednić całkując po grubości  $x \in \langle 0, h \rangle$  i w przedziale czasu  $\langle t, t + \Delta t \rangle$ . Postępując w ten sposób otrzyma się

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial c}{\partial x} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) dx dt \quad (22)$$

Całkując przez części poszczególne wyrażenia ze wzoru (22), przy wykorzystaniu założenia, że ciśnienia na brzegach próbki  $p(0)$  i  $p(h)$  są stałe w czasie, uzyska się wyrażenia

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \frac{\partial c}{\partial t} dx dt = \int_0^h \frac{x}{h} (c(t+\Delta t) - c(t)) dx \quad (23)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} w \frac{\partial c}{\partial x} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( wc(h) - \int_0^h \frac{w}{h} c dx \right) dt \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) dx dt = \\ = - \frac{p(h) - p(0)}{\rho h} \int_t^{t+\Delta t} K dt - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\Delta t} j(h) dt \end{aligned} \quad (25)$$

które po podstawieniu do zależności (22) pozwolą zapisać tą relację w formie

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} K dt = \frac{\rho h}{p(h) - p(0)} \left[ - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\Delta t} j(h) dt + \right. \\ \left. - \int_0^h \frac{x}{h} (c(t+\Delta t) - c(t)) dx - \int_t^{t+\Delta t} \left( wc(h) - \int_0^h \frac{w}{h} c dx \right) dt \right] \quad (26) \end{aligned}$$

Jeżeli dodatkowo uwzględnimy wzór na średnią całkową

$$\int_t^{t+\Delta t} F(t) dt = \bar{F} \Big|_t^{t+\Delta t} \Delta t \quad (27)$$

gdzie  $\bar{F}$  jest wartością średnią badanej funkcji w przedziale czasu  $\langle t, t + \Delta t \rangle$ , to można napisać

$$\begin{aligned} \bar{K} = \frac{\rho h}{p(h) - p(0)} \left[ - \frac{\bar{j}(h)}{\rho} + \right. \\ \left. - \int_0^h \frac{x}{h \Delta t} (c(t+\Delta t) - c(t)) dx + \right. \\ \left. - \int_t^{t+\Delta t} \left( w \frac{c(h)}{\Delta t} - \int_0^h \frac{w}{h} \frac{c}{\Delta t} dx \right) dt \right] \quad (28) \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{j}(h) = \frac{\Delta m}{A \Delta t} = \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{A \Delta t} \quad (29)$$

$$w \cong \frac{\bar{j}(h)}{\rho} \quad (30)$$

natomiast:  $m$  - masa naczynia, do którego odprowadzana jest filtrująca przez próbkę woda,  
 $A$  - pole powierzchni próbki,  
 $\rho$  - gęstość mieszaniny.

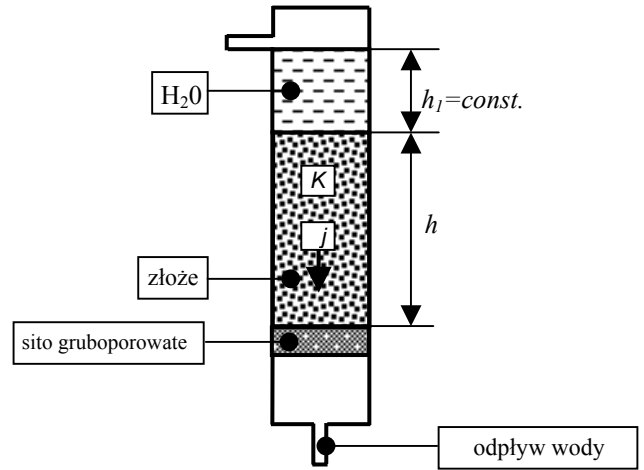
Pierwszy człon po prawej stronie wyrażenia (28) odpowiada tradycyjnemu wzorowi na współczynnik filtracji wynikającemu z prawa Darcy'ego przy założeniu stałego

gradientu ciśnienie hydrostatycznego po grubości próbki. Drugi człon opisuje wpływ niestacjonarności procesu na efektywny współczynnik filtracji, a ostatni wpływ konwekcyjnego transportu masy na ten współczynnik.

Drugi człon po prawej stronie wzoru (28) ma jedynie sens w przypadku ośrodków nienasyconych, przy jednoczesnym występowaniu przepływów filtracyjnych i dyfuzyjnych. W przypadku ośrodków nasyconych, przy założeniu nieściśliwości wody, człon ten samoistnie zanika.

#### 4. ZAKOŃCZENIE

Badania eksperymentalne dotyczące efektywnego współczynnika filtracji  $K$  można w najprostszym przypadku przeprowadzić w kolumnie filtracyjnej z przelewem zapewniającym stałą wysokość słupa wody nad badanym złożem, której schemat pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Schemat kolumny filtracyjnej.  
 Fig. 1. Scheme of the filtration column.

Chcąc określić udział przepływów dyfuzyjnych w sumarycznym transporcie masy badania efektywnego współczynnika filtracji  $K$  należy przeprowadzić w różnych temperaturach. W ten sposób wyznaczy się jego zmienność wraz z tym parametrem czyli funkcję  $K(T)$ . Przyjmując, że za zmiany współczynnika filtracji wody odpowiedzialne są zmiany lepkości wody wraz z temperaturą, można założyć że współczynnik ten zmienia się zgodnie z zależnością

$$K_1(T) = K_1(T_0) \frac{\nu(T_0)}{\nu(T)} \quad (31)$$

gdzie:  $\nu$  - współczynnik lepkości kinematycznej wody,  
 $T_0$  - temperatura odniesienia.

Przy czym należy tu zaznaczyć, że zależność współczynnika lepkości wody od temperatury jest powszechnie znana i dostępna w literaturze przedmiotu.

Mając wyznaczoną eksperymentalnie funkcję  $K(T)$  można, przy wykorzystaniu zależności (16) i (31), określić wielkość  $j_i^2$  opisującą strumień masy przenoszonej w badanym materiale na drodze dyfuzji.

#### **DIFFUSIONAL AND FILTRATIONAL MASS FLOWS – INVERSE PROBLEM**

**Summary:** In the work coefficient inverse problem for diffusional and filtrational mass flows of mass is formulated. The flows proceed in macroporous unsaturated mediums as monofractional concrete, coarse-grained mono-fractional aggregate, some types of ceramics.

#### **Literatura**

- [1] Kubik J. *The properties of thin moisture films*. X Bauklima Sym., Dresden 2002
- [2] Kubik J. *Ruch wilgoci w materiałach budowlanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 2001