# OPTYMALIZACJA WIELOPOZIOMOWA I WIELOKRYTERIALNA OBIEKTÓW BUDOWLANYCH

GINTOWT Jolanta
*Katedra Budownictwa Ogólnego i Przemysłowego, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska*

## MULTICRITERIAL AND MULTILEVELED OPTIMIZATION OF BUILDINGS

The paper deals with analysis of mathematical and economical criteria. the solution procedure for the nonlinear optimization with bounds are given. For the economic assessment some of the indexes are used. The constant, variable and discrete factors for the optimization are discussed.

## STRESZCZENIE

Dla wielu kryteriów zadań optymalizacji podano kryteria matematyczne, ekonomiczne. Dla oceny matematycznej określono warunki i sposób rozwiązania zadań optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami, dla oceny ekonomicznej podano niektóre wskaźniki ekonomiczne. Określone zostały parametry stałe, zmienne i dyskretne zadania optymalizacji.

## 1. KRYTERIA OPTYMALIZACJI

Oszczędność energii do celów ogrzewania pomieszczeń, oświetlenia, ciepłej wody użytkowej, produkcji materiałów czy choćby ich transportu stała się koniecznością. Zmniejszenie zużycia energii można osiągnąć na drodze doboru odpowiedniego np. źródła ciepła, sposobu wytwarzania energii, sposobu transportu i sterowania energią, odzysku i urządzeń do odzysku ciepła, kształtu obiektu, wymiarów wysokości kondygnacji, wielkości oporu cieplnego przegród, wzajemnego usytuowania tych przegród. Aby móc podjąć decyzję stosuje się różne metody oceny np. wskaźniki ekonomiczne, optymalizację matematyczną.

## 2. ZADANIA NIELINIOWE OPTYMALIZACJI.

Sformułowanie zadania [1] dla funkcji z ograniczeniami:

$$F = f(x, y)$$

gdzie:
$f \varepsilon R$
$x \ \varepsilon \ A=E^n$- wektor zmiennych decyzyjnych,
$y \ \varepsilon \ B= E^m$ – wektor zmiennych decyzyjnych,
Poszukujemy :

Minimum kosztu inwestycyjnego, $F_1$,
Minimum kosztu eksploatacyjnego, $F_2$,
dana funkcja celu:

$$f(x^*, y^*)=\min f(x, y)$$

gdzie:
x*, y* zmienne wektory decyzyjne.
Dla tego zadania określa się warunki ograniczające.

**2.1. Nieliniowe zadania optymalizacji z ograniczeniami.**

Jeśli podstawowe zadanie będzie postaci:

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

gdzie:
$x^* \in R \subset E^n$,
R- może być różnych postaci:

$$R_1 = \{x \in E^n : G(x) = g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x))^T \le 0\} =$$
$$= \{x \in E^n : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\},$$
$$R_2 = \{x \in E^n : G(x) = g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x))^T \le 0, x \ge 0\} =$$
$$= \{x \in E^n : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, x \ge 0\},$$
$$R_3 = \{x \in E^n : G(x) = g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x))^T = 0, x \ge 0\} =$$
$$= \{x \in E^n : g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}, x \ge 0\},$$
$$R_4 = \{x \in E^n : G(x) = g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x))^T = 0\} =$$
$$= \{x \in E^n : g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\}.$$

Zadanie sformułowane w jednej postaci może zostać przekształcone w zadanie o innej równoważnej jej postaci, np.:

$$R_2 = \{x \in E^n : P(x) = (p_1(x), p_2(x), ..., p_{m+n}(x))^T \le 0\}$$

gdzie:
$$h_i(x) = g_i(x), i = \overline{1,m},$$
$$h_i(x) = -x_{i-m}, i = \overline{m+1, m+n}.$$

**2.2. Metoda punktu siodłowego rozwiązywania zadań nieliniowych.**

Jeśli zadaniu f(x*) zostanie przyporządkowana funkcja Lagrange`a postaci:

$$L(x,y) = f(x) + (y / G(x)) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$$

gdzie:

$x \in A = E^n$,

$y \in B = \{y \in E^m : y \geq 0$

i $x \in R$ co oznacza, że jest punktem dopuszczalnym zadania, zachodzi, że:

$$f(x^*) \leq f(x) + (y^* / G(x)) \leq f(x)$$

gdzie:
(G(x)≤0)
co oznacza, że x* jest punktem optymalnym (minimalnym) zadania f(x*), jest punktem siodłowym równania Lagrange`a.

**2.3. Warunki różniczkowe Kuhna-Tuckera do wyznaczania punktu siodłowego równania Lagrange`a.**

Sformułowane zostaną warunki: warunek konieczny (WK) i warunek wystarczający (WW) punktu siodłowego:
A zatem WK:

$$\nabla_x L(x^* y^*) = 0$$

$$\nabla_y L(x^* y^*) \leq 0, (\nabla_y L(x^* y^*) / y^*) = 0, y^* \geq 0$$

gdzie:
(x*,y*)-punkt siodłowy funkcji Lagrange`a,
f(x*) i $g_i(i = \overline{1,m})$ - funkcje klasy $C^1$ w $E^n$,
L-funkcja Lagrange`a.

oraz WW:
x*- jest rozwiązaniem optymalnym zadania, jeśli:
funkcje f(x*) i $g_i(i = \overline{1,m})$ - są funkcjami wypukłymi klasy $C^1$ w $E^n$ ,
każda para(x*, y*) spełnia warunki Kuhna-Tuckera.

**2.4. Metoda mnożników Lagrange`a do rozwiązania zadania nieliniowej optymalizacji.**

Dla rozwiązania zadania $f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$ przy warunkach $R_4$ otrzymujemy:

przy założeniu, że f(x*) i $g_i(i = \overline{1,m})$ -funkcje różniczkowalne i wypukłe

$$\nabla_x L(x^*, y^*) = 0,$$
$$\nabla_y L(x^*, y^*) = 0$$

gdzie:
(x*,y*)-punkt siodłowy.

## 3. CEL ZADANIA OPTYMALIZACJI

Określenie wartości zmiennych decyzyjnych [2] w zależności od sposobu dekompozycji zadania, przy przyjęciu dyskretnych zmiennych decyzyjnych i ograniczeń.
Dekompozycja wielopoziomowości jak i wielokryterialności np.:
Ceny pozostają stałe zmiana kształtu obiektu,
Ceny zmienne przy niezmienionym kształcie,
Zmiana kształtu obiektu przy nie zmienianych parametrach instalacji grzewczej,
Stały kształt obiektu i zmiana charakterystyk grzewczych.

## 4. FUNKCJA CELU

Przy określaniu parametrów obiektu zadania f(x*) określona zostaje funkcja celu oraz sposób jej rozwiązania.

### 4.1. Postać funkcji celu

Dla warunków określonych jak wyżej funkcja celu przyjmuje postać:

$$F(xi, yj, gi, \lambda_k) = F_o + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$$
$$F(xi,yj, \lambda) = f(x,y) + \lambda_1 g_i(x,y) + \lambda_1 F_1 + (1- \lambda_1) F_2$$

gdzie:
$\lambda_1$, $\lambda_2$ –mnożniki Lagrange`a,
F1 –koszt inwestycyjny [zł],
F2- określa koszt eksploatacyjny [zł].

### 4.2. Sposób rozwiązania

Wobec, tego iż, warunki ograniczające oraz funkcje są różniczkowalne i wypukłe , rozwiązania należy poszukiwać w postaci:

$$\partial F/\partial xi \geq 0, \quad i=1,...,n$$
$$xi(\partial F/\partial xi)=0, \quad i=1,...,n$$

$$\partial F/\partial yj=0, \quad j=1,...,m$$
$$yj(\partial F/\partial yj)=0$$

$$\partial F/\partial gi=0,\ \ i=1,...,n$$

$$\partial F/\partial\lambda=0\ ,\ \lambda>0$$
$$\lambda(\partial F/\partial\lambda)=0,$$

Możliwa jest różna dekompozycja zadania.
Założenia dotyczące parametrów ograniczających:
objętość -V, powierzchnia zabudowy -P, wymiary min, max -długości, szerokości, wysokości, pochylenia powierzchni -$\gamma$, usytuowania obiektu względem azymutu- $\beta$, np.:
$P=a\sin\gamma_1 + b\sin\gamma_2 + a'\sin\gamma_3 = 0$,
$|V-(m\ d + ne)c| \leq (md+ne)L^2$,
$L \leq C$, długości f(Q,q).
Założenia dotyczące charakterystyk zmiennych:
charakterystyki materiałów -R - opory cieplne przegród pełnych o orientacji względem stron świata, [W/m$^2$K], Rsk- południowej, Rsp- podłoga na gruncie, Rsd- dach, Rso- okno, zapotrzebowanie na ciepło i na moc zamówioną –Q [GJ], [m$^3$], q [W], [m$^3$/h],. psx- udział przegród przeźroczystych w przegrodzie pełnej o kierunku x,y, psy- udział przegród przeźroczystych w przegrodzie pełnej o kierunku z,y,
Założenia dotyczące charakterystyk dyskretnych:
Sprawność systemu ogrzewania $\eta$ – sprawność f( wytwarzania, przesyłu, regulacji, wykorzystania), wysokości kondygnacji –h.
Założenia dotyczące charakterystyk zmiennych lub dyskretnych:
ce- cena mocy zamówionej, [zł/W] v [zł/( m$^3$ / h) ], Csx -cena m$^2$ ściany o kierunku x, [zł/m$^2$], Csy -cena m$^2$ ściany o kierunku y, [zł/m$^2$], Cso -cena m$^2$ okna , [zł/m$^2$],

Zakres stosowania warunków Kuhna-Tuckera dla tak postawionych założeń mógłby być zawężony. Tak więc należy w celu rozwiązania zadania zachować kolejność działań i sposób postępowania:

-wyznaczamy $(\overline{x},\overline{y})$ które spełniają warunki różniczkowe K-T,

-sprawdzamy, która para $(\overline{x},\overline{y})$ jest punktem siodłowym,

-elementy składowe par $(\overline{x},\overline{y})$ spełniające punkt siodłowy, są rozwiązaniami optymalnymi zadania.

## 5. WSKAŹNIKI EKONOMICZNE

Celem analizy ekonomicznej jest uszeregowanie przedsięwzięć od najbardziej opłacalnych. Polega na porównaniu kosztów i zysków danej inwestycji. Najczęściej stosowanym wskaźnikiem [3] jest „prosty czas zwrotu” np. [1]:

$$SPBT = \frac{Ki}{\Delta Qe}, [lata]$$

gdzie:
Ki- koszt inwestycji, [zł],

$\Delta$Qe- oszczędność kosztu eksploatacyjnego, [zł].

Wskaźniki zalecane przez Bank Światowy np.: „wartość bieżąca netto- NPV ”, „wewnętrzna stopa zwrotu- IRR”.

$$NPV = \sum_{t=1}^{15} \frac{1}{(1+i)^t} \Delta Qe - Ki, [zl]$$

gdzie:
i-stopa dyskonta określana corocznie,
t – czas, [lata].

$$IRR = r_1 + \frac{NPV_1}{NPV_1 - NPV_2} \cdot (r_2 - r_1), [\%]$$

Wskaźniki przeznaczone specjalnie do inwestycji energooszczędnych np.: „koszt zaoszczędzonej energii CS” czy ‘koszt poniesiony na zaoszczędzenie energii –CSE”:

$$CS = 1 - \frac{NPV}{\Delta Q_0 \cdot UPW}, [zl/zl]$$

gdzie:
UPW= f(r, m, t),[lata],
m- stopa wzrostu kosztów obsługi i remontów, [zł].

$$CSE = \frac{Ki}{\Delta E \cdot UPW}, [zl/GJ]$$

gdzie:
$\Delta$E- zaoszczędzona energia, [MJ/rok].

W zależności od tego dla jakiego funduszu lub z jakich środków ma być inwestycja finansowana, dofinansowana lub kredytowana, otrzymuje się różne wartości np. grubości termoizolacji [4]. Jeśli inwestor chce z różnych źródeł finansować przedsięwzięcie- podjęcie decyzji może być utrudnione lub należy przygotować różne opracowania dla tego samego przedsięwzięcia. Często rozliczenie zadania po wykonaniu np. docieplenia jest łamigłówką księgową.

## 6. WNIOSKI

1. Ze względu na różne metody oceny finansowej przedsięwzięć uzyskuje się bardzo rozbieżne wyniki.
2. Rozwiązanie zadania K-T daje możliwość optymalizowania ze względu na wiele kryteriów.

3. Celowym wydaje się wprowadzenie do optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami wskaźników ekonomicznych jako jednego z kryteriów.
4. Generalnie zadanie nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami można potraktować jako badanie wrażliwości zadania optymalizacji.

## 7. LITERATURA


[1] DIENISZEWSKI W., JENDO S., MARKS W., OWCZAREK S., WASIUTYŃSKI Z.: "O matematycznych metodach optymalizacji konstrukcji", Prace IPPT, PAN 1973.
[2] STACHOWICZ Antoni, GINTOWT Jolanta: „Optymalne projektowanie budynków o niskim zapotrzebowaniu na energię jako problem optymalizacji wielopoziomowej", Konferencja Naukowo-Techniczna-„Fizyka budowli w teorii i praktyce", Łódź, 1995.
[3] Ustawa termomodernizacyjna Dz.U. Nr 12 ,2002, poz. 114.
[4] GINTOWT Jolanta : „The Reasons of Mould Development on Construction Elements and Regard to Allergic Illnesses Due to Moulds", Polish Journal of Environmental Studies, Vol.13, Supplement I, Hard Olsztyn, 2004.



Magister inżynier, wykładowca w Katedrze Budownictwa Ogólnego i Przemysłowego, Wydziału Inżynierii Lądowej, Politechniki Krakowskiej.
Wykładowca na kursach dla kandydatów na Audytorów Energetycznych. Audytor energetyczny.
Wykładowca na studiach podyplomowych-„Ochrona Środowiska w obszarach zurbanizowanych".
Specjalizacja: fizyka budowli, budownictwo ekologiczne.

e-mail: jolanta.gintowt@interia.pl