

ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ  
ROK XXXV Nr 3/122/94

Antoni KAMUSIŃSKI

RÓWNANIA TRAJEKTORII CIAŁ  
W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA,  
UWZGLĘDNIAJĄCE BILANS ENERGETYCZNO-MASOWY

STRESZCZENIE

W pracy wykazano, że moment prędkości ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia jest wartością stałą, mimo założenia zmienności masy tego ciała. Przedstawiono zarówno klasyczne równania /zakładające stałość masy / trajektorii ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia, jak i równania tej trajektorii, przy uwzględnieniu zmienności masy ciała. Zmienność masy opisano w funkcji jego prędkości i w funkcji promienia wodzącego. Zmienność masy w funkcji prędkości wyrażono dwoma różnymi równaniami i wykazano możliwość oceny ich poprawności - przez porównanie trajektorii opartych na obliczeniach z trajektorią obserwowaną.

WSTĘP

Istotną rolę w odkryciu przez I. Newtona prawa powszechnego ciężenia odegrały sformułowane na początku XVII w. przez J. Keplera trzy prawa ruchu planet dokoła Słońca:

- I- każda planeta porusza się po elipsie, w której w jednym z ognisk znajduje się Słońce;
- II- pola zakreślone w równych czasach przez promień wodzący planety są sobie równe;

III- sześciiany średnich odległości planet od Słońca mają się do siebie jak kwadraty okresów ich obiegów dokoła Słońca.

Drugie prawo Keplera pozwoliło stwierdzić, że siła działająca na planety jest centralna i jej kierunek przechodzi przez środek Słońca. Z pierwszego prawa Keplera- przy tych samych założeniach - wynika, że siła przyciągania jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości, zaś z trzeciego, że na wszystkie planety działa ta sama siła.

U podstaw teorii grawitacji leżą więc prace Keplera i Newtona. Prawa Keplera i Newtona nie tłumaczą jednak obrotu samych orbit planet, co w układzie słonecznym najbardziej dostrzegalne jest dla Merkurego /planety leżącej stosunkowo blisko Słońca/.

Matematyczny opis zjawiska powszechnego ciężenia, uwzględniający obrót orbit planet, jest częścią ogólnej teorii względności. Autor podjął próbę uzyskania prostego równania ruchu planet, które opisywało by również efekt obrotu ich orbit. Jest oczywiste, że w próbie tej musiano wprowadzić do równań klasycznych pewne niewielkie modyfikacje. Polegają one głównie na usunięciu niejednoznaczności kilku pojęć. Najbardziej istotną modyfikacją jest wykluczenie pewnika, że masa ciała jest wielkością stałą. Dziś wydaje się to banałem, ale chodzi o to, by zasada ta dotyczyła równań klasycznych. Ruch planet opisano w inercjalnym /praktycznie/ układzie odniesienia związanym z ciałem centralnym /Słońcem/, zaś planety w obliczeniach potraktowano jako ciała próbne. Przyjęto sceptyczny punkt widzenia, że opisywanie prawd absolutnych jest w fizyce pozbawione sensu. Można jednak opisywać prawdy mające istotne znaczenie praktyczne /przyjmowanie sensownych założeń upraszczających jest na pewnym etapie rozważań naukowych koniecznością/.

Przedstawione tu rozważania są kontynuacją pracy [ 3 ]. Dostępne obecnie współczesne komputery pozwoliły na

uściślenie wzorów obliczeniowych, co wówczas nie było możliwe.

#### WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- c - prędkość światła;
- E - mimośród;
- g - stała /przyspieszenie grawitacyjne/;
- J - moment pędu;
- k - stała grawitacji / $k=6,6732 \cdot 10^{-11} \text{ [N m}^2 \text{ kg}^{-2}\text{]}/$ ;
- M, m - masa ciała centralnego i próbnego / $m(u)$ ;  $m(\delta v)$ - w funkcji prędkości,  $m(r)$  - w funkcji promienia/;
- p - parametr;
- r - promień wodzący;
- t - czas;
- u - prędkość w polu ciężenia / $u_r, u_s$  - składowe/;
- $\delta v$  - różnica prędkości pomiędzy dwoma ośrodkami / $v_r, v_s$  - składowe/;
- $\sigma$  - odwrotność promienia /  $\sigma = \frac{1}{r}$  /;
- $\rho$  - kąt pomiędzy osią wielką a promieniem wodzącym;
- $\omega$  - prędkość kątowa /  $\omega_p$  dla  $\omega_{r=p}$  /;

#### MOMENT PĘDU I MOMENT PRĘDKOŚCI CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA

Po wykluczeniu założenia, że masa ciała jest wartością stałą, zmiana momentu pędu ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia wyniesie:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} [r \times m(u) u] = m(u) \frac{dr}{dt} \times u + (r \times u) \frac{dm(u)}{dt} + \\ &+ m(u) r \times \frac{du}{dt} = (r \times u) \frac{dm(u)}{dt} . \end{aligned} \quad /1/$$

Z zależności /1/ wynika, że moment prędkości  $(r \times u)$  jest wartością stałą / a moment pędu ulega zmianom/, zaś mimo usunięcia założenia stałości masy, drugie prawo Keplera pozostaje w mocy.

Jeżeli przyjmiemy, że dla promienia  $r=p$  (p-parametr) słuszne jest równanie

$$\omega_p^2 p = \frac{k M}{p^2}, \quad /2/$$

to dla tego przypadku

$$\omega_p = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{k M}{p}}. \quad /3/$$

Ponieważ moment prędkości  $(r \times u)$  jest wartością stałą, to

$$r^2 \omega = p^2 \omega_p. \quad /4/$$

Wstawiając /3/ do /4/ otrzymujemy wyrażenie na prędkość kątową odpowiadającą dowolnemu promieniowi:

$$\omega = \frac{p}{r^2} \sqrt{\frac{k M}{p}}. \quad /5/$$

Składową prędkości prostopadłą do promienia obliczymy z zależności:

$$u_s = \omega r = \frac{p}{r} \sqrt{\frac{k M}{p}}. \quad /6/$$

RÓWNANIE TRAJEKTORII CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ  
W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA PRZY  
ZAŁOŻENIU, ŻE MASA JEST WIELKOŚCIĄ STAŁĄ

Jeżeli prędkość kątowna ciała różna jest od zera, wówczas słuszne jest równanie:

$$m \frac{d u_r}{d t} = m (\omega^2 r - g) . \quad /7/$$

Uwzględniając, że

$$\omega^2 = \frac{p k M}{r^4} ; \quad g = \frac{k M}{r^2} ; \quad \frac{d r}{d t} = u_r , \quad /8/$$

otrzymujemy:

$$u_r d u_r = \left[ \frac{p k M}{r^3} - \frac{k M}{r^2} \right] d r . \quad /9/$$

Całkując obustronnie /9/, otrzymujemy wyrażenie na składową prędkości  $u_r$ :

$$u_r = \sqrt{-\frac{p k M}{r^2} + \frac{2 k M}{r} + C} . \quad /10a/$$

Stałą całkowania C uzyskamy z warunku, że dla:

$$r = \frac{p}{1-E} \quad \text{oraz} \quad r = \frac{p}{1+E} \\ u_r = 0 . \quad /10b/$$

Uwzględniając powyższe, stałą C możemy wyrazić wzorem:

$$C = \frac{k M}{p} (1 - E^2) . \quad /11/$$

Biorąc pod uwagę /10/ i /11/, otrzymujemy:

$$u_r^2 = \frac{k M}{p} \left[ -\frac{p^2}{r^2} + 2 \frac{p}{r} + 1 - E^2 \right] . \quad /12/$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\sigma = \frac{1}{r} ; \quad d\sigma = -\frac{dr}{r^2} ; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

oraz uwzględniając / 5 /, z zależności / 12 / otrzymujemy:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\varphi} \right]^2 = \frac{1}{p^2} \left[ -p^2 \sigma^2 + 2 p \sigma + 1 - E^2 \right] \quad /13a/$$

lub

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \pm \frac{1}{p} \sqrt{-p^2 \sigma^2 + 2 p \sigma + 1 - E^2} . \quad /13b/$$

Różniczkując obustronnie /13a/, otrzymujemy:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma . \quad /14/$$

Rozwiązując ostatnie równanie, otrzymujemy wzór analityczny opisujący trajektorię ciała w polu centralno-symetrycznym przy założeniu, że masa jest wartością

stałą:

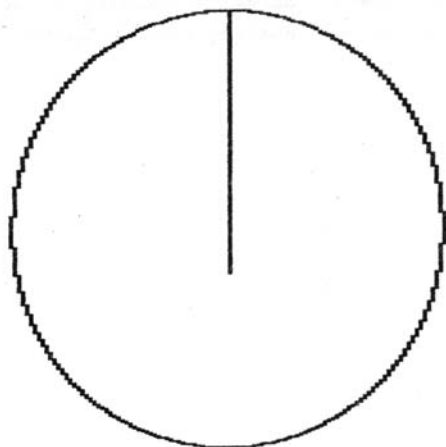
$$r = \frac{p}{1 + E \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad /15/$$

Zależności /13b/ i /14/ pozwalają również wyznaczyć trajektorię tego ciała, korzystając z całkowania numerycznego. Całkowanie takie zastosujemy, gdy nie będzie możliwe uzyskanie wzoru analitycznego. Przypadek ten zachodzić będzie, gdy w obliczeniach założymy, że masa jest wielkością zmienną. Porównując wyniki takich obliczeń numerycznych z obliczeniami numerycznymi według wzorów /13b/ i /14/, możemy wnioskować o poprawności przyjmowanych założeń i poprawności uzyskanych wzorów obliczeniowych. Wyznaczoną według analitycznego wzoru /15/ trajektorię Merkurego ilustruje tabela 1. i rysunek 1. Tę samą trajektorię wyznaczoną przez całkowanie numeryczne według wzorów /13b/, /14/ ilustruje tabela 2. i rysunek 2. Porównanie obu tabel umożliwia nam ocenę przydatności wykorzystania całkowania numerycznego do analizy rozpatrywanych problemów.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.9910000000000E+0030;  
 stała grawitacji= 6.6732000000000E-0011;  
 predkość światła= 3.0000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 mimośród e= 2.0560000000000E-0001;  
 oblicz. analit. wg. wz.  $r = p / (1 - E \cos(\phi))$ ;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.7264000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.6400000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości:= 1.0000000000000E+0003.

Tabela 1.

$\phi$	R	omega	t	n(R)/n(Rn)
0.0000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	0.0000000000000E+0000	1.0000000000000E+0000
5.2359877600000E-0001	6.74642211306921E+0007	5.96367351988191E-0007	1.06326333954831E+0001	1.0000000000000E+0000
1.0471975520000E+0000	6.18054961782866E+0007	7.10569704347249E-0007	2.001423599816208E+0001	1.0000000000000E+0000
1.5707963280000E+0000	5.54518911662607E+0007	8.82730550418980E-0007	2.76858516164107E+0001	1.0000000000000E+0000
2.0943951040000E+0000	5.02828175241332E+0007	1.07354850683010E-0006	3.38970086202129E+0001	1.0000000000000E+0000
2.6179938800000E+0000	4.70707220808433E+0007	1.22506507975617E-0006	3.91510278979263E+0001	1.0000000000000E+0000
3.1415926560000E+0000	4.59952647478434E+0007	1.28302357299524E-0006	4.39485206658807E+0001	1.0000000000000E+0000
3.6651914320000E+0000	4.70707221006432E+0007	1.22506507872554E-0006	4.87460134358924E+0001	1.0000000000000E+0000
4.1887902080000E+0000	5.02828175632678E+0007	1.07354850515903E-0006	5.40000327200334E+0001	1.0000000000000E+0000
4.7123889840000E+0000	5.54518912212178E+0007	8.82730548669271E-0007	6.02111897350698E+0001	1.0000000000000E+0000
5.2359877600000E+0000	6.18054962374123E+0007	7.10569702987729E-0007	6.78828013851730E+0001	1.0000000000000E+0000
5.7595865360000E+0000	6.74642211713653E+0007	5.96367351269108E-0007	7.72644079863465E+0001	1.0000000000000E+0000
6.2831853120000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	8.7770413884298E+0001	1.0000000000000E+0000
6.8067840880000E+0000	6.74642210900189E+0007	5.96367352707273E-0007	9.85296747773127E+0001	1.0000000000000E+0000



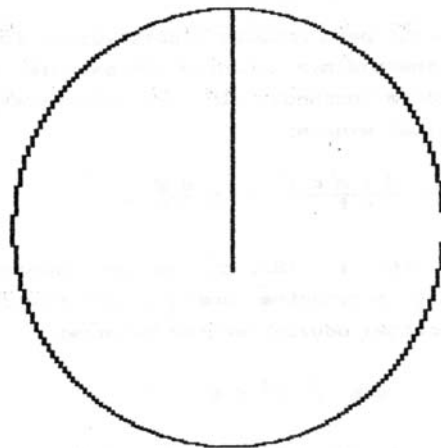
Rys. 1.



Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.991000000000000E+0030;  
 stała grawitacji= 6.673200000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.000000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.545189118000000E+0010;  
 mimośród e= 2.056000000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg. wz.  $dpr/dt = n(t)(\omega + 2\dot{r} - g)$ , /masa stała/;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.726640000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.640000000000000E+0004;  
 liczba setów w przyjętej jednostce odległości.= 1.000000000000000E+0003.

Tabela 2.

$f_i$	R	omega	t	$n(R)/n(R_n)$
0.000000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	0.000000000000000E+0000	1.000000000000000E+0000
5.235987760000000E-0001	6.74642211313991E+0007	5.96367351975691E-0007	1.06326333955966E+0001	1.000000000000000E+0000
1.047197552000000E+0000	6.18054961793144E+0007	7.10569704325617E-0007	2.00142399819937E+0001	1.000000000000000E+0000
1.570796328000000E+0000	5.54518911672160E+0007	8.82730550388565E-0007	2.76858516170518E+0001	1.000000000000000E+0000
2.094395104000000E+0000	5.02828175248135E+0007	1.07354850680105E-0006	3.38970086210493E+0001	1.000000000000000E+0000
2.617993880000000E+0000	4.70707220811875E+0007	1.22506507973825E-0006	3.91510278988745E+0001	1.000000000000000E+0000
3.141592280000000E+0000	4.59952647478434E+0007	1.28302357299524E-0006	4.39485172748193E+0001	1.000000000000000E+0000
3.141592656000000E+0000	4.59952647478434E+0007	1.28302357299524E-0006	4.39485206666913E+0001	1.000000000000000E+0000
3.665191432000000E+0000	4.70707220636212E+0007	1.22506508065261E-0006	4.87460134328569E+0001	1.000000000000000E+0000
4.188790208000000E+0000	5.02828174900937E+0007	1.07354850828360E-0006	5.40000327049795E+0001	1.000000000000000E+0000
4.712388984000000E+0000	5.54518911184587E+0007	8.82730551940887E-0007	6.02111896990102E+0001	1.000000000000000E+0000
5.235987760000000E+0000	6.18054961268588E+0007	7.10569705529768E-0007	6.78828013204805E+0001	1.000000000000000E+0000
5.759586536000000E+0000	6.74642210953143E+0007	5.96367352613653E-0007	7.72644078935400E+0001	1.000000000000000E+0000
6.283184936000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	8.78970334716804E+0001	1.000000000000000E+0000
6.283185312000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	8.78970412837747E+0001	1.000000000000000E+0000
6.806784088000000E+0000	6.74642212582882E+0007	5.96367349732353E-0007	9.85296746999622E+0001	1.000000000000000E+0000



Rys. 2.

## ZMIENNOŚĆ MASY I ENERGII CIAŁ

Aby masa ciała ulegała zmianie, jej otoczenie musi dostarczyć ciału pewną masę lub pobrać ją od niego. Takie dostarczenie lub pobranie masy związane jest z jednoczesnym dostarczeniem bądź pobraniem pewnej energii. Dzieje się to zgodnie ze wzorem:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dp}{dt}, \quad /16/$$

gdzie:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d[m(u)u]}{dt} = \quad /17/$$

$$= m(u) \frac{du}{dt} + u \frac{d[m(u)]}{dt}.$$

Przykładowo, przyrost pędu /choćby hipotetyczny/ fotonu, dla którego w pewnym inercjalnym układzie odniesienia /mógłby to być ośrodek, w którym rozchodzi się fala elektromagnetyczna/  $u = c$ , możemy opisać wzorem:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mc)}{dt} = c \frac{dm}{dt}. \quad /18/$$

Uwzględniając /16/ i /18/, otrzymujemy równanie wiążące zależność pomiędzy przyrostem energii i przyrostem masy ciała, np. dostarczonej oddziaływaniem kwantów:

$$dE = c^2 dm. \quad /19/$$

Na uwagę zasługuje fakt, że równanie /19/ słuszne jest niezależnie od tego, jaki ośrodek unosił falę elektromagnetyczną, która danemu ciału dostarczyła pewnej energii i odpowiadającej jej masy.

Jeżeli w równaniu /17/ uwzględnimy zależności /16/ i /19/, to po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{d [ m(u) ]}{m(u)} = \frac{u}{c^2 - u^2} \cdot du \quad /20/$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy wzór wyrażający masę ciała w funkcji jego prędkości w inercjalnym układzie odniesienia /w naszym przypadku jest to układ związany ze Słońcem/:

$$m(u) = \frac{m(u=0)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad /21/$$

W przypadku ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia, zmianę energii ciała i odpowiadającą jej zmianę masy ciała wyrazić można również w funkcji promienia wodzącego  $r$ :

$$\frac{dE}{ds} = -m(r)g \quad /22/$$

Uwzględniając /19/ oraz /8/, otrzymujemy:

$$c^2 dm(r) = -m(r) \frac{kM}{r^3} r ds \quad /23/$$

Po prawej stronie ostatniego równania występuje iloczyn skalarny  $r ds$ , równaniu temu możemy zatem nadać postać:

$$c^2 dm(r) = -m(r) \frac{kM}{r^2} dr \quad /24a/$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy:

$$m(r_2) = m(r_1) e^{\left( \frac{k M}{c^2 r_2} - \frac{k M}{c^2 r_1} \right)} . \quad /24b/$$

W literaturze [6] spotykamy wzmianki, że zależność masy ciała od jego prędkości stwierdzono doświadczalnie jeszcze przed pojawieniem się teorii względności. Zależności /19/ i /21/ wiążemy jednak ze szczególną teorią względności, przy powstaniu której istotną /choć nie jedyną/ rolę odegrały doświadczenia Fizeau oraz Michelsona-Morleya, dotyczące unoszenia światła przez ośrodki ruchome. Ośrodkiem takim w doświadczeniu Fizeau /połowa XIX w./, powtórzonym przez Michelsona i Morleya [5] w roku 1886, była woda. Stwierdzono, że woda unosi światło tylko częściowo. W przypadku, gdy współczynnik załamania światła ośrodka równy był zeru /doświadczenia Michelsona-Morleya/, nie stwierdzono unoszenia światła w ogóle. Taka interpretacja wyników doświadczeń pozwoliła przyjąć w teorii względności [9] postulat, że wszyscy obserwatorzy otrzymują jako wyniki pomiaru tę samą prędkość światła, niezależnie od tego względem jakiego układu obserwator spoczywa. Zależności /19/ i /21/ zostały w teorii względności wyprowadzone po przyjęciu powyższego postulatu. Autor niniejszego artykułu wzory te akceptuje. Wydaje się jednak słusznym, by w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że wykonując doświadczenia dotyczące unoszenia światła przez ośrodki ruchome, należało w interpretacji ich wyników uwzględnić zjawisko Dopplera. Gdyby zjawisko to uwzględniono w opisie przejścia fali elektromagnetycznej do ośrodka o innej prędkości, wówczas należałoby przyjąć, że współczynnik unoszenia światła równy jest jedności /światło jest unoszone/. Autor opisał ten problem w pracy [2].

Chociaż postulat stałej prędkości światła wydaje się wątpliwy, nie ma praktycznych przesłanek do rezygnacji ze

sprawdzenia wzorów /19/ i /21/.

We wcześniejszych pracach [2] został podany wyprowadzony rekurencyjnie odmienny wzór opisujący zależność pomiędzy częstotliwościami fali elektromagnetycznej przy jej przejściu do ośrodka o innej prędkości, a także wzór opisujący zmianę masy ciała przy jego przejściu do ośrodka o innej prędkości:

$$m(v_i) = m(0) \cosh\left(\frac{s \cdot v}{c}\right). \quad /25/$$

Autor postanowił również ten wzór poddać próbie.

**RÓWNANIE TRAJEKTORII CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ  
W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA, PRZY  
UWZGLĘDNIENIU ZMIENNOŚCI MASY TEGO CIAŁA  
WEDŁUG WZORU /21/**

Gdy uwzględnimy to, co podano w poprzednich rozdziałach i przyjmiemy, że dla ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia słuszna powinna być zależność

$$d m(u) = d m(r), \quad /26/$$

wówczas z zależności /19/, /21/ i /24/ otrzymujemy:

$$c^2 d m(u) = - m(u) \frac{k M}{r^2} d r. \quad /27/$$

Biorąc pod uwagę /21/, znajdujemy wyrażenie występujące po lewej stronie /27/:

$$c^2 d m(u) = \frac{m(0) u d u}{\left[1 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = r^2 m(u) u d u, \quad /28a/$$

gdzie  $r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  . /28b/

Wstawiając /28/ do /27/, z równania tego otrzymujemy:

$$\frac{u \, du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = - \frac{k M}{r^2} \, dr . \quad /29/$$

Rozwiązując ostatnie równanie, otrzymujemy zaś:

$$c^2 \ln \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = - \frac{2 k M}{r} + C \quad /30a/$$

lub

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = e^{\left( - \frac{2 k M}{c^2 r} + F \right)} . \quad /30b/$$

Uwzględniając, że w układzie współrzędnych biegunowych

$$u^2 = u_r^2 + u_s^2 , \quad /31/$$

zaś składową prędkości  $u_s$  określa zależność /6/, znajdujemy:

$$\frac{u_r^2}{c^2} = 1 - \frac{p k M}{c^2 r^2} - e^{\left( - \frac{2 k M}{c^2 r} + F \right)} . \quad /32/$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\sigma = \frac{1}{r}; \quad d\sigma = -\frac{dr}{r^2}; \quad \omega = \frac{d\sigma}{dt} \quad /33/$$

oraz uwzględniając /5/, ostatnie równanie możemy przekształcić do postaci:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1 - \frac{p k M}{c^2} \sigma^2 - e \left(-\frac{2 k M}{c^2} \sigma + F\right)}{\frac{p k M}{c^2}} \quad /34a/$$

lub

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{p k M}{c^2} \sigma^2 - e \left(-\frac{2 k M}{c^2} \sigma + F\right)}}{\sqrt{\frac{p k M}{c^2}}} \quad /34b/$$

Po przyjęciu oznaczeń:

$$F1 = 1 - \frac{p k M}{c^2 r_{\max}^2}; \quad /35a/$$

$$F2 = e \left(-\frac{2 k M}{c^2 r_{\max}} + F\right) \quad /35b/$$

oraz uwzględnieniu, że dla  $r = r_{\max}$  licznik prawej strony równania /34/ równy jest zeru, stałą całkowania  $F$  wyznaczmy z zależności:

$$F = \ln \left( \frac{F_1}{F_2} \right) . \quad /35c/$$

Różniczkując obustronnie równanie /34a/, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \sigma}{d \rho^2} = \frac{\left( -\frac{2 k M}{c^2} \sigma + F \right)}{\rho} - \sigma . \quad /36/$$

Posługując się metodą całkowania numerycznego, stosując równania /34 - 36/ i wykorzystując technikę komputerową, możemy wyznaczyć trajektorię interesującej nas planety, np. Merkurego. Równanie /36/ jest pomocne przy określaniu wartości  $d \sigma / d \rho$ , dla  $r = r_{\max}$  oraz  $r = r_{\min}$ .

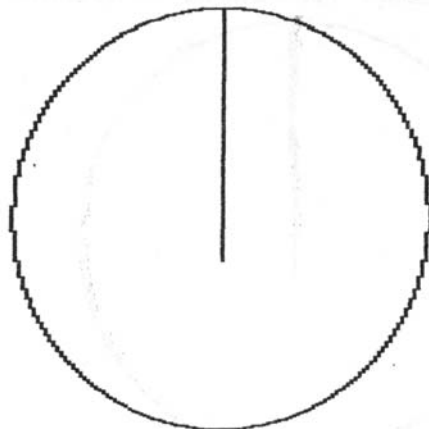
Opisujące trajektorie ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia równania /34/, /36/ nie są równaniami elipsy, ale opisywane nimi trajektorie swym kształtem są do niej bardzo zbliżone /dla znanych przypadków/ i odpowiadają trajektoriom obserwowanym. Tabela 3. i rysunek 3. ilustrują wyniki obliczeń według wzorów /34b-36/ dla tego samego przypadku co tabele 1. i 2. oraz rysunki 1. i 2. Różnice w wynikach obliczeń widoczne stają się dla przypadków, gdy trajektorie przebiega w silniejszych polach grawitacyjnych. Trajektorie opisywane wzorami /13-14/ nie zależą np. od masy ciała będącego źródłem centralno-symetrycznego pola ciężenia - jak ma to miejsce w przypadku trajektorii opisywanych równaniami /34-35/, co ilustrują tabele 4-6 i rysunki 4-6.



Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.9910000000000E+0030;  
 stała grawitacji= 6.6732000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.0000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.5451891180000E+0010;  
 nieosród e= 2.0560000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg. wz.  $dE/ds=(us)lg$ , gdzie  $E=(0)/\sqrt{1-(us/c)^2}hc^2$  ;  
 stała całkowania= 2.54969948730000E-0008;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.7264400000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.6400000000000E+0004;  
 liczba setrów w przyjętej jednostce odległości:= 1.0000000000000E+0003.

Tabela 3.

$f_i$	R	omega	t	$a(R)/a(R_0)$
0.0000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	0.0000000000000E+0000	1.00000002114880E+0000
5.2359877600000E-0001	6.74598380813087E+0007	5.96444849727442E-0007	1.06319221291625E+0001	1.00000002188354E+0000
1.0471975320000E+0000	6.17991252259626E+0007	7.10716219011984E-0007	2.00119085740704E+0001	1.00000002388804E+0000
1.5707963280000E+0000	5.54459698998119E+0007	8.82919100169285E-0007	2.76818703096244E+0001	1.00000002662520E+0000
2.0943951040000E+0000	5.02786016201152E+0007	1.07372855031067E-0006	3.38918170352476E+0001	1.00000002936160E+0000
2.6179938800000E+0000	4.70685906416155E+0007	1.22517606442594E-0006	3.91451440014157E+0001	1.00000003136402E+0000
3.1415926560000E+0000	4.59952654615684E+0007	1.2830233317696E-0006	4.39424154606069E+0001	1.00000003209592E+0000
3.1427271192000E+0000	4.59952647546395E+0007	1.28302357261608E-0006	4.39526493811586E+0001	1.00000003209592E+0000
3.6651914320000E+0000	4.70594146433495E+0007	1.22565386982934E-0006	4.87387366188705E+0001	1.00000003137013E+0000
4.1887902080000E+0000	5.02604363743569E+0007	1.07450482959077E-0006	5.39890823762077E+0001	1.00000002937221E+0000
4.7123889840000E+0000	5.54204397973324E+0007	8.83732742467604E-0007	6.01938138176259E+0001	1.00000002663747E+0000
5.2359877600000E+0000	6.17716320033728E+0007	7.11349008755862E-0007	6.78566609458915E+0001	1.00000002389867E+0000
5.7595865360000E+0000	6.74408848609430E+0007	5.96780140083758E-0007	7.72296519761619E+0001	1.00000002188969E+0000
6.2831853120000E+0000	6.98034220055963E+0007	5.57067028311874E-0007	8.78584881048764E+0001	1.00000002114882E+0000
6.2854542384000E+0000	6.98034883923276E+0007	5.57065968713209E-0007	8.79056292059991E+0001	1.00000002114880E+0000
6.8067840880000E+0000	6.74789638813837E+0007	5.96106792719336E-0007	9.84935098902677E+0001	1.00000002187734E+0000

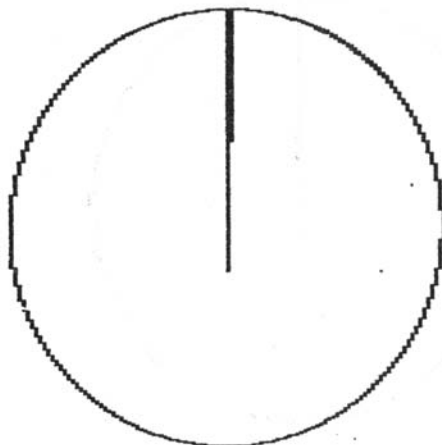


Rys. 3.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.9910000000000E+0031;  
 stała grawitacji= 6.6732000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.0000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 promień = 2.0560000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg. wz.  $dE/ds = w(us) \dot{\gamma}$ , gdzie  $E = m(0) / \sqrt{1 - (us/c)^2} \dot{\gamma}^2$  ;  
 stała całkowania = 2.54969908689957E-0007;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.7266400000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu = 8.6400000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości = 1.0000000000000E+0003.

Tabela 4.

$\phi_i$	R	omega	t	$m(R) / m(R_0)$
0.0000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	1.76159726802973E-0006	0.0000000000000E+0000	1.00000021148804E+0000
5.2359877600000E-0001	6.74503633799134E+0007	1.88665414591072E-0006	3.36162273468289E+0000	1.00000021886617E+0000
1.0471975520000E+0000	6.17853573292991E+0007	2.24848376585263E-0006	6.32672774409600E+0000	1.00000023893368E+0000
1.5707963280000E+0000	5.54331773038111E+0007	2.79332415926531E-0006	8.75105543638711E+0000	1.00000026631350E+0000
2.0943951040000E+0000	5.02694974256118E+0007	3.39665779553917E-0006	1.07139864362873E+0001	1.0000002936921E+0000
2.6179938800000E+0000	4.70639925625999E+0007	3.87510387184869E-0006	1.23747617835923E+0001	1.00000031367087E+0000
3.1415926560000E+0000	4.59952742325582E+0007	4.05727510904515E-0006	1.38916417798682E+0001	1.00000032095914E+0000
3.1559916120000E+0000	4.59952647604514E+0007	4.05727678012792E-0006	1.39327172663622E+0001	1.00000032095921E+0000
3.6651914320000E+0000	4.69494272730395E+0007	3.89403888707546E-0006	1.54048743602757E+0001	1.00000031443629E+0000
4.1887902080000E+0000	5.00392995640542E+0007	3.42798125046383E-0006	1.70537846111328E+0001	1.00000029502019E+0000
4.7123889840000E+0000	5.51073612627236E+0007	2.82645222995562E-0006	1.89957909202321E+0001	1.00000026788805E+0000
5.2359877600000E+0000	6.14315217853848E+0007	2.27446016029644E-0006	2.13713768253297E+0001	1.00000024030957E+0000
5.7595865360000E+0000	6.72019226447875E+0007	1.90062958411112E-0006	2.4327877735514E+0001	1.00000021967531E+0000
6.2831853120000E+0000	6.97951587697788E+0007	1.76201776477173E-0006	2.76763413955657E+0001	1.00000021151328E+0000
6.3119832240000E+0000	6.98034883327703E+0007	1.76159727110789E-0006	2.78655340803119E+0001	1.00000021148804E+0000
6.8067840880000E+0000	6.76886800023337E+0007	1.87339256254362E-0006	3.10498596206648E+0001	1.00000021809560E+0000

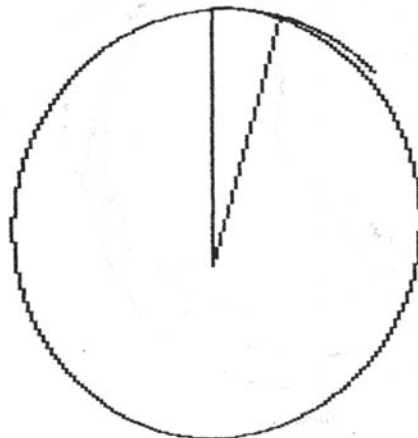


Rys. 4.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.991000000000000E+0032;  
 stała grawitacji= 6.673200000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.000000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.545189118000000E-0010;  
 promień e= 2.056000000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg. wz.  $dE/ds = m(us)lg$ , gdzie  $E = m(0) / \sqrt{1 - (v/c)^2} c^2$ ;  
 stała całkowania = 2.54969508289971E-0006;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.726640000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.640000000000000E+0004;  
 liczba setków w przyjętej jednostce odległości. = 1.000000000000000E+0003.

Tabela 5.

$F_{12}$	R	omega	t	$m(R)/m(R_n)$
0.000000000000000E+0000	6.98034883977563E+0007	5.57065968690406E-0006	0.000000000000000E+0000	1.00000211488241E+0000
5.235987760000000E-0001	6.74204313007357E+0007	5.97142289355719E-0006	1.06255264382924E+0000	1.00000218963559E+0000
1.047197552000000E+0000	6.17418982628721E+0007	7.12024318420955E-0006	1.99909602056778E+0000	1.00000239102123E+0000
1.570796329000000E+0000	5.53928284269188E+0007	8.84613981224634E-0006	2.76461157866698E+0000	1.00000266507803E+0000
2.094395104000000E+0000	5.02408186142676E+0007	1.07534412695986E-0005	3.38452120632533E+0000	1.00000293837231E+0000
2.617993880000000E+0000	4.70495700907832E+0007	1.22616682793675E-0005	3.90923457259580E+0000	1.00000313767468E+0000
3.141592656000000E+0000	4.59953667140391E+0007	1.29301798438366E-0005	4.38876624850704E+0000	1.00000320959595E+0000
3.278862703200000E+0000	4.59952647552605E+0007	1.28302357258144E-0005	4.51259695976775E+0000	1.00000320959671E+0000
3.665191432000000E+0000	4.62286693417855E+0007	1.27010052687272E-0005	4.86184800800310E+0000	1.00000319339170E+0000
4.188790208000000E+0000	4.83047501248721E+0007	1.16327180500843E-0005	5.35697222828395E+0000	1.00000305614331E+0000
4.712388984000000E+0000	5.24733357274889E+0007	9.85780504142936E-0006	5.92044094378326E+0000	1.00000281334617E+0000
5.235987760000000E+0000	5.83489395520063E+0007	7.97250768904870E-0006	6.60393731656169E+0000	1.00000253005798E+0000
5.759586536000000E+0000	6.46863069561065E+0007	6.48688452738148E-0006	7.45088641290768E+0000	1.00000228219576E+0000
6.293185312000000E+0000	6.91086025896823E+0007	5.68324866917034E-0006	8.45868675398045E+0000	1.00000213614753E+0000
6.857725406400000E+0000	6.98034882635270E+0007	5.57065970769052E-0006	9.02522638938299E+0000	1.00000211488241E+0000
6.806784088000000E+0000	6.92277125199054E+0007	5.66370883520037E-0006	9.53978058979650E+0000	1.00000213247219E+0000

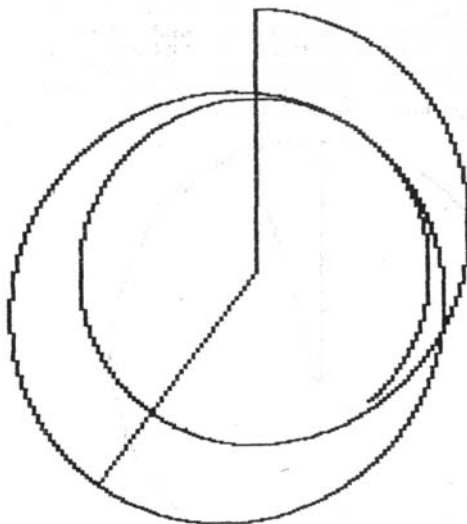


Rys. 5.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.99100000000000E+0033;  
 stała grawitacji= 6.67320000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.00000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 nachódź e= 2.05600000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg. wz.  $dE/ds = (u/c) \dot{t}$ , gdzie  $E = m(t) / \sqrt{1 - (u/c)^2}$ ;  
 stała całkowania= 2.54965504197370E-0005;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.72664000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.64000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości= 1.00000000000000E+0003.

Tabela 6.

fi	R	omega	t	a(R)/a(Rn)
0.00000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	1.76159726802973E-0005	0.00000000000000E+0000	1.00002114902533E+0000
5.23598776000000E-0001	6.73260668396109E+0007	1.89362681084757E-0005	3.35524129218979E-0001	1.00002192726217E+0000
1.04719755200000E+0000	6.16052461491856E+0007	2.26165047135915E-0005	6.30586288546924E-0001	1.00002396350820E+0000
1.57079632800000E+0000	5.52662722080825E+0007	2.81022141011380E-0005	9.71548762680013E-0001	1.00002671213004E+0000
2.09439510400000E+0000	5.01512339448112E+0007	3.41269625261587E-0005	1.06676689777672E+0000	1.00002943680096E+0000
2.61799388000000E+0000	4.70051225031997E+0007	3.88481644947893E-0005	1.23223408031138E+0000	1.00003140686029E+0000
3.14159265600000E+0000	4.59963140653317E+0007	4.05709166652254E-0005	1.38373542983439E+0000	1.00003209549841E+0000
3.66519143200000E+0000	4.59960234956979E+0007	4.05714292623040E-0005	1.53310678333339E+0000	1.00003209590117E+0000



Rys. 6.

**RÓWNANIA TRAJEKTORII CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ  
W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA W PRZYPADKU,  
GDY MASĘ CIAŁA OPISZEMY WZOREM /25/**

Słuszna wydaje się hipoteza [4], że jeśli prędkość ośrodka, w którym pole elektryczne /lub magnetyczne/ było w spoczynku, wzrosła o  $\delta v$ , to prędkość pola w tym ośrodku powinna wynosić:

$$u = -c \operatorname{tgh} \left( \frac{\delta v}{c} \right). \quad /37/$$

Jeżeli we wzorze /21/ prędkość  $u$  wyrazimy wzorem /37/, należy sprawdzić, czy nowe wzory opisujące trajektorię ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia będą poprawne czy też nie - w tym przypadku trzeba ustalić, jak daleko będą od tej poprawności odbiegać.

Po podstawieniu /37/ do /21/ otrzymujemy:

$$m(\delta v) = m(0) \cosh \left( \frac{\delta v}{c} \right), \quad /38a/$$

stąd:

$$c^2 d m(\delta v) = c^2 m(0) \sinh \left( \frac{\delta v}{c} \right) d \left( \frac{\delta v}{c} \right). \quad /38b/$$

Przez analogię do /27/, przy uwzględnieniu /38b/, otrzymujemy:

$$c^2 m(0) \sinh \left( \frac{\delta v}{c} \right) d \left( \frac{\delta v}{c} \right) = -m(0) \cosh \left( \frac{\delta v}{c} \right) \frac{k M}{r^2} d r \quad /39a/$$

lub

$$c^2 \operatorname{tgh}\left(\frac{\delta v}{c}\right) d\left(\frac{\delta v}{c}\right) = -\frac{k M}{r^2} dr. \quad /39b/$$

Całkując obustronnie ostatnie równanie, uzyskujemy zaś:

$$\cosh\left(\frac{\delta v}{c}\right) = e^{\left(\frac{k M}{c^2 r} - F\right)} \quad /39c/$$

lub

$$\frac{\delta v}{c} = \operatorname{arcosh}\left[ e^{\left(\frac{k M}{c^2 r} - F\right)} \right], \quad /39d/$$

gdzie  $F$  - stała całkowania.

W celu uproszczenia przyjmijmy zapis jak w /31/:

$$(\delta v)^2 = v_r^2 + v_s^2, \quad /40a/$$

gdzie - analogicznie do /6/ :

$$v_s = \omega r = \frac{p}{r} \sqrt{\frac{k M}{p}}. \quad /40b/$$

Uwzględniając /40/, z zależności /39d/ uzyskujemy wzór:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left[ \left( \operatorname{arcosh}\left[ e^{\left(\frac{k M}{c^2 r} - F\right)} \right] \right)^2 - \frac{p k M}{c^2 r^2} \right] \quad /41/$$

lub - po uwzględnieniu /33/:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = \pm \frac{\left[ \operatorname{arcosh} \left( e^{\left[ \frac{kM}{c^2} \sigma - F \right]} \right)^2 - \frac{p k M}{c^2} \sigma^2 \right]}{\sqrt{\frac{p k M}{c^2}}} \quad /42/$$

Różniczkując kwadraty obu stron równania /42b/, otrzymujemy:

$$\frac{d^2\sigma}{d\rho^2} = \frac{f(\sigma)}{p} - \sigma, \quad /43a/$$

gdzie

$$f(\sigma) = \frac{\operatorname{arcosh} \left( e^{\left[ \frac{kM}{c^2} \sigma - F \right]} \right) e^{\left[ \frac{kM}{c^2} \sigma - F \right]}}{\sqrt{e^{\left[ 2 \left[ \frac{kM}{c^2} \sigma - F \right] \right]} - 1}} \quad /43b/$$

Występującą w równaniach /39-43/ stałą całkowania  $F$  obliczymy z warunku, że dla  $r = r_{\min}$  ( $\sigma = \sigma_{\max}$ ) prawa strona równania /41/ równa jest zero, stąd:

$$F = \ln \left( \frac{1}{\cosh \left( \sqrt{\frac{p k M}{c^2}} r_{\min} \right) e^{\left[ \frac{k M}{c^2} r_{\min} \right]}} \right) \quad /44/$$

Także w tym przypadku opisujące trajektorie ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia równania /42-44/ nie są

równaniami elipsy, ale opisywane nimi trajektorie swym kształtem /dla znanych przypadków/ są do niej bardzo zbliżone.

Tabela 7. i rysunek 7. ilustrują wyniki obliczeń dla tego samego przypadku, dla którego wyniki obliczeń ilustrują tabele i rysunki 1-2. Tabela i rysunek 8. ilustrują wyniki obliczeń dla przypadku, w którym masa ciała centralnego byłaby 10-krotnie większa, zaś tabela i rysunek 9., gdyby masa tego ciała była 100-krotnie większa. Obliczenia te wykonano, aby pokazać istotną właściwość równań /42-44/. Ponieważ w tabelach przedstawiono wydruki wyników obliczeń dla kolejno rosnących wartości kąta  $\varphi$  o kąt  $\pi/6$  i dla przypadków, gdy  $r=r_{\min}$  oraz  $r=r_{\max}$ , łatwo zauważyć właściwość równań /42-44/. Wyznaczone nimi trajektorie dokonują obrotu. Kąt obrotu tych trajektorii rośnie wraz ze wzrostem masy ciała centralnego /lub zmniejszaniem się promienia/. Obrót taki ilustrują również rysunki 3-5, ale jedynie dla przypadku, gdy obliczenia prowadzone były z wykorzystaniem wzorów /34-36/. Kąt obrotu trajektorii opisywanej równaniami /42-44/ jest znacznie mniejszy niż kąt obrotu trajektorii opisywanej dla tego samego przypadku za pomocą równań /34b-36/.

W obliczeniach przyjmowano, że  $r_{\max}$ ,  $r_{\min}$  mają takie same wartości jak w przypadku, gdy obliczenia prowadzone były z wykorzystaniem równań /13-15/. Wraz ze wzrostem masy  $M$  ciała centralnego postępowanie takie wprowadza błąd do obliczeń, co ilustrują tabele i rysunki 10-11. W tym przypadku program obliczeń numerycznych sam dąży do wyznaczenia właściwego przebiegu trajektorii, jednak konieczna jest korekta wyznaczenia wartości  $r_{\max}$  i  $r_{\min}$  /co nie jest zasadniczą sprawą na obecnym etapie rozważań/.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że zarówno równania /34-36/, jak i /42-44/ wyprowadzono w oparciu o bilans masowo-energetyczny. Różnice w obliczeniach wynikają ze sposobu określenia związku pomiędzy masą rozpatrywanego ciała



a jego prędkością w układzie odniesienia związanym z ciałem centralnym /ciałem o tak bardzo dużej masie, że ciała próbne nie mają praktycznie wpływu na zmiany jego masy/. Inne uproszczenia podane są na początku rozważań.

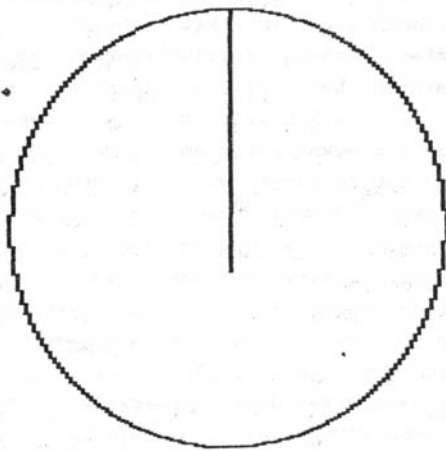
W literaturze dotyczącej stosowania w obliczeniach metod numerycznych autor niniejszego artykułu spotkał dwa wykluczające się wzajemnie twierdzenia. Pierwsze z nich mówi, że metody numeryczne są nauką a nie sztuką, drugie zaś wyraża przekonanie, że metody numeryczne są raczej sztuką niż nauką. Autor na podstawie swoich skromnych doświadczeń uważa, że metody te są zarówno nauką, jak i sztuką. Uciekamy się do nich z konieczności, ale mogą być bardzo pomocne. Zdajemy sobie sprawę z błędów metody oraz błędów zaokrągleń. Istotny wpływ na wyniki obliczeń ma także dokładność określenia danych występujących w równaniach.

Encyklopedia fizyki podaje, że perihelium Merkurego obraca się o  $532'' / 2,57919 \times 10^{-3} \text{ rad/}$  na stulecie. Teoria względności przewiduje, że orbita Merkurego powinna ulegać precesji dookoła Słońca wynoszącej  $43'' / 2,08469 \times 10^{-4} \text{ rad/}$ . Szacunkowo można przyjąć, iż kąt obrotu trajektorii wyznaczonej równaniami /34b-36/ i zilustrowanej tabelą oraz rysunkiem 5. powinien być bliski obrotowi perihelium Merkurego w czasie  $t=100(87\text{dni}+23\text{godz})$ . W przypadku, gdy obliczenia prowadzono z wykorzystaniem równań /42-44/, kąt obrotu zilustrowały tabela i rysunek 7. W drugim przypadku kąt ten wynosi około  $3,49 \times 10^{-4} \text{ rad}$ . Ta szacunkowa ocena przyjmuje, że przynajmniej w pewnym zakresie kąt obrotu perihelium jest proporcjonalny do masy ciała centralnego. Problem ten wymaga szczegółowej analizy, co wykracza jednak poza zakres wstępnych rozważań. Obliczenia prowadzone metodą całkowania numerycznego nie pozwalają uzyskać wysokiej dokładności, ale podane wyżej dane uwidaczniają, że wyniki obliczeń według wzorów /42-44/ nie odbiegają bardzo od danych doświadczalnych, czego nie można powiedzieć o wynikach obliczeń z wykorzystaniem wzorów /34b-36/.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.99100000000000E+0030;  
 stała grawitacji= 6.67320000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.00000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 promień a= 2.05600000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg wz.  $dE/ds = (us)g$ , gdzie  $E = m(0) \cosh(\delta u) / c^2$ ;  
 stała całkowania= 1.27484977836344E-0008;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.72664000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.64000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości= 1.00000000000000E+0003.

Tabela 7.

$f_i$	R	osega	t	$m(R)/m(R_n)$
0.00000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0007	0.00000000000000E+0000	1.00000002114880E+0000
5.23598776000000E-0001	6.74642477917052E+0007	5.96366880634691E-0007	1.06326374839396E+0001	1.00000002188211E+0000
1.04719755200000E+0000	6.18055360944957E+0007	7.10568786525269E-0007	2.00142541103754E+0001	1.00000002388557E+0000
1.57079632800000E+0000	5.54519286962824E+0007	8.82729355550333E-0007	2.76858761472337E+0001	1.00000002662234E+0000
2.09439510400000E+0000	5.02828444408161E+0007	1.07354735747758E-0006	3.38970408498549E+0001	1.00000002935912E+0000
2.61799388000000E+0000	4.70707357751244E+0007	1.22506436694033E-0006	3.91510643596682E+0001	1.00000003136259E+0000
3.14159265600000E+0000	4.59952647478434E+0007	1.28302357299524E-0006	4.3948587528166E+0001	1.00000003209592E+0000
3.14147992240000E+0000	4.59952647753955E+0007	1.28302357145812E-0006	4.39493459774628E+0001	1.00000003136261E+0000
3.66519143200000E+0000	4.70707081379908E+0007	1.22506580551131E-0006	4.87460500744047E+0001	1.00000002935915E+0000
4.18879020800000E+0000	5.02827898158601E+0007	1.07354968998575E-0006	5.4000648124079E+0001	1.00000002662238E+0000
4.71238898400000E+0000	5.54518519859288E+0007	8.82731797832255E-0007	6.02112138341583E+0001	1.00000002388560E+0000
5.23598776000000E+0000	6.18054535655889E+0007	7.10570684173485E-0007	6.78211144963028E+0001	1.00000002114880E+0000
5.75958653600000E+0000	6.74641910191661E+0007	5.96367884345721E-0007	7.72644101355009E+0001	1.00000002114880E+0000
6.28318531200000E+0000	6.98034867870205E+0007	5.57065994335482E-0007	8.78970383937769E+0001	1.00000002114880E+0000
6.28327257840000E+0000	6.98034867236566E+0007	5.57065995346832E-0007	8.78988515142817E+0001	1.00000002114880E+0000
6.80678408800000E+0000	6.74642490996882E+0007	5.96366857510215E-0007	9.85296760770302E+0001	1.00000002188211E+0000

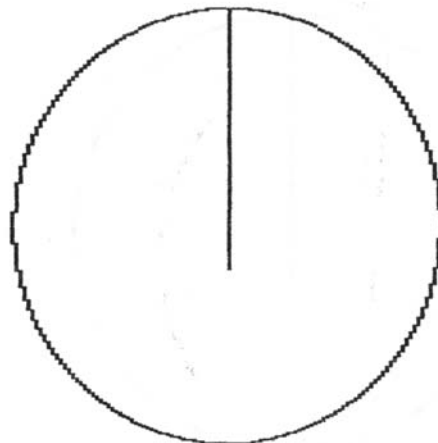


Rys. 7.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.99100000000000E+0031;  
 stała grawitacji= 6.67320000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.00000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 masośrodek e= 2.05600000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg wz.  $dE/ds = m(us)kg$ , gdzie  $E = m(0) \cdot \cosh(\delta) \cdot us/c^2$ ;  
 stała całkowania= 1.27484989066734E-0007;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.72664000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.64000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości = 1.00000000000000E+0003.

Tabela 8.

$f_i$	R	omega	t	$m(R)/m(R_n)$
0.00000000000000E+0000	6.98034883937583E+0007	1.76159726802973E-0006	0.00000000000000E+0000	1.00000021148804E+0000
5.23598776000000E-0001	6.74635443742463E+0007	1.88591699080008E-0006	3.36229828351777E+0000	1.00000021882341E+0000
1.04719755200000E+0000	6.18045240480794E+0007	2.24708939981798E-0006	6.32894424928880E+0000	1.00000023885959E+0000
1.57079632800000E+0000	5.54509918793047E+0007	2.79152964165613E-0006	8.75484144280132E+0000	1.00000025622794E+0000
2.09439510400000E+0000	5.02821790805451E+0007	3.39494467129199E-0006	1.07189237011990E+0001	1.00000029339514E+0000
2.61799388000000E+0000	4.70763998397689E+0007	3.87404897642468E-0006	1.23803573563684E+0001	1.00000031362818E+0000
3.14159228000000E+0000	4.59952647712870E+0007	4.05727677821630E-0006	1.38974461246790E+0001	1.00000032095921E+0000
3.14159265600000E+0000	4.59952647715172E+0007	4.05727677817567E-0006	1.38974471972832E+0001	1.00000032095921E+0000
3.66519143200000E+0000	4.70710428672359E+0007	3.87394313203571E-0006	1.54145581663168E+0001	1.00000031362389E+0000
4.18879020800000E+0000	5.028214500280790E+0007	3.39477305450652E-0006	1.70760578325286E+0001	1.00000029338772E+0000
4.71228898400000E+0000	5.54527766830844E+0007	2.79134994813047E-0006	1.90402554645798E+0001	1.00000026621937E+0000
5.23598776000000E+0000	6.18064442308497E+0007	2.24694976828313E-0006	2.14663099247752E+0001	1.00000023885217E+0000
5.75958653600000E+0000	6.74648652892213E+0007	1.88594314164625E-0006	2.4433110063296E+0001	1.00000021881913E+0000
6.28318493600000E+0000	6.98024721021682E+0007	1.76159809031606E-0006	2.77954739998471E+0001	1.00000021148809E+0000
6.28318531200000E+0000	6.98034721016400E+0007	1.76159809034272E-0006	2.77954764702471E+0001	1.00000021148809E+0000
6.80678408800000E+0000	6.74635499436070E+0007	1.88591667942152E-0006	3.11577751363724E+0001	1.00000021882339E+0000

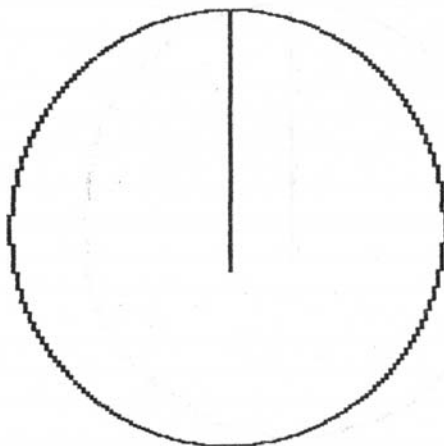


Rys. 8.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.9910000000000E+0032;  
 stała grawitacji= 6.6732000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.0000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 atmosf. e= 2.0560000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg wz.  $dE/ds = a(us) \cdot g$ , gdzie  $E = m(0) \cdot \cosh(\delta u)$ ;  $c^2$ ;  
 stała całkowania = 1.27485101363418E-0006;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.7266400000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.6400000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości= 1.0000000000000E+0003.

Tabela 9.

fi	R	omega	t	a(R)/a(Rn)
0.0000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065768690406E-0006	0.0000000000000E+0000	1.00000211488241E+0000
5.2359877600000E-0001	6.74659418147359E+0007	5.96336932292760E-0006	1.06328883094353E+0000	1.00000218815851E+0000
1.0471975520000E+0000	6.18081139453850E+0007	7.10509515919428E-0006	2.00151495163008E+0000	1.00000238845971E+0000
1.5707963280000E+0000	5.54543673844069E+0007	8.82651718589931E-0006	2.76874455795707E+0000	1.00000266212053E+0000
2.0943951040000E+0000	5.02846001319255E+0007	1.07347239279090E-0005	3.38991114962401E+0000	1.00000293581394E+0000
2.6179938800000E+0000	4.70716317084988E+0007	1.22501773309455E-0005	3.91534246953613E+0000	1.00000313620411E+0000
3.1415926560000E+0000	4.59952649356147E+0007	1.28302356251959E-0005	4.39510122374143E+0000	1.00000320959669E+0000
3.1418544520000E+0000	4.59952647478434E+0007	1.28302357299524E-0005	4.39533739113571E+0000	1.00000320959671E+0000
3.6651914320000E+0000	4.70697988846418E+0007	1.22511313547538E-0005	4.87484093422712E+0000	1.00000313632623E+0000
4.1987902080000E+0000	5.02809775467429E+0007	1.07362707893503E-0005	5.40021275543037E+0000	1.00000293602546E+0000
4.7123889840000E+0000	5.54492801567984E+0007	8.82813684846949E-0006	6.02127535577005E+0000	1.00000266236477E+0000
5.2359877600000E+0000	6.1802640848561E+0007	7.10635363602037E-0006	6.700336321091026E+0000	1.00000238867122E+0000
5.7595865360000E+0000	6.74621768040431E+0007	5.96403496334562E-0006	7.72345015006124E+0000	1.00000218828063E+0000
6.2831853120000E+0000	6.98033254047966E+0007	5.57068570162706E-0006	8.78967779637973E+0000	1.00000211488734E+0000
6.2834471120000E+0000	6.98033258543952E+0007	5.57068562986622E-0006	8.79022173002150E+0000	1.00000211488733E+0000
6.8067840880000E+0000	6.74659899303166E+0007	5.96336081698629E-0006	9.85296731979013E+0000	1.00000218815695E+0000

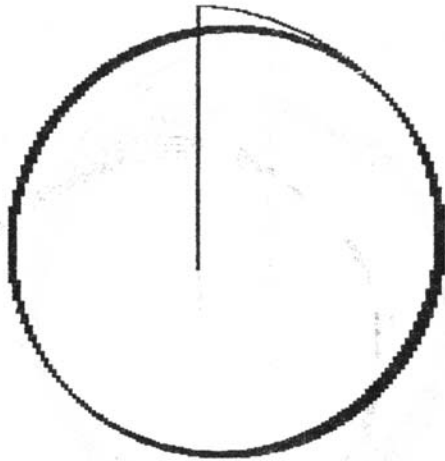


Rys. 9.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.99100000000000E+0036;  
 stała grawitacji= 6.67320000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.00000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 promień e= 2.05600000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg wz.  $dE/ds = w(us) \cdot \gamma$ , gdzie  $E = m(0) \cdot \cosh(\delta \cdot us/c^2)$ ;  
 stała całkowania = 1.28719992907022E-0002;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.72664000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.64000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości = 1.00000000000000E+0003.

Tabela 10.

$f_i$	R	$\omega$	t	$m(R)/m(R_0)$
0.00000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	5.57065968690406E-0004	0.00000000000000E+0000	1.02137402251150E+0000
5.23598776000000E-0001	6.80657120114462E+0007	5.85873828287581E-0004	1.06451710724811E-0002	1.02192565943122E+0000
1.04719755200000E+0000	6.50416283044068E+0007	6.41620263570634E-0004	2.06264303511606E-0002	1.02295669868156E+0000
1.57079632800000E+0000	5.95156072475663E+0007	7.66300560923178E-0004	2.93219033473554E-0002	1.02511478149646E+0000
2.09439510400000E+0000	5.37678355408062E+0007	9.38892292049334E-0004	3.64760238871102E-0002	1.02783658889811E+0000
2.61799388000000E+0000	4.92844515410407E+0007	1.11748325960499E-0003	4.23751216862041E-0002	1.03040700183082E+0000
3.14159265600000E+0000	4.66579540199583E+0007	1.24683647929844E-0003	4.74791752764855E-0002	1.03214592050212E+0000
3.56631822480000E+0000	4.59952647638652E+0007	1.28302357210139E-0003	5.13475601176666E-0002	1.03261654453404E+0000
3.66519143200000E+0000	4.60312555512291E+0007	1.28101802280096E-0003	5.22399547522997E-0002	1.03259063128164E+0000

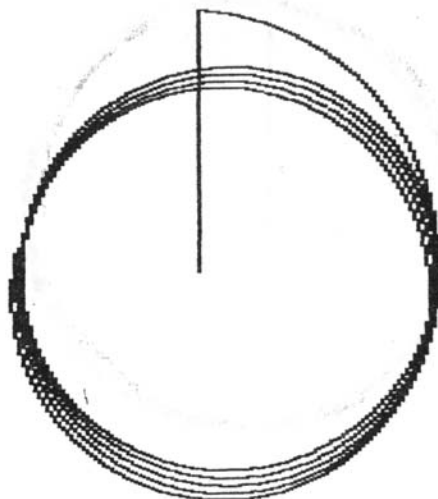


Rys. 10.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 7.96400000000000E+0036;  
 stała grawitacji= 6.67320000000000E-0011;  
 prędkość światła= 3.00000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.54518911800000E+0010;  
 mimośród e= 2.05600000000000E-0001;  
 oblicz. num. wg wz.  $dE/ds = v(u) \dot{t}$ , gdzie  $E = m(0) \cosh(\delta u) c^2$ ;  
 stała całkowania= 5.29116649200648E-0002;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.72664000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.64000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości:= 1.00000000000000E+0003.

Tabela 11.

$\Phi$	R	omega	t	a(R)/a(Rn)
0.00000000000000E+0000	6.98034883937563E+0007	1.11413193738081E-0003	0.00000000000000E+0000	1.08827645057623E+0000
5.23598776000000E-0001	6.72271984294054E+0007	1.20115997155996E-0003	5.30389151332011E-0003	1.09181022537652E+0000
1.04719755200000E+0000	6.32738826459080E+0007	1.35594448180939E-0003	9.98344579687309E-0003	1.09781856260371E+0000
1.57079632800000E+0000	6.06449936663317E+0007	1.47604965405640E-0003	1.42971668324580E-0002	1.10226881898244E+0000
2.09439510400000E+0000	5.63898042952000E+0007	1.70722083674663E-0003	1.81206218786127E-0002	1.11039769025325E+0000
2.61799388000000E+0000	5.20091122569432E+0007	2.00692894045846E-0003	2.14065989849251E-0002	1.12023510200384E+0000
3.14159265600000E+0000	4.85467649423859E+0007	2.30340490850170E-0003	2.42179985919177E-0002	1.12934309111575E+0000
3.66519143200000E+0000	4.54979389723996E+0007	2.51086562534102E-0003	2.67259306235708E-0002	1.13541218982949E+0000

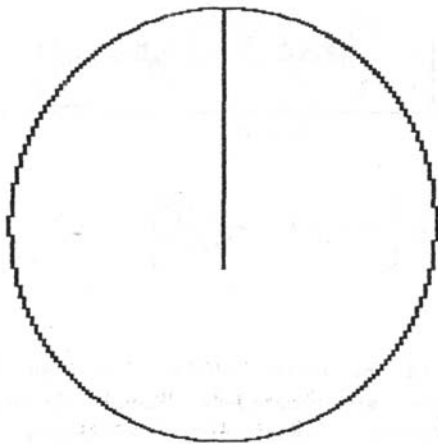


Rys. 11.

Obliczenia weryfikacyjne dla danych:  
 masa ciała centralnego= 1.991000000000000E+0037;  
 stała grawitacji= 6.673200000000000E-0011;  
 predkość światła= 3.000000000000000E+0008;  
 parametr p= 5.545189118000000E+0010;  
 sześcian e= 2.056000000000000E-0001;  
 obl. numer. wg wz.  $\text{opr}/\text{dt}=\omega(\text{ur})(\text{omega}^2\text{tr-g})$ ;  
 długość kroku całkowania (przy obl. numerycznych) H= 8.726640000000000E-0005;  
 liczba sekund w przyjętej jednostce czasu= 8.640000000000000E+0004;  
 liczba metrów w przyjętej jednostce odległości= 1.000000000000000E+0003.

Tabela 12.

$f_i$	R	omega	t	$s(R)/s(R_n)$
0.000000000000000E+0000	8.98034883937563E+0007	1.76159726802973E-0003	0.000000000000000E+0000	1.23551516024245E+0000
5.23598776000000E-0001	8.74652955479977E+0007	1.88581908795774E-0003	3.36235561270246E-0003	1.24460437443830E+0000
1.04719755200000E+0000	8.18160727045379E+0007	2.24624985284478E-0003	6.3295222603516E-0003	1.26974352869741E+0000
1.57079632800000E+0000	5.54770326141833E+0007	2.78890958723578E-0003	8.75698747941713E-0003	1.30486937155117E+0000
2.09439510400000E+0000	5.03116774664743E+0007	3.39096483858120E-0003	1.07232371198248E-0002	1.34100986425862E+0000
2.61799388000000E+0000	4.70884168634107E+0007	3.87108495752610E-0003	1.23862687870910E-0002	1.36821658102410E+0000
3.14159265600000E+0000	4.59953413907732E+0007	4.05726326092546E-0003	1.39040636294000E-0002	1.37844854053562E+0000
3.14599960920000E+0000	4.59952647478434E+0007	4.05727678235225E-0003	1.39166352291075E-0002	1.3784492775831E+0000
3.66519143200000E+0000	4.70521338878402E+0007	3.87705742351925E-0003	1.54205657703002E-0002	1.36854739185551E+0000
4.18879020800000E+0000	5.02401028145207E+0007	3.40063360918778E-0003	1.70799770235284E-0002	1.34157055781898E+0000
4.71238898400000E+0000	5.53766037918590E+0007	2.79903447260238E-0003	1.90397353347463E-0002	1.30549924536953E+0000
5.23598776000000E+0000	8.17077849471211E+0007	2.25414042240992E-0003	2.1457193151655E-0002	1.27027576916877E+0000
5.75958653600000E+0000	8.73902733737523E+0007	1.89002019853434E-0003	2.44167390847237E-0002	1.24490759532522E+0000
6.28318531200000E+0000	8.98027822637108E+0007	1.76163290910335E-0003	2.77752583009437E-0002	1.23551780354129E+0000
6.29199218400000E+0000	8.98034883937563E+0007	1.76159726802973E-0003	2.78331671756266E-0002	1.23551516024245E+0000
8.90678408800000E+0000	8.75393431486152E+0007	1.88168627211174E-0003	3.11413804123352E-0002	1.24430582527929E+0000



Rys. 12.

Przedstawione tu tabele będą pomocne w ocenie możliwości uzyskania dokładności obliczeń. Celem autora jest zwrócenie uwagi czytelnika na nowe możliwości w zakresie opisu zjawisk związanych z powszechnym ciężeniem. Autor pragnie też zwrócić uwagę na fakt, że nie wszystkie wyniki przedstawione w tabelach obliczono z jednakową dokładnością. Największa dotyczy obliczeń promienia i kąta.

W pracy [3] została podjęta pierwsza próba opisanie trajektorii ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia. Autor nie mógł jeszcze wówczas korzystać z odpowiedniej klasy komputera i jego oprogramowania, musiał mu zatem wystarczyć materiał porównawczy. W pracy tej przedstawiono uzasadnienie, że moment pędu ( $r \times u$ ) jest wartością stałą /równanie 1/ oraz przyjęto hipotezę, że zmiana energii ciała poruszającego się w polu centralno-symetrycznym uwarunkowana jest zmianą składowej pędu  $p_r$ . Przy tym założeniu otrzymano równanie pozwalające wyznaczyć trajektorię ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right)^2 = \frac{c^2 \left[ 1 - e \left( \frac{p k M}{c^2} \sigma^2 - \frac{2 k M}{c^2} \sigma + C \right) \right]}{p k M}, \quad /45a/$$

$$\text{gdzie } C = \frac{k M}{p c^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{p}{r_{\max}} \right)^2 \right]. \quad /45b/$$

Hipoteza ta była na tyle trafna, że tak wyznaczona trajektoria stała się doznającą obrotu elipsą. Obecne obliczenia numeryczne / tabela 12. / pokazują jednak, że obrót wyznaczonej tym równaniem trajektorii jest zbyt mały,



aby mógł być poprawny. Wynika z tego, że rozpatrywaną trajektorię ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia najlepiej /w sensie poprawności/ opisują równania /42-44/.

W pracy [3] przedstawiono także równanie /25/ oraz równanie:

$$v_2 = v_1 e^{\frac{\delta v_{12}}{c^2}}, \quad /46/$$

$$\text{gdzie } \delta v_{12} = \frac{kM}{r_2} - \frac{kM}{r_1}.$$

Równanie /24b/ pozwala wyrazić masę ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia w funkcji promienia, zaś równanie /46/ wyraża częstotliwość fali elektromagnetycznej w funkcji tego promienia.

**PROSTY PRZYŁĄD ILUSTRUJĄCY RÓŻNICĘ W METODACH  
WYZNACZANIA TRAJEKTORII CIAŁ  
W CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLU CIĄŻENIA**

Masę ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia możemy wyrazić w funkcji promienia wodzącego  $m(r)$  lub w funkcji prędkości  $m(v)$ . Obliczenia sprawdzające najprościej jest wykonać dla przypadku, gdy  $r = r_{\min}$  oraz  $r = r_{\max}$ ; wówczas  $v_r = 0$ , zaś  $v = v_s = r \omega$ . Jeżeli trajektoria wyznaczona zastała przy wykorzystaniu równań /42-44/, zachodzi następująca zależność:

$$\frac{m(r_{\min})}{m(r_{\max})} = \frac{m(r_{\min})/m(r_{\infty})}{m(r_{\max})/m(r_{\infty})} = \frac{m(v(r_{\min}))}{m(v(r_{\max}))}. \quad /47/$$

Równanie /47/ ilustruje spełnienie bilansu masy ciała

poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia /również bilansu energetycznego/. Spełnienie tego równania jest warunkiem koniecznym poprawności opisu rozpatrywanej trajektorii. Dla danych z tabeli 7. otrzymujemy:

$$\frac{m(r_{\min})}{m(r_{\max})} = \frac{1,00000003209592}{1,0000000211488} \cong 1.000000011 ;$$

$$v(r_{\min}) \cong 4599.526477 \cdot 10^7 * 12.83023571 \cdot 10^{-7} = \\ \cong 59013.00885 \text{ [m/s]} ;$$

$$v(r_{\max}) \cong 6980.3488393 \cdot 10^7 * 5.570659686 \cdot 10^{-7} = \\ \cong 38885.14817 \text{ [m/s]} ;$$

$$\cosh\left(\frac{v(r_{\min})}{c}\right) \cong 1.000000019 ;$$

$$\cosh\left(\frac{v(r_{\max})}{c}\right) \cong 1.000000008 ;$$

$$\frac{m(v(r_{\min}))}{m(v(r_{\max}))} = \frac{\cosh\left(\frac{v(r_{\min})}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{v(r_{\max})}{c}\right)} \cong 1.000000011 .$$

Widać z powyższego, że równanie /47/ jest spełnione.

Gdybyśmy trajektorię wyznaczyli przy wykorzystaniu równań /13-15/, które nie uwzględniają zmienności masy ciała /tabela 1-2/, otrzymalibyśmy wówczas:

$$\frac{m(v(r_{\min}))}{m(v(r_{\max}))} = \frac{m(r_{\min})}{m(r_{\max})} = 1 .$$

Jeżeli obliczeń dokonamy jak w przykładzie wykorzystującym

dane z tabeli 7., otrzymamy:

$$\frac{m(v(r_{\min}))}{m(v(r_{\max}))} \cong 1.000000011 .$$

Dla przypadku, gdy trajektorię wyznaczmy na podstawie równań /42-44/, przy założeniu 100-krotnie większej masy ciała centralnego /tabela 9./, wówczas

$$\frac{m(r_{\min})}{m(r_{\max})} = \frac{m(v(r_{\min}))}{m(v(r_{\max}))} \cong 1.000001095 .$$

Równanie /47/ zostanie spełnione również w przypadku, gdy trajektorię wyznaczmy z wykorzystaniem równań /34b-36/. Może ono stanowić także jedno z równań pozwalających określić nieznanne wartości:  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ .

#### ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono opis metody wyznaczenia trajektorii ciała poruszającego się w centralno-symetrycznym polu ciężenia przy uwzględnieniu zmienności masy tego ciała oraz dokonano wstępnej weryfikacji wzorów opisujących tę zmienność. Oczywistym jest, że zarówno sama metoda, jak i wzory podlegają dalszej weryfikacji, z wykorzystaniem lepszego sprzętu i być może doskonalszych programów obliczeń. Pamiętać należy, że spełnienie równania /47/ oznacza tylko spełnienie warunku koniecznego poprawności opisu trajektorii ciała w centralno-symetrycznym polu ciężenia. Ostateczną oceną będzie zgodność wyników obliczeń z rzeczywistością. Na podstawie przedstawionych wyżej danych równania /42-44/ mogą w pełni spełnić warunek takiej poprawności.

Zjawiskiem powszechnego ciężenia, w tym wyznaczaniem trajektorii ciał w centralno-symetrycznym polu ciężenia

zajmuje się ogólna teoria względności. Wykorzystuje ona bardzo uogólniony aparat matematyczny posługując się pojęciem czterowymiarowej pseudoriemannowskiej przestrzeni zdarzeń. Rozwiązanie rozpatrywanych tu problemów na gruncie ogólnej teorii względności przedstawiono przykładowo w pracy [5]. Zajmowanie się tą teorią daleko wykracza poza możliwości niniejszego artykułu, dlatego też zostaje tu podany jedynie wzór /będący rozwiązaniem uproszczonym/ zaczerpnięty z pracy [5]:

$$\frac{d^2 \sigma}{d \rho^2} = \frac{1}{\rho} - \sigma + a \sigma^2, \quad /48/$$

gdzie  $a = \frac{3 k M}{c^2}$ .

Wyznaczenie interesującej nas trajektorii przy wykorzystaniu równania /48/ wymaga dwukrotnego całkowania numerycznego, co może znacznie obniżyć dokładność obliczeń. Autor zrezygnował więc z ilustracji wyników obliczeń według tego wzoru.

#### BIBLIOGRAFIA

1. EINSTEIN A.: Istota teorii względności. PWN, Warszawa 1962.
2. KAMUSIŃSKI A.: Przyczynek do interpretacji wyników doświadczenia Fizeau. Zeszyty Naukowe WSMW 1980, nr 4.
3. KAMUSIŃSKI A.: Masy ciał i ich trajektorie w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciężenia. Zeszyty Naukowe WSMW 1976, nr 4.
4. KAMUSIŃSKI A.: Indukcja jednobiegunowa w świetle teorii klasycznej i teorii względności. Zeszyty Naukowe WSMW 1972, nr 1.
5. MICHELSON A., MORLEY A.: Art. XXXVI - Influence of Motion

- of the Medium on the Velocity of Light. The American Journal of science 1886.
6. RASZEWSKI P.K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa. PWN, Warszawa 1956.
  7. SILBERSTEIN L.: Elektryczność i magnetyzm. Tom II, Warszawa 1910.
  8. TRAUTMAN A.: Teoria względności. Ossolineum, 1971.
  9. VAN NAME F.W.: Fizyka współczesna. PWN, Warszawa 1965.

TRAJECTORY EQUATIONS THAT ALLOW FOR THE ENERGY-MASS  
BALANCE OF OBJECTS IN THE CENTRAL-SYMMETRIC  
GRAVITATIONAL FIELD

Summary

The work proves that the velocity of a body moving in the central-symmetric gravitational field is constant, despite the assumption of its mass variability. Presented are not only the classical equations (assuming the constancy of mass) in the central-symmetric gravitational field but also the equations of that trajectory, with variability of mass. The variability of mass is described as function of the velocity and function of the radius vector. The variability of mass is expressed in two different equations, and presented is a possibility of correctness assessment of the equations by means of comparison of trajectories based on computations with these observed.