

Agata Załęska-Fornal  
Marek Zellma

## KRZYWOLINIOWA FUNKCJA REGRESJI W BAZIE FUNKCJI SKLEJANYCH

### STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania bazowych funkcji sklejanych do wyznaczania funkcji regresji metodą największej wiarygodności. Opracowany algorytm wykorzystano do opisu przebiegu prędkości obrotowej silnika elektrycznego. Dokonano analizy statystycznej zgodności dopasowania modelu do danych pomiarowych.

### WSTĘP

W niektórych zagadnieniach związanych z opisem sygnałów rzeczywistych występują zmienne  $Y$ , które są sumami funkcji rzeczywistych  $y(t)$  zależnych od czasu  $t$  i losowego składnika  $\varepsilon(t)$  wyrażającego zakłócenie lub szum:

$$Y = y(t) + \varepsilon(t),$$

gdzie funkcja  $\varepsilon(t)$  podlega rozkładowi normalnemu  $N(0, \sigma)$  o wartości oczekiwanej równej zero i odchyleniu standardowym  $\sigma$ . Ponadto zakładamy, że dla dowolnych chwil  $t'_k$ ,  $k \in \overline{0, n_1}$  zmienne  $\varepsilon(t'_k)$  są niezależne. Wartości sygnału  $Y$  można zmierzyć jedynie z błędem. W takim przypadku dostępny jest pomiar wielkości  $\tilde{y}$  obarczony szumem (zakłóceniami)  $\varepsilon$ . Pomiar  $\tilde{y}$  różni się więc od wartości  $y$ . Na podstawie danych pomiarowych  $\tilde{y}$  oraz w oparciu o cechy statystyczne zakłóceń z sygnału  $y$  będziemy szukali pewnego modelu  $\hat{y}$  opisującego sygnał  $y$ , który pozwoli z zakłóconych błędami danych wartości funkcji przybliżanej  $y$  otrzymać funkcję przybliżającą  $\hat{y}$ .

Niech będą dane wartości  $\tilde{y}_k, k \in \overline{0, n_1}$  sygnału  $Y$  obiektu rzeczywistego zaobserwowane w chwilach  $t'_k, k \in \overline{0, n_1}$ . W danych chwilach  $t'_k \in \overline{0, n_1}$  możliwe są różne wartości  $Y$ . Sygnał  $y$  opiszemy następująco:

$$y = \hat{y} + \varepsilon,$$

gdzie  $\hat{y}$  jest średnią sygnału  $y$  w chwili  $t$ .

Zakładamy, że dla każdego  $t$  zmienna losowa  $y$  ma rozkład normalny ze średnią  $\hat{y}$ . Następnie średnią  $\hat{y}$  sygnału  $y$  przedstawimy w postaci bazowych funkcji sklepanych stopnia  $n$ .

### BAZOWE FUNKCJE SKLEJANE N-TEGO STOPNIA

Niech

$$\mathbf{B} = \{B_n^{-n}, \dots, B_n^{N-1}\}$$

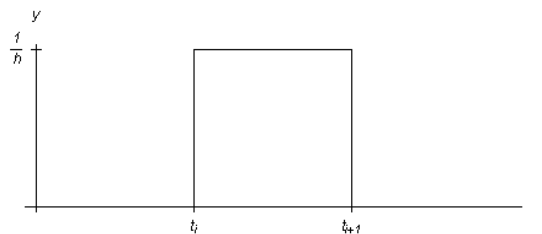
będzie zbiorem tzw. funkcji sklepanych  $n$ -tego stopnia wyznaczonych rekurencyjnie za pomocą wzoru De Boora [4]:

$$\tilde{B}_n^i(t) = \frac{n+1}{n} \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+n+1}-t_i} \tilde{B}_{n-1}^i(t) + \frac{t_{i+n+1}-t}{t_{i+n+1}-t_{i+1}} \tilde{B}_{n-1}^{i+1}(t) \right], \quad (1)$$

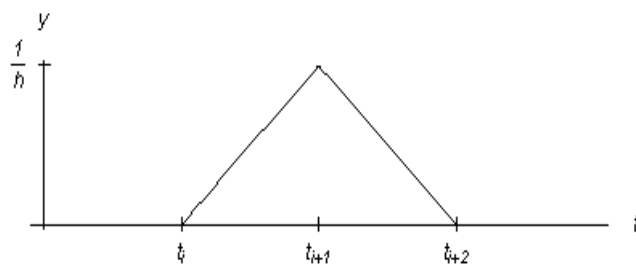
gdzie  $i \in \overline{-n, N-1}$ , a dla  $n=0$  baza  $\tilde{B}_0^i(t)$  jest opisana następująco:

$$\tilde{B}_0^i(t) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{for } t \notin [t_i, t_{i+1}) \end{cases}$$

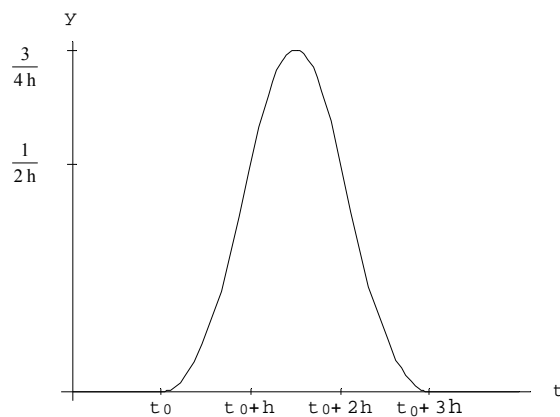
Wykresy bazowych funkcji sklepanych pokazują rysunki 1 – 6.



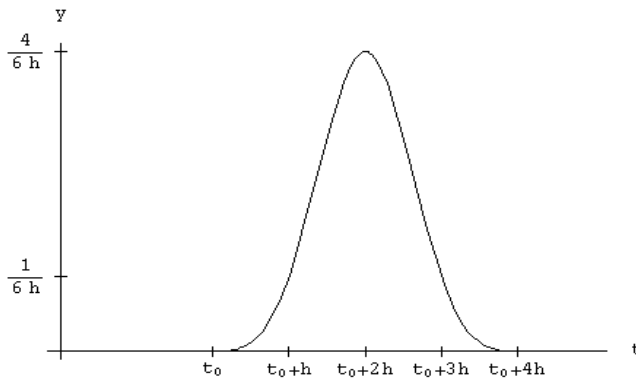
Rys. 1. Wykres bazowej funkcji sklepanej stopnia zerowego



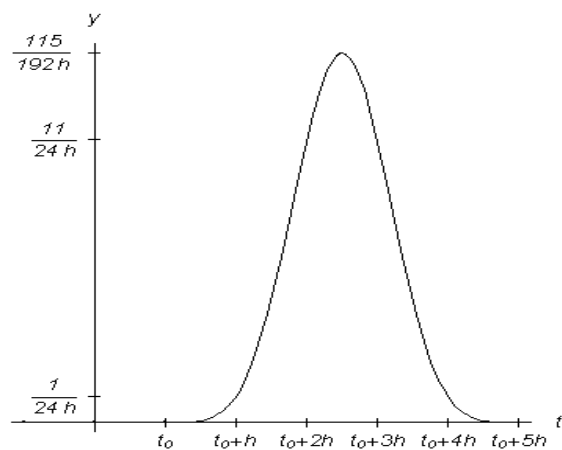
Rys. 2. Wykres bazowej funkcji sklejaney stopnia pierwszego



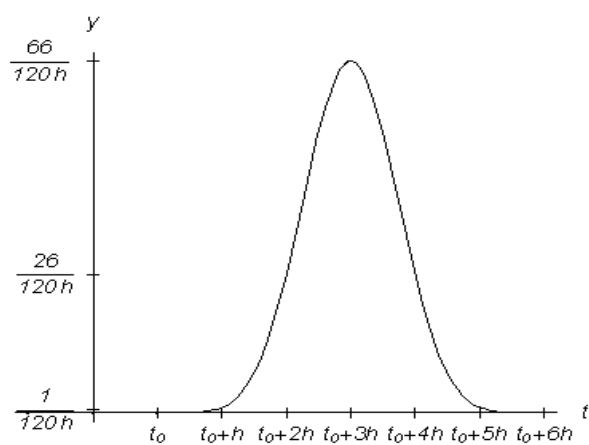
Rys. 3. Wykres bazowej funkcji sklejaney stopnia drugiego



Rys. 4. Wykres bazowej funkcji sklejaney stopnia trzeciego



Rys. 5. Wykres bazowej funkcji sklejanej stopnia czwartego



Rys. 6. Wykres bazowej funkcji sklejanej stopnia piątego

Niech  $\Delta_N$ , gdzie  $N < n_1 - n$ , będzie układem punktów

$$t_i = t_0 + ih, h := \frac{t'_n - t'_0}{N}, i \in \overline{0, N}$$

dzielących przedział  $[t'_0, t'_n] = [t_0, t_N]$  na  $N$  podprzedziałów

$$\Delta_N : t_0 < \dots < t_N.$$

Uzupełnimy podział  $\Delta_N$  punktami

$$t_{-i} = t_0 - ih, t_{N+i} = t_N + ih, i \in \overline{1, n}.$$

Bazowe funkcje mają następujące własności:

$$\tilde{B}(t) > 0 \text{ dla } t_i < t < t_{i+n+1}, \quad \tilde{B}(t) = 0 \text{ dla } t \notin (t_i, t_{i+n+1}), \quad \int_{t_i}^{t_{i+n}} \tilde{B}_n^i(t) dt = 1$$

oraz stanowią rozkład jedności, tzn. dla każdego  $t \in (t_0, t_N)$  mamy  $\sum_i \tilde{B}_n^i(t) = 1$ .

W każdym przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$  funkcję sklejaną można zapisać jako

$$s^i(t) = c_{i-n} \tilde{B}_n^{i-n}(t) + \dots + c_i \tilde{B}_n^i(t), \quad c_i \in R, \quad i \in \overline{0, N-1}.$$

Zatem każdą funkcję sklejaną  $s$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$s(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t). \quad (2)$$

### FUNKCJA REGRESJI OPISANA ZA POMOCĄ BAZOWYCH FUNKCJI SKLEJANYCH

Na podstawie danych pomiarowych sygnału rzeczywistego wyznaczymy funkcję

$$\hat{y} = \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t), \quad (3)$$

taką że dla każdego ustalonego  $t'_k \in \overline{0, n_1}$  zmienna losowa  $y_k$  ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną

$$\hat{y}_k = \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t'_k) \quad (4)$$

i odchyleniem standardowym  $\sigma$ . Ponadto zakładamy, że zmienne losowe  $y_k$  są niezależne. Współczynniki  $c_i, i \in \overline{-n, N-1}$  wyznaczmy metodą największej wiarygodności, minimalizując funkcję gęstości

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n_1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [y_k - \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t'_k)]^2\right)$$

rozkładu zmiennych losowych  $y_k, k \in \overline{0, n_1}$ .

Logarytmując stronami tę funkcję, otrzymujemy

$$\ln L = -n_1 \ln \sigma - \frac{n_1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [y_k - \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t'_k)]^2.$$

Następnie obliczając pochodne względem  $c_i, i \in \overline{-n, N-1}$  i przyrównując je do zera, dostajemy równania największej wiarygodności

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [\tilde{y}_k - \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(t'_k)] \tilde{B}_n^j(t'_k) = 0, \quad j \in \overline{-n, N-1}.$$

Po przekształceniach powyższy układ równań zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} c_{-n}^0 \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + c_{N-1}^0 \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{y}_k \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \\ \dots \\ c_{-n}^0 \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) + \dots + c_{N-1}^0 \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{y}_k \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \end{cases} \quad (5)$$

lub macierzowo

$$\mathbf{BC} = \mathbf{G},$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) & \dots & \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) & \dots & \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-n} \\ \dots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{y}_k \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{y}_k \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Na przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$  istnieje  $n + 1$  nietożsamościowo równych zero funkcji postaci  $\tilde{B}_n^{-n-i+1}, \dots, \tilde{B}_n^i$ . Dlatego też macierz

$$B = \left[ \sum_{k=0}^{n_i} \tilde{B}_n^i(t'_k) \tilde{B}_n^j(t'_k) \right]_{(n+N) \times (n+N)}$$

jest macierzą symetryczną, nieosobliwą i wstęgową (tzw.  $(2n + 1)$ -diagonalną), ponieważ  $\sum_{k=0}^{n_i} \tilde{B}_n^i(t'_k) \tilde{B}_n^j(t'_k) = 0$  dla  $|i - j| \geq n + 1$ .

### OCENA ZGODNOŚCI FUNKCJI REGRESJI Z DANYMI Z POMIARÓW

W poprzednich paragrafach omówiony został problem wyznaczania funkcji regresji. Znajomość funkcji regresji, charakteryzującej związek funkcyjny istniejący w zależności statystycznej, umożliwia przewidywanie przeciętnego zachowania się sygnału. Jednak sama znajomość funkcji regresji nie umożliwia oceny wartości rozbieżności między przewidywaniami a wartościami pomiarowymi. Do określenia natężenia związku między dwiema wielkościami wykorzystuje się współczynnik korelacji wielowymiarowej.

Wykażemy najpierw ważną własność, która zachodzi w metodzie najmniejszej sumy kwadratów, mianowicie: wartość średnia z pomiarów

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{y}_k$$

jest równa wartości średniej z regresji

$$\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{y}_k.$$

W tym celu dodamy stronami równania w układzie (5), uzyskując następującą równość:

$$\begin{aligned} & c_{-n} \left( \sum_{k=0}^n \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) (\tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k)) \right) + \dots + \\ & + c_{N-1} \left( \sum_{k=0}^n \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) (\tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k)) \right) = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k (\tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k)). \end{aligned} \tag{7}$$

Korzystając z własności ([6])

$$\sum_{i=-n}^{N-1} \tilde{B}_n^i(t) = 1 \quad \text{dla } t \in [t_0, t_n],$$

możemy (7) zapisać w postaci

$$c_{-n} \sum_{k=0}^n \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + c_{N-1} \sum_{k=0}^n \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k$$

i następnie

$$\sum_{k=0}^n (c_{-n} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + c_{N-1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k)) = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k.$$

Ponieważ

$$c_{-n} \tilde{B}_n^{-n}(t'_k) + \dots + c_{N-1} \tilde{B}_n^{N-1}(t'_k) = \hat{y}_k,$$

zatem

$$\sum_{k=0}^n \hat{y}_k = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k.$$

Dzieląc tę równość obustronnie przez  $n$ , otrzymamy żadaną równość wartości średnich

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \hat{y}_k. \quad (8)$$

Policzymy teraz współczynnik korelacji między wielkościami  $\tilde{y}_k$  a  $\hat{y}_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , wyrażający natężenie związku między wartościami sygnałów wyznaczonych z pomiarów a wartościami funkcji regresji. Wzór opisujący współczynnik korelacji wielowymiarowej jest następujący:

$$R = R_{y\hat{y}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}}. \quad (9)$$



Uwzględniając równość sum [2]

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2,$$

wzór (9) przyjmuje postać:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

### FUNKCJA REGRESJI OPISANA ZA POMOCĄ FUNKCJI SKLEJANYCH TRZECIEGO STOPNIA

Dobrze przybliżającymi szerokie klasy funkcji są bazowe funkcje sklepane stopnia trzeciego. Bazę funkcji sklepanych trzeciego stopnia wygodnie jest przedstawić w postaci:

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{3!h^4} \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq t_0 + (i-2)h \\ f_1(t) & \text{dla } t_0 + (i-2)h \leq t \leq t_0 + (i-1)h \\ f_2(t) & \text{dla } t_0 + (i-1)h \leq t \leq t_0 + ih \\ f_3(t) & \text{dla } t_0 + ih \leq t \leq t_0 + (i+1)h \\ f_4(t) & \text{dla } t_0 + (i+1)h \leq t \leq t_0 + (i+2)h \\ 0 & \text{dla } t \geq t_0 + (i+2)h \end{cases}, \quad i \in \overline{-1, N+1}, \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \tau^3, \quad \tau = t - (t_0 + (i-2)h); \\ f_2(t) &= h^3 + 3h^2\tau + 3h\tau^2 - 3\tau^3, \quad \tau = t - (t_0 + (i-1)h); \\ f_3(t) &= h^3 + 3h^2\tau + 3h\tau^2 - 3\tau^3; \quad \tau = t_0 + (i+1)h - t; \\ f_4(t) &= \tau^3, \quad \tau = t_0 + (i+2)h - t, \end{aligned}$$

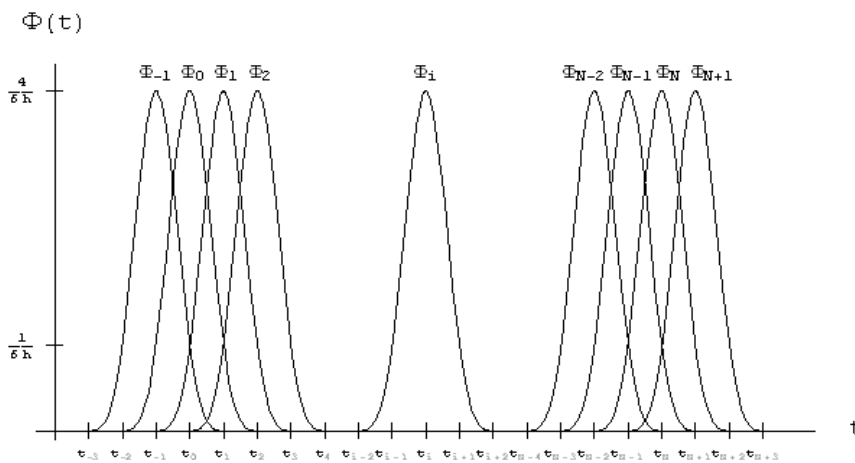
których wykresy przedstawia rysunek 7.

Dla funkcji regresji

$$\hat{y} = c_{-1}\Phi_{-1}(t) + c_0\Phi_0(t) + \dots + c_N\Phi_N(t) + c_{N+1}\Phi_{N+1}(t) \quad (11)$$

w danej bazie układ równań (5) przyjmuje postać

$$\begin{cases} c_{-1}^0 \sum_{k=0}^n \Phi_{-1}(t'_k)\Phi_{-1}(t'_k) + \dots + c_{n+1}^0 \sum_{k=0}^n \Phi_{N+1}(t'_k)\Phi_{-1}(t'_k) = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k \Phi_{-1}(t'_k), \\ \dots \\ c_{-1}^0 \sum_{k=0}^n \Phi_{-1}(t'_k)\Phi_{N+1}(t'_k) + \dots + c_{n+1}^0 \sum_{k=0}^n \Phi_{N+1}(t'_k)\Phi_{N+1}(t'_k) = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k \Phi_{N+1}(t'_k), \end{cases} \quad (12)$$



Rys. 7. Bazowe funkcje sklejane stopnia trzeciego na przedziale  $[t_0, t_N]$

Układ (12) przedstawimy w postaci macierzowej

$$\mathbf{BC} = \mathbf{G}$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n \Phi_{-1}(t'_k)\Phi_{-1}(t'_k) & \dots & \sum_{k=0}^n \Phi_{N+1}(t'_k)\Phi_{-1}(t'_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^n \Phi_{-1}(t'_k)\Phi_{N+1}(t'_k) & \dots & \sum_{k=0}^n \Phi_{N+1}(t'_k)\Phi_{N+1}(t'_k) \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-1} \\ \dots \\ c_{N+1} \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k \Phi_{-1}(t'_k), \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k \Phi_{N+1}(t'_k), \end{bmatrix} \quad (13)$$

Na przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$  są cztery nietożsamościowo równe zero funkcje postaci:

$$\Phi_{i-1}, \Phi_i, \Phi_{i+1}, \Phi_{i+2},$$

zatem  $\sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_j(t'_k) = 0$  dla  $|i-j| \geq 4$ , czyli  $\mathbf{B}$  jest macierzą wstęgową 7-diagonalną.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N+1};$$

$$\vartheta_i = \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N};$$

$$\eta_i = \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N-1};$$

$$\varsigma_i = \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N-2};$$

$$g_i = \sum_{k=0}^n \tilde{y}(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N+1}.$$

Przy takich oznaczeniach macierze układu (12) przyjmują postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_{-1} & \vartheta_{-1} & \eta_{-1} & \varsigma_{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vartheta_{-1} & \lambda_0 & \vartheta_0 & \eta_0 & \varsigma_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta_{-1} & \vartheta_0 & \lambda_1 & \vartheta_1 & \eta_1 & \varsigma_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \varsigma_{-1} & \eta_0 & \vartheta_1 & \lambda_2 & \vartheta_2 & \eta_2 & \varsigma_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \varsigma_0 & \eta_1 & \vartheta_2 & \lambda_3 & \vartheta_3 & \eta_3 & \varsigma_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varsigma_{N-4} & \eta_{N-3} & \vartheta_{N-2} & \lambda_{N-1} & \vartheta_{N-1} & \eta_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varsigma_{N-3} & \eta_{N-2} & \vartheta_{N-1} & \lambda_N & \vartheta_N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varsigma_{N-2} & \eta_{N-1} & \vartheta_N & \lambda_{N+1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ c_N \\ c_{N+1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{-1} \\ g_0 \\ \vdots \\ g_N \\ g_{N+1} \end{bmatrix}.$$

Macierz  $\mathbf{B}$  jest macierzą symetryczną, zatem istnieje jednoznaczny rozkład

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{U}^T,$$

gdzie macierze  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{W}$  mają odpowiednio postać:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_{-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_{-1} & p_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ r_{-1} & q_0 & p_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_0 & q_1 & p_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & r_{N-4} & q_{N-3} & p_{N-2} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & r_{N-3} & q_{N-2} & p_{N-1} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & r_{N-2} & q_{N-1} & p_N & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & w_{N-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & w_N & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & w_{N+1} & 0 \end{bmatrix}$$

i  $T$  oznacza transpozycję macierzy.

Rozkład macierzy  $\mathbf{B}$  można uzyskać metodą eliminacji Gaussa. Wzory do wyznaczenia  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{W}$  są następujące:

$$\begin{aligned}
 w_i &= \lambda_i - w_{i-1} + p_{i-1}^2 - w_{i-2}q_{i-2}^2 - w_{i-3}r_{i-3}^2; \\
 p_i &= \frac{1}{w_i}(\vartheta_i - w_{i-1}p_{i-1}q_{i-1} - w_{i-2}q_{i-2}r_{i-2}); \\
 q_i &= \frac{1}{w_i}(\eta_i - w_{i-1}p_{i-1}r_{i-1}); \\
 r_i &= \frac{\zeta_i}{w_i},
 \end{aligned}$$

gdzie:  $i \in \overline{-1, N+1}$ ;  $p_{i-2} = 0$ ;  $q_i = 0$  dla  $i \in \overline{-3, -2}$ ;  $r_i = 0$  dla  $i \in \overline{-4, -2}$ ;  $\zeta_i = 0$  dla  $i \in \overline{N-1, N+1}$ ;  $\eta_i = 0$  dla  $i \in \overline{N, N+1}$ ;  $\vartheta_{N+1} = 0$ .

Aby znaleźć rozwiązanie  $\mathbf{C}$  układu równań  $\mathbf{AC} = \mathbf{G}$ , czyli  $\mathbf{UWU}^T = \mathbf{G}$ , należy rozwiązać kolejno dwa układy równań:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{UZ} &= \mathbf{G}; \\
 \mathbf{WU}^T \mathbf{C} &= \mathbf{Z}
 \end{aligned}$$

według wzorów

$$\begin{aligned}
 z_i &= g_i - z_{i-1}p_{i-1} - z_{i-2}q_{i-2} - z_{i-3}r_{i-3}, \quad i \in \overline{-1, k+1}; \\
 c_i &= \frac{z_i}{w_i} - c_{i+3}r_i - c_{i+2}q_i - c_{i+1}p_i, \quad i \in \overline{k+1, -1}.
 \end{aligned}$$

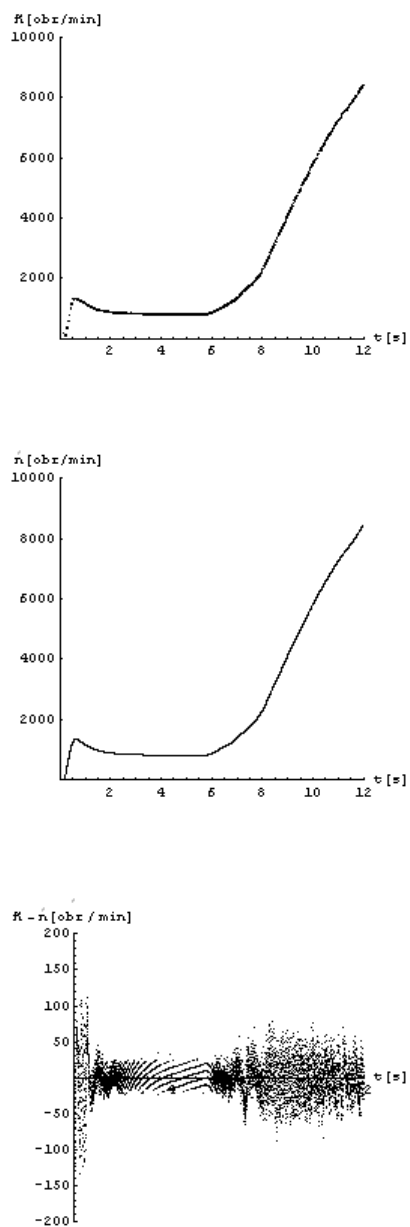
### PRZYKŁAD

Dla ilustracji przedstawionego algorytmu dokonano 5895\* pomiarów prędkości kątowej  $\omega$  obcowzbudnego silnika prądu stałego sterowanego od strony uzwojenia twornika, rejestrując wartości co 0.002 s.

Rysunek 8. przedstawia punkty pomiarowe  $(t_i, \tilde{y}_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5895$  oraz linię regresji  $\hat{y}$  uzyskaną opisaną metodą. Obliczenia przeprowadzono przy różnych liczbach  $N + 3$  funkcji sklepanych.

---

\* Pomiary zostały dokonane przez zespół naukowy prof. dr. hab. inż. Adama Charchalisa.



Rys. 8. Punkty pomiarowe  $(x_i, \tilde{y}_i)$ , wykres funkcji regresji  $\hat{y}$  oraz różnice między danymi pomiarowymi  $\tilde{y}$  a wartościami obliczonymi z regresji  $\hat{y}$

Do oceny modelu można skonstruować test  $F$  służący do badania istotności ocen współczynników funkcji regresji. W tym celu obliczymy

$$F = \frac{S_2^2 - S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{n_1 - N_2 - 3}{N_2 - N_1},$$

gdzie:  $S_1^2 = \sum_{k=0}^{n_1} [\hat{y}_k^1 - \bar{y}_1]^2$ ;  $S_2^2 = \sum_{k=0}^{n_1} [\hat{y}_k^2 - \bar{y}_1]^2$ ;  $N_1 + 3, N_2 + 3$  – liczba zadanych bazowych funkcji sklejanych. Statystyka  $F$  [3] ma rozkład Snedecora o  $n_1 - N_2 - 3$  i  $N_2 - N_1$  stopniach swobody i pozwala testować hipotezę, że różnica wariancji obu funkcji regresji jest równa zero. Z tablic rozkładu  $F$  Snedecora, dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  i przy  $n_1 - N_2 - 3, N_2 - N_1$  stopni swobody, odczytujemy wartość krytyczną  $F_{krytyczne}$ . Jeśli obliczone  $F \geq F_{krytyczne}$ , to hipotezę o równości wariancji odrzucamy, tzn. funkcje regresji różnią się od siebie. Obliczenia rozpoczęto od  $N_1 = 1$  (tzn. przy 4 funkcjach bazowych). Wyniki statystyczne przedstawia tabela 1. Na ich podstawie można wnioskować, że optymalną liczbą bazowych funkcji sklejanych jest  $n = 200$ . Przy większej liczbie bazowych funkcji współczynniki dopasowania różnią się nieznacznie. Zatem nie ma wyraźnej potrzeby rozbudowywania funkcji regresji.

Tabela 1. Wartości funkcji testowej

$n$	$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{n_1} (\hat{y}_k - \tilde{y}_k)^2}{n_1 - (n + 3)}}$	$\text{wsp\_zb} = \frac{\sum_{k=0}^{n_1} (\hat{y}_k - \tilde{y}_k)^2}{\sum_{k=0}^{n_1} (\tilde{y}_k - \bar{y})^2}$	$\text{wsp\_zm} = \frac{s}{\bar{y}} \cdot 100\%$	$F_{n, n+1}$	$\alpha = 0.05$ $F_{krytyczne}$
2	197.4948	6.5756E-03	7.72	87.14	3.00
3	160.2566	4.3283E-03	6.26	38.09	2.60
4	148.0326	3.6938E-03	5.78	17.29	2.37
5	104.3273	1.8340E-03	4.08	9.98	2.21
6	82.4755	1.1460E-03	3.22	4.12	2.14
7	72.8617	8.9426E-04	2.84	2.50	2.01
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	20.7330	7.0069E-05	0.79	0.96	1.17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
400	20.5996	6.6777E-05	0.78	0.91	1.11

Zastosowanie nadmiernej liczby bazowych funkcji znacznie wydłuża czas obliczeń i możliwości ich wykorzystania.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Kołodziej W., *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [2] Mańczak K., *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1979.
- [3] Rao C. R., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
- [4] Stieczkin S., Subbotin J., *Splines in mathematica*, Science, Moscow 1976.
- [5] Załęska-Fornal A., Zellma M., *Applications of Basic Splines to Identification of Sailing Object Equations*, „Zeszyty Naukowe” WSM (w druku).
- [6] Zawiałow J., Kwasow B., *Splines methods*, Science, Moscow 1980.

## ABSTRACT

The paper presents possibilities of using base spline functions to determine regression functions by means of most credibility method. The algorithm developed was used to describe the distribution of rotational speed in an electric engine. A statistical analysis of consistency of matching the model to measurement data was carried out.

Recenzent dr hab. Wiesław Zięba