

**Hubert Wysocki**

**O PEWNEJ METODZIE  
FUNKCJI MODULUJĄCYCH  
I JEJ ZASTOSOWANIU DO IDENTYFIKACJI  
RÓWNAŃ NOMOTO DLA OKRĘTU  
KLASY MARINER**

**STRESZCZENIE**

W pracy przedstawiono pewną modyfikację klasycznej metody Shinbrota identyfikacji układu dynamicznego za pomocą funkcji modulującej. Zaproponowana w artykule metoda dotyczy użycia większej liczby funkcji modulujących i rozwiązuje problem wyboru najlepszego modelu. Została przetestowana w identyfikacji wskaźników sterowności dla wybranego okrętu klasy Mariner.

**WSTĘP**

Metoda Shinbrota [12] polega na całkowaniu przez części równania opisującego dynamikę układu pomnożonego stronami przez odpowiednio dobraną dla tej metody funkcję. Funkcja ta nie zależy od sygnałów na wejściu i na wyjściu układu. Dla tego rodzaju niezależności została nazwana funkcją modulującą (por. [4]). Całkowanie odbywa się po różnych podprzedziałach czasowych przedziału obserwacji układu, tyle razy, ile wynosi liczba identyfikowanych współczynników modelu. W ten sposób, dla danej pary sygnałów wejście-wyjście, dochodzimy do układu równań, którego rozwiązanie daje zidentyfikowane parametry modelu. W pracy proponuje się zastosowanie większej liczby funkcji modulujących, co umożliwi całkowanie po całym przedziale obserwacji dynamiki układu, czyli uwzględnienie całego przebiegu sygnału w danym całkowaniu. Rozważa się układ dynamiczny opisany liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu  $m$  dla wejścia i rzędu  $n$  dla wyjścia. Taki układ w metodzie Shinbrota nie był rozpatrywany.

Ponadto, w metodzie klasycznej nie rozważa się problemu wyboru najlepszego modelu z danej klasy modeli opisujących identyfikowany obiekt sterowania. W artykule zagadnienie to zostanie rozwiązane poprzez zastosowanie twierdzenia o rzucie ortogonalnym w przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  ze zwykłym iloczynem skalarnym.

Opracowana metoda zostanie zilustrowana przykładami identyfikacji współczynników równań różniczkowych Nomoto rzędu pierwszego i drugiego dla wybranego okrętu klasy Mariner [Mariner Class Vessel – (MCV)]. Statki tej klasy były projektowane w połowie lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia i obecnie nie są już eksploatowane [5].

## IDENTYFIKACJA UKŁADU DYNAMICZNEGO

Dla uproszczenia zapisów wprowadzimy następujące operacje:

$$Sx := \frac{dx}{dt}, \quad s_{t_0}x := x(t_0), \quad R_{t_0}^{t_k}x := x(t_k) - x(t_0), \quad I_{t_0}^{t_k}x := \int_{t_0}^{t_k} x(t)dt,$$

gdzie  $x = x(t)$ .

Ponadto niech  $L^n := C^n([t_0, t_k], \mathbb{R})$  oraz  $\overline{k, l} := \{k, k+1, \dots, l\}$ , gdzie  $k, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $k < l$ .

Niech będzie dany liniowy stacjonarny układ dynamiczny o parametrach skupionych opisany równaniem różniczkowym

$$a_n S^n y + a_{n-1} S^{n-1} y + \dots + a_1 S y + a_0 y = b_m S^m u + b_{m-1} S^{m-1} u + \dots + b_1 S u + u, \quad (1)$$

gdzie  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{0, n}$ ,  $j \in \overline{1, m}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$

oraz

$$u = u(t) \in L^m, \quad y = y(t) \in L^n.$$

Funkcję  $f = f(t) \in L^n$  spełniającą warunki

$$f \notin \text{Ker } S^n, s_i S^i f = 0, t \in \{t_0, t_k\}, i \in \overline{0, n-1} \quad (2)$$

nazywamy funkcją modulującą  $n$ -tego stopnia układu (1) (odpowiadającą chwilom  $t_0, t_k$ ). Jest oczywiste, że funkcja modulująca stopnia  $n' > n$  jest funkcją modulującą stopnia  $n$ .

Niech para sygnał wejściowy-sygnał wyjściowy

$$(u, y) \in [L^m \setminus \{0\}] \times L^n$$

spełnia równanie (1) przy danych współczynnikach  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ . Wobec tego dla dowolnych  $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^n, k \geq m + n + 1$  z (1) otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^n a_i I_{t_0}^{t_k} (f_\nu \cdot S^i y) = \sum_{i=1}^m b_i I_{t_0}^{t_k} (f_\nu \cdot S^i u) + I_{t_0}^{t_k} (f_\nu \cdot u), \nu \in \overline{1, k}. \quad (3)$$

Zachodzi następujący ogólny wzór na całkowanie przez części (por. [14, 15]):

$$I_{t_0}^{t_k} (x \cdot S^i y) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i R_{t_0}^{t_k} (S^i x \cdot S^{n-1-i} y) + (-1)^n I_{t_0}^{t_k} (S^n x \cdot y), \quad (4)$$

gdzie  $x, y \in L^n$ .

Stosując do ostatnich  $n$  składników lewej strony i do  $m$  pierwszych składników prawej strony każdej z równości (3) wzór (4) na całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n a_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j R_{t_0}^{t_k} (S^j f_\nu \cdot S^{i-1-j} y) \right] + \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_\nu \cdot y) \\ & = \sum_{i=1}^m b_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j R_{t_0}^{t_k} (S^j f_\nu \cdot S^{i-1-j} u) \right] + \sum_{i=1}^m (-1)^i b_i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_\nu \cdot u) + I_{t_0}^{t_k} (f_\nu \cdot u), \nu \in \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Zakładając, że  $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^n$  są elementami modulującymi co najmniej  $n$ -tego stopnia układu dynamicznego (1) (przy  $t_0, t_k$ ), z (5) uzyskujemy:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_\nu \cdot y) + \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} b_i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_\nu \cdot u) = I_{t_0}^{t_k} (f_\nu \cdot u), \nu \in \overline{1, k}.$$

Układ ten możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{w}, \quad (6)$$

gdzie

$$\alpha_i := \begin{cases} a_i & \text{dla } i \in \overline{0, n} \\ b_{i-n} & \text{dla } i \in \overline{n+1, m+n} \end{cases} \quad (7)$$

oraz

$$\mathbf{v}_i := \begin{bmatrix} (-1)^i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_1 \cdot y) \\ \vdots \\ (-1)^i I_{t_0}^{t_k} (S^i f_k \cdot y) \end{bmatrix}, \nu \in \overline{0, n}; \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_i := \begin{bmatrix} (-1)^{i-n+1} I_{t_0}^{t_k} (S^{i-n} f_1 \cdot u) \\ \vdots \\ (-1)^{i-n+1} I_{t_0}^{t_k} (S^{i-n} f_k \cdot u) \end{bmatrix}, \nu \in \overline{n+1, m+n}; \quad (9)$$

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} I_{t_0}^{t_k} (f_1 \cdot u) \\ \vdots \\ I_{t_0}^{t_k} (f_k \cdot u) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ponadto

$$\mathbf{v}_i, \mathbf{w} \in \bigoplus_{\nu=1}^k \text{Ker } S \approx \mathbb{R}^k, i \in \overline{0, m+n}. \quad (11)$$

Założmy teraz, że parametry układu (1) nie są znane. Zbiór złożony z pary sygnałów

$$(\text{SI})_1 := \{ (u^*, y^*) : u^* \in L^m \setminus \{0\}, y^* \in L^n \} \quad (12)$$

służących do zidentyfikowania współczynników równania (1) nazywamy serią identyfikującą (jednoelementową) [1]. W praktyce funkcje  $u^* = u^*(t), y^* = y^*(t)$  wyznaczone są drogą aproksymacji, na podstawie wartości pomiarowych sygnału wejściowego i odpowiadającego mu sygnału wyjściowego uzyskanych podczas normalnej pracy układu sterowania.

Z uwagi na izomorfizm (11) dalsze rozważania będziemy prowadzili w przestrzeni Hilberta  $H := \ell_k^2$ , w której iloczyn skalarny

$$(\mathbf{v} | \mathbf{w}) := \sum_{\nu=1}^k V_\nu W_\nu, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell_k^2 \quad (13)$$

wyznacza normę

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\sum_{\nu=1}^k V_\nu^2}, \quad \mathbf{v} \in \ell_k^2. \quad (14)$$

Przez identyfikację układu dynamicznego (1) będziemy rozumieli zagadnienie doboru współczynników równania (1) przy serii identyfikującej (12) tak, aby funkcjonal (tzw. wskaźnik jakości identyfikacji)

$$\|J_f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+n})\| := \left\| \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i \mathbf{v}_i^* - \mathbf{w}^* \right\| \quad (15)$$

osiągał minimum, gdzie  $\mathbf{f} := [f_1, f_2, \dots, f_k]$  jest ustalonym wektorem funkcji modulujących co najmniej  $n$ -tego stopnia (odpowiadających chwilom  $t_0, t_k$ ), natomiast  $\mathbf{w}^*, \mathbf{v}_i^*, i \in \overline{0, m+n}$  są wektorami postaci (8) – (10) wyznaczonymi dla serii (12).

Zagadnienie wyboru najlepszego modelu z klasy

$$\mathbf{K} := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i S^i y = \sum_{i=1}^m b_i S^i u + u : a_i, b_j \in \mathbf{R}, i \in \overline{0, n}, j \in \overline{1, m} \right\}$$

w sensie minimalizacji wskaźnika jakości (15) rozwiążemy, stosując następujące twierdzenie o rzucie ortogonalnym:

**TWIERDZENIE [9].** Niech  $H_0$  będzie domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni Hilberta  $H$ . Wówczas każdemu elementowi  $\mathbf{x} \in H$  odpowiada jeden i tylko jeden element  $\mathbf{h}_0 \in H_0$ , taki że  $\|\mathbf{x} - \mathbf{h}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{h}\|$  dla wszystkich  $\mathbf{h} \in H_0$ . Ponadto  $\mathbf{h}_0 \in H_0$  minimalizuje wyrażenie  $\|\mathbf{x} - \mathbf{h}\|$  wtedy i tylko wtedy, gdy element  $\mathbf{x} - \mathbf{h}_0$  jest ortogonalny do  $H_0$ .

Element  $\mathbf{h}_0$  nazywamy rzutem ortogonalnym elementu  $\mathbf{x}$  na podprzestrzeń  $H_0$ . Omawiana metoda wymaga, aby spełnione było założenie, że

$$\mathbf{B} := \{ \mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_{m+n}^* \} \quad (16)$$

jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w  $\ell_k^2$ . Założenie to nazywamy warunkiem identyfikowalności układu (1), natomiast serię identyfikującą (12), dla której ten warunek jest spełniony – serią identyfikowalną (por. [1]).

Założmy więc, że warunek identyfikowalności układu (1) jest spełniony. Ponadto niech

$$\text{Lin } \mathbf{B} := \left\{ \mathbf{w} = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i \mathbf{v}_i^* : \alpha_i \in \mathbf{R}, \mathbf{v}_i^* \in \mathbf{B}, i \in \overline{0, m+n} \right\}.$$

Ponieważ  $\dim \text{Lin } \mathbf{B} = m + n + 1$ , więc hiperpłaszczyzna  $\text{Lin } \mathbf{B}$  jako podprzestrzeń skończenie wymiarowa przestrzeni unormowanej  $\ell_k^2$  jest zbiorem domkniętym [7]. Interesuje nas wyznaczenie takiego elementu

$$\mathbf{w}_0 = \alpha_0^0 \mathbf{v}_0^* + \alpha_1^0 \mathbf{v}_1^* + \dots + \alpha_{m+n}^0 \mathbf{v}_{m+n}^*$$

powłoki liniowej  $\text{Lin } \mathbf{B}$ , który jest położony najbliższej [w sensie normy (14)] danego elementu  $\mathbf{w}^*$ . Mamy zatem znaleźć taki układ  $(\alpha_0^0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{m+n}^0)$  liczb rzeczywistych, żeby

$$\|\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_0\| = J_f(\alpha_0^0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{m+n}^0) = \min \{ J_f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}) : \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{0, m+n} \}.$$

Z twierdzenia o rzucie ortogonalnym wynika istnienie i jednoznaczność poszukiwanego wektora  $\mathbf{w}_0$  oraz prostopadłość różnicy  $\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_0$  do każdego z wektorów  $\mathbf{v}_i^*, i \in \overline{0, m+n}$  bazy  $\mathbf{B}$ . Mamy więc

$$(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_0 | \mathbf{v}_j^*) = (\mathbf{w}^* - \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i^0 \mathbf{v}_i^* | \mathbf{v}_j^*) = 0, \quad j \in \overline{0, m+n}.$$

Stąd i z własności iloczynu skalarnego (13) otrzymujemy układ równań normalnych na optymalne współczynniki  $\alpha_0^0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{m+n}^0$

$$\sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i^0 (\mathbf{v}_i^* | \mathbf{v}_j^*) = (\mathbf{w}^* | \mathbf{v}_j^*), \quad j \in \overline{0, m+n}, \quad (17)$$

którym – według zależności (7) – odpowiadają optymalne parametry układu dynamicznego (1). Do obliczeń numerycznych wygodnie jest przedstawić układ (17) w postaci wektorowo-macierzowej

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}, \quad (18)$$

gdzie  $\mathbf{C} = [c_{ij}] := [(\mathbf{v}_i^* | \mathbf{v}_j^*)]$ ,  $\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_i^0]$ ,  $\mathbf{d} = [d_j] := [(\mathbf{w}^* | \mathbf{v}_j^*)]$ ,  $i, j \in \overline{0, m+n}$ .

Równanie (18) ma jednoznaczne rozwiązanie, ponieważ wyznacznik macierzy  $\mathbf{C}$  jest wyznacznikiem Grama, który jest różny od zera (co jest równoważne warunkowi identyfikowalności układu dynamicznego (1), por. [9]).

Opracowane zagadnienie identyfikacji sprawdzimy na przykładach wyznaczania parametrów Nomoto dla wybranego okrętu klasy Mariner.

## PRZYKŁADY

**PRZYKŁAD 1.** Badając sterowność statku, korzysta się z dwóch prostokątnych układów współrzędnych (rys. 1.):

- nieruchomego prawoskrętnego układu współrzędnych geograficznych  $(X_0, Y_0)$  leżącego w płaszczyźnie wody spokojnej, z osią  $X_0$  skierowaną w kierunku północy;
- nieruchomego, sztywno związanego ze statkiem prawoskrętnego układu  $GXY$  leżącego w płaszczyźnie równoległej do wodnicy konstrukcyjnej, którego początek jest środkiem ciężkości  $G$  masy statku, a oś  $X$  skierowana jest ku dziobowi.

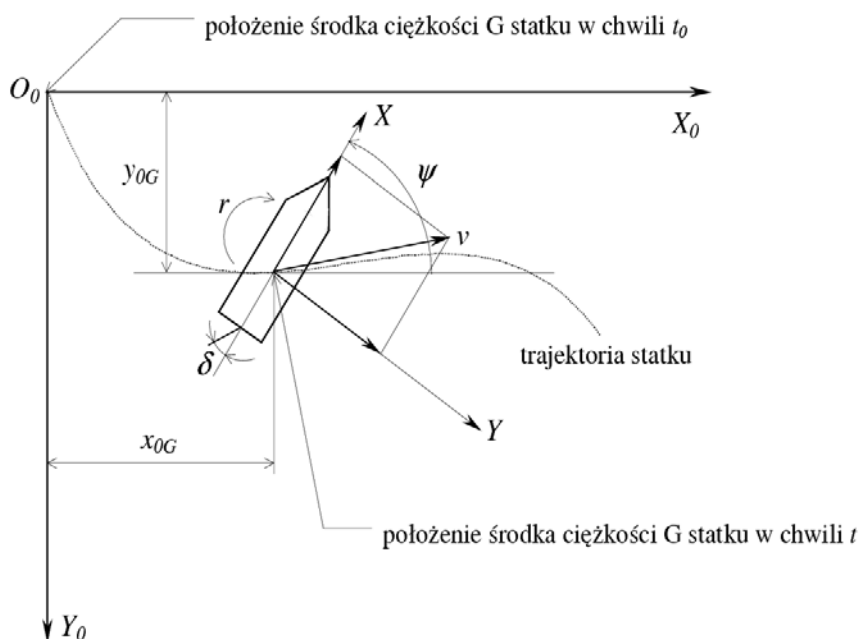
Ograniczając rozważania do ruchu statku w układzie  $OX_0Y_0$ , wykazuje się, że liniowe równanie różniczkowe sterowności statku opisujące zależność między kątem wychylenia steru  $\delta(t)$  a prędkością kątową  $r(t)$  obrotu statku (myszgowania) ma postać [10]

$$Tr'(t) + r(t) = K\delta(t). \quad (19)$$

Równanie (19) oraz parametry  $K, T$  nazywamy odpowiednio równaniem Nomoto rzędu pierwszego i współczynnikami Nomoto.

Równanie Nomoto stosuje się dla małych wartości  $\delta_0$  kąta wychylenia steru, przy czym sterowanie jest najczęściej liniowo-stałe, „trapezowe” lub „sinusoidalne”. Równanie to obowiązuje w przedziale czasu  $[t_0, t_k]$ , w którym występuje niewielka liczba zmian steru z jednej burty na drugą (niewielka częstotliwość akcji steru) i warunki żeglugi nie ulegają istotnym zmianom [13, 3, 8].





Rys. 1. Ruch statku w układzie współrzędnych  $OX_0Y_0$

Model Nomoto rzędu pierwszego jest stosowany w projektowaniu regulatorów kursu w autopilotach sterowania statkiem. Parametry  $K$  i  $T$  zależą m.in. od prędkości i załadunku statku, jego własności hydrodynamicznych, a także od stanu morza, rodzaju akwenu i wartości meteorologicznych (falowania i wiatru). Współczynnik wzmocnienia  $K$  (skuteczności steru) charakteryzuje zwrotność statku, natomiast stała czasowa  $T$  – stateczność kursową i szybkość reakcji statku na wychylenie steru. Ze wzrostem wartości  $\delta_0$  wychylenia steru parametry  $K, T$  maleją, jednak stosunek  $\mu = K/T$ , nazywany wskaźnikiem Nomoto, pozostaje w przybliżeniu stały. Służy on do oceny zwrotności statku [8].

Równanie (19) stanowi przypadek szczególnej zależności (1) dla  $n = 1, m = 0$ , gdzie  $u = \delta(t)$  oraz  $y = r(t)$ .

Dla statku klasy Mariner (MCV) o następujących parametrach [2]:

- długość całkowita  $L_c = 171.8$  [m];
- maksymalna szerokość  $B = 23.17$  [m];
- zanurzenie średnie  $T = 6.86$  [m];
- długość między pionami  $L = 160$  [m];

- masa statku  $m = 17050$  [t];
- wyporność  $W = 16622$  [m<sup>3</sup>];
- środek ciężkości  $X_G = 3.70$  [m];
- prędkość nominalna  $V = 7.716$  [m/s];
- pole powierzchni czołowej okrętu  $A_f = 416.4$  [m<sup>2</sup>];
- pole powierzchni bocznej okrętu  $A_s = 1540.1$  [m<sup>2</sup>];
- nominalne obroty śruby okrętowej  $n = 7.151$  [rad/s];
- maksymalna prędkość kątowna wychylenia steru  $\delta' = 3.5$  [°/s];
- gęstość wody  $\rho_w = 1025$  [kg/m<sup>3</sup>];
- gęstość powietrza  $\rho_a = 1.23$  [kg/m<sup>3</sup>]

współczynnik wzmocnienia i stała czasowa wynoszą odpowiednio [5]:

$$K = 0.1830 \text{ [1/s]}, \quad T = 105.64 \text{ [s]}. \quad (20)$$

Rząd równania (19) jest równy  $n = 1$ , zatem minimalna liczba funkcji modulujących potrzebnych do identyfikacji wynosi  $k = 2$ .

Przy wyznaczaniu wskaźników Nomoto często korzysta się z funkcji wychylenia steru postaci [3]

$$u = \delta(t) = \begin{cases} \delta_0 \frac{t}{t_r} & \text{dla } 0 \leq t < t_r \\ \delta_0 & \text{dla } t \geq t_r \end{cases}, \quad (21)$$

gdzie  $t_r = 2\delta_0/\delta'$  jest czasem potrzebnym do osiągnięcia wartości  $\delta_0$ , natomiast  $\delta'$  jest prędkością kątowną wychylenia steru [6].

Dla rozważanego okrętu (MCV) przyjmiemy bezpieczną prędkość kątowną  $\delta' = 2.8$  [°/s] oraz  $\delta_0 = 7$  [°]. Wówczas  $t_r = 5$  [s]. Mamy zatem

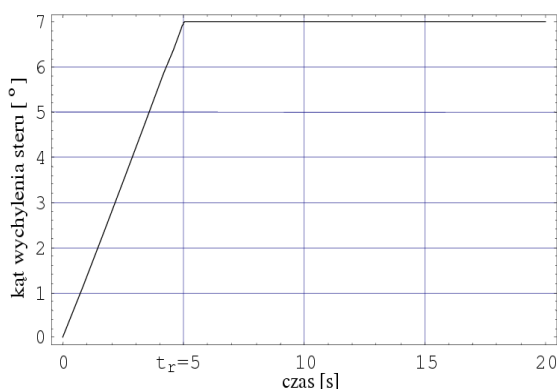
$$u^* = \delta^*(t) = \begin{cases} 1.4t & \text{dla } 0 \leq t < 5 \\ 7 & \text{dla } t \geq 5 \end{cases}. \quad (22)$$

Wykres tego sygnału w przedziale obserwacji  $[0,20]$  przedstawia rysunek 2., natomiast rysunek 3. przedstawia rozwiązanie numeryczne równania (19) przy współczynnikach Nomoto (20) i warunku początkowym  $r(0) = 0$ .

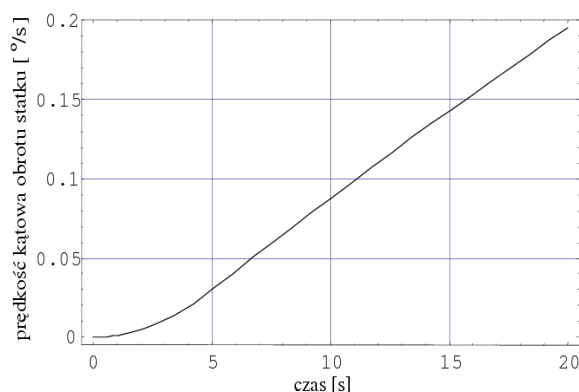
W tabeli 1. zamieszczono wyniki identyfikacji współczynników równania Nomoto dla serii identyfikującej

$$(SI)_1 := \{(\delta^*(t), r^*(t))\}, \quad (23)$$

gdzie  $\delta^*(t)$  jest sygnałem (22), natomiast  $r^*(t)$  odpowiedzią na ten sygnał, przedstawioną na rysunku 3. Identyfikację przeprowadzono w przedziale obserwacji  $[0,20]$ , odpowiednio dla  $k = 2, 3$  funkcji modulujących. Za każdym razem otrzymano wyniki bardzo zbliżone do (20). Należy również pamiętać, że przedstawione w tabeli 1. parametry Nomoto są optymalne w sensie minimalizacji funkcjonału  $J_f$  dla serii identyfikującej (23) i ustalonego wektora  $\mathbf{f}$  funkcji modulujących.



Rys. 2. Funkcja wychylenia steru (22)



Rys. 3. Prędkość kąтова obrotu statku jako odpowiedź na wychylenie steru wg zależności (22)

Tabela 1. Identyfikacja równania Nomoto (19)

$[t_0, t_k] = [0, 20]$ $u = \delta(t), y = r(t)$	$a_1 y' + a_0 y = u$				
	$a_0^0$	$a_1^0$	$K$	$T$	$J_f$
funkcje modulujące					
$t(t-20)\exp(-t)$ $t \sin(t-20)$	5.46448	577.26804	0.18300	105.64000	$7.10543 \times 10^{-15}$
$\sin^2[t(t-20)]$ $[(1-\cos t)(1-\cos(t-20))]^2$	5.46452	577.26738	0.18300	105.63903	$2.32929 \times 10^{-12}$
$(t-20)\sin t$ $t \sin(t-20)$ $\cos 0.1\pi t + \cos 0.2\pi t - 2$	5.46449	577.26787	0.18300	105.63984	$2.21300 \times 10^{-4}$

W 1960 roku Nomoto przedstawił metodę wyznaczania parametrów  $K, T$  na podstawie tzw. próby wężowej (próby Kempfa, próby „zig-zag”) [11], która według standardów opracowanych przez Międzynarodową Organizację Morską (IMO) musi spełniać ściśle określone warunki.

W metodzie zaproponowanej w tym artykule można oczywiście wykorzystać sygnały  $\delta^*(t), \psi^*(t)$  (gdzie  $r = \psi'(t)$  i  $\psi(t)$  jest kątem kursowym statku) otrzymywane podczas próby „zig-zag”. Generalnie nie wymaga ona jednak tak długiej rejestracji sygnałów. Mogą one być uzyskiwane podczas normalnego kursu statku.

**PRZYKŁAD 2.** Oprócz równania Nomoto rzędu pierwszego rozważa się również, obowiązujący przy tych samych założeniach co poprzednio, model rzędu drugiego [10]

$$T_1 T_2 r''(t) + (T_1 + T_2) r'(t) + r(t) = K [T_3 \delta'(t) + \delta(t)], \quad (24)$$

w którym stałe  $T_1, T_2, T_3, K$  charakteryzują sterowność statku.

Jeżeli  $T_1, T_2 > 0$ , to statek ma stateczność ruchu prostoliniowego, która zapewnia poruszanie się stałym kursem ze sterem w położeniu neutralnym, na spokojnej wodzie i przy bezwietrznej pogodzie. Ponadto, im większe wartości  $T_1, T_2$ , tym szybciej statek zmienia kurs pod wpływem akcji steru, czyli jest bardziej zwrotny. Im większa jest wartość parametru  $T_3$ , tym większy wpływ na sterowność statku ma prędkość wychylenia steru. Wskaźnik  $K$ , charakteryzujący zwrotność statku, jest miarą prędkości zmiany kursu przy zadanym kącie wychylenia steru [3].

Między stałą czasową  $T$  występującą w równaniu Nomoto rzędu pierwszego (19) a parametrami modelu (24) zachodzi związek [10]:

$$T = T_1 + T_2 - T_3. \quad (25)$$

Dla okrętu (MCV) rozważanego w przykładzie 1. parametry równania Nomoto (24) wynoszą odpowiednio [5]:

$$K = 0.1830 [1/s], \quad T_1 = 7.91 [s], \quad T_2 = 116.28 [s], \quad T_3 = 18.55 [s]. \quad (26)$$

Rząd równania (24) wynosi  $m = 1$  dla wejścia i  $n = 2$  dla wyjścia, zatem minimalna liczba funkcji modulujących potrzebnych do identyfikacji jest równa  $k = 4$ . Sygnału wejściowego (22) nie możemy brać pod uwagę, ponieważ nie jest on elementem przestrzeni  $L^2 = C^2([0, 20], \mathbb{R})$ , gdzie  $[0, 20]$  jest przedziałem obserwacji sterowności okrętu. Wobec tego jako  $u = u(t)$  przyjmujemy funkcję

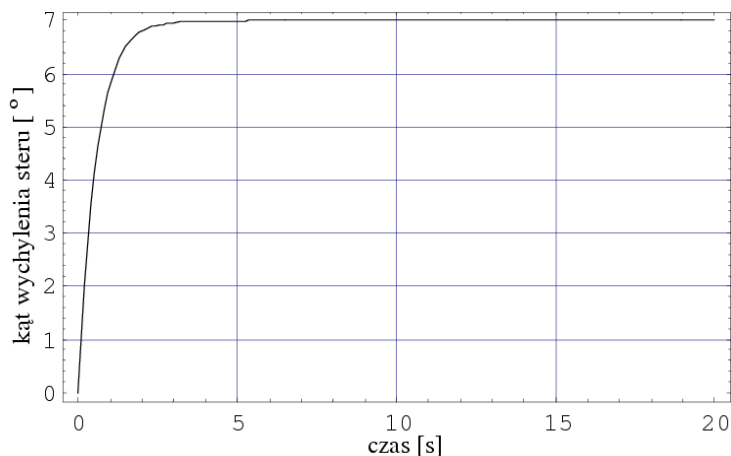
$$u = \delta(t) := \delta_0 (1 - e^{-\kappa t}),$$

która dobrze przybliża przedziałami liniową funkcję (21), jeżeli  $\kappa \approx 0.4/t'_r$ , gdzie  $t'_r = t_r V / L_c$  jest bezwymiarowym czasem wychylenia steru [3].

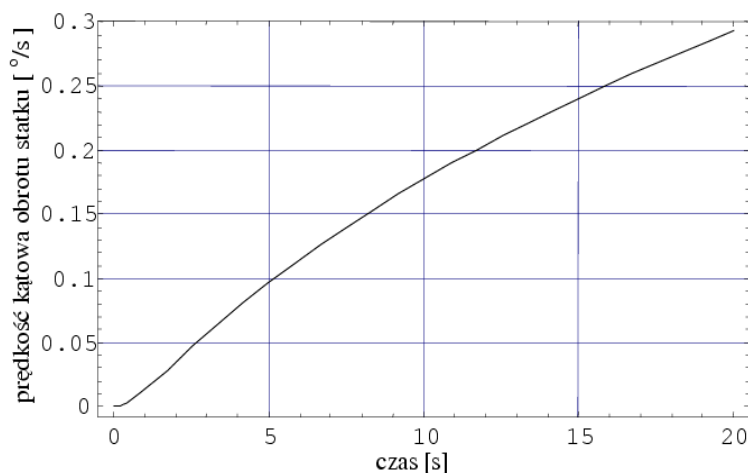
Uwzględniając dane (MCV), otrzymujemy  $t'_r \approx 0.22$ ,  $\kappa \approx 1.78$  oraz

$$u^* = \delta^*(t) = 7(1 - e^{-1.78t}). \quad (27)$$

Wykres funkcji (27) w przedziale obserwacji  $[0,20]$  zamieszczono na rysunku 4., natomiast odpowiedź numeryczną układu (24) na ten sygnał przy danych wskaźnikach (26) i warunkach początkowych  $r(0) = r'(0) = 0$  na rysunku 5.



Rys. 4. Funkcja wychylenia steru (27)



Rys. 5. Prędkość kątowa okrętu jako odpowiedź na wychylenie steru wg zależności (27)

Tabela 2. Identyfikacja równania Nomoto (24)

$[t_0, t_k] = [0, 20]$ $u = \delta(t)$ $y = r(t)$ funkcje modulujące	$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 u' + u$ $u^* = \delta^*(t) = 7(1 - e^{-1.78t})$ , $y^*$ = rozw. numeryczne, rys. 5 $a_0 = 1/K$ , $a_1 = (T_1 + T_2)/K$ , $a_2 = T_1 T_2/K$ , $b_1 = T_3$					
	$a_0^0$	$a_1^0$	$a_2^0$	$b_1^0$	$J_f$	$T$
	$K$	$T_1$	$T_2$	$T_3$		
$\sin^2[t(t-20)]$ $[(1 - \cos t)(1 - \cos(t-20))]^2$ $[t(1 - \cos(t-20))]^2$ $[t \sin(t-20)]^2$	5.46555	678.59090	5025.52224	18.54766	$6.04510 \times 10^{-9}$	105.61016
$\exp(-t)[t(t-20)]^2$ $[t \sin(t-20)]^2$ $[(t-20) \sin t]^2$ $[\sin t \sin(t-20)]^2$ $[\cos 0.1\pi t - 1]^2$	0.18296	7.90973	116.24802	18.54766		
$[\cos 0.1\pi t + \cos 0.2\pi t - 2]^2$ $[\exp(-t)[t(t-20)]^2$ $[\cos 0.1\pi t - 1]^2$ $[(t-20) \sin t]^2$ $[\sin t \sin(t-20)]^2$	5.46502	678.61157	5025.78200	18.54890	$3.71850 \times 10^{-5}$	105.62479
$[\cos 0.1\pi t + \cos 0.2\pi t - 2]^2$ $[\exp(-t)[t(t-20)]^2$ $[\cos 0.1\pi t - 1]^2$ $[(t-20) \sin t]^2$ $[\sin t \sin(t-20)]^2$	0.18298	7.90983	116.26386	18.54890		
$[\cos 0.1\pi t + \cos 0.2\pi t - 2]^2$ $[\exp(-t)[t(t-20)]^2$ $[\cos 0.1\pi t - 1]^2$ $[(t-20) \sin t]^2$ $[\sin t \sin(t-20)]^2$	5.46502	678.61208	5025.79560	18.54894	$8.83176 \times 10^{-5}$	105.62483
$[\cos 0.1\pi t + \cos 0.2\pi t - 2]^2$ $[\exp(-t)[t(t-20)]^2$ $[\cos 0.1\pi t - 1]^2$ $[(t-20) \sin t]^2$ $[\sin t \sin(t-20)]^2$	0.18298	7.90985	116.26392	18.54894		

Tabela 2. przedstawia wyniki identyfikacji współczynników równania Nomoto (24) dla serii identyfikującej

$$(SI)_1 := \{(\delta^*(t), r^*(t))\},$$

gdzie  $\delta^*(t)$  jest sygnałem (27), natomiast  $r^*(t)$  odpowiedzią na ten sygnał przedstawioną na rysunku 5. Identyfikację przeprowadzono odpowiednio dla  $k = 4, 5, 6$  funkcji modulujących i za każdym razem otrzymano wyniki bardzo zbliżone do (26). Tabela zawiera również wartości stałej czasowej  $T$  obliczanej według wzoru (25). Różnią się one nieznacznie od stałej  $T = 105.64$  [s] przyjętej w modelu Nomoto rzędu pierwszego, rozważanym w przykładzie 1.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Bubnicki Z., *Identyfikacja obiektów sterowania*, PWN, Warszawa 1974.
- [2] Chislett M., Tejsen J. S., *Planar motion mechanism tests and full scale steering and manoeuvring predictions for mariner class vessel*, Technical Report Hy-6, Hydro and Aerodynamics Laboratory, Lyngby (Denmark), 1965.
- [3] Dudziak J., *Teoria okrętu*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1988.
- [4] Eykhoff P., *System identification. Parameter and state estimation*, John Wiley and Sons, London 1974.
- [5] Hansen A. D., *Predictive control and identification: Applications to steering dynamics*, Ph. D Thesis, Department of Mathematical Modelling (IMM), Control Group, Lyngby, Technical University of Denmark, 1996.
- [6] Journee J. M. J., *A simple method for determining the manoeuvring indices K and T from zigzag trial data*, Delft University of Technology, Ship Hydro-mechanics Laboratory (Netherlands), Report 0267, June 1970 (Translated Report, November 2000). Internet: <http://www.shipmotions.nl>
- [7] Kołodziej W., *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
- [8] Lisowski J., *Statek jako obiekt sterowania automatycznego*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1981.
- [9] Luenberger D. G., *Optimization by vector space methods*, John Wiley and Sons, New York 1969.



- [10] Nomoto K., Taguchi K., Honda K., Hirano S., *On the steering qualities of ships*, „International Shipbuilding Progress”, 1957, Vol. 4, No 35.
- [11] Nomoto K., *Analysis of Kempf's Standard Maneuver Test and Proposed Steering Quality Indices*, Proceedings of 1st Symposium on Ship Manoeuvrability, 1960.
- [12] Shinbrot M., Field M., *On the analysis of linear and nonlinear systems*, „Transactions on the ASME”, 1957, Vol. 79.
- [13] Wełnicki W., *Sterowność okrętu*, PWN, Warszawa 1966.
- [14] Wysocki H., *On an operational calculus with weighting element*, „Studia Sci. Mathematicarum Hungarica”, 1994, Vol. 29.
- [15] Wysocki H., *Zastosowanie rachunku operatorów w wybranych problemach teorii liniowych układów dynamicznych*, „Zeszyty Naukowe” AMW, 1996, 128 C.

### ABSTRACT

The paper presents a modification of classic Shinbrot method used to identify a dynamic system by means of modulating function. The method proposed in the paper refers to application of a larger number of modulating functions and solves the problem of best model selection. It was tested for identification of steerability indicators for a selected Mariner class ship.

Recenzent dr hab. Wiesław Zięba