ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY MARYNARKI WOJENNEJ
ROK XVII, NR 4/51, 1976

ANTONI KAMUSIŃSKI

MASY CIAŁ I ICH TRAJEKTORIE W OŚRODKU Z CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLEM CIĄŻENIA

STRESZCZENIE

Przyjmując, że masa ciał jest funkcją ich prędkości w ośrodku (układzie) z centralno-symetrycznym polem ciążenia, oraz potencjału tego pola wykazano, że opis zjawisk związanych z powszechnym ciążeniem można wykonać w oparciu o tok rozumowania stosowany w fizyce klasycznej.

Wyprowadzone zależności mają postać zbliżoną do zależności wg ogólnej teorii względności i zgodne są z wynikami doświadczeń.

WSTĘP

Opisując trajektorię ciał w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia przyjmuje się zazwyczaj, że ich masa jest wielkością stałą. Takie założenie jest pewnym, być może niezamierzonym, uproszczeniem. Choć w większości przypadków uproszczenie to nie ma większego znaczenia, to niekiedy może być przyczyną (np. opis trajektorii Merkurego) nieścisłości w obliczeniach.

W ogólnym przypadku należy założyć, że masa ciał jest funkcją ich prędkości w ośrodku oraz funkcją potencjału pola ciążenia.

W celu uproszczenia rozważań (chodzi tu tylko o wyjaśnienie istoty rzeczy) przyjmiemy, że będziemy rozpatrywać ruch ciał w ośrodku będącym inercjalnym układem odniesienia. Ponadto przyjmjemy, że masa ciała będącego źródłem pola centralno-symetrycznego jest nieporównywalnie większa od masy ciał, którego trajektorię opiszemy oraz, że ciało to znajduje się w spoczynku w przyjętym układzie odniesienia. W przypadku takiego uproszczenia nie uwzględniamy zmiany masy ciała będącego źródłem pola centralno-symetrycznego.

W rozważaniach uściślono również stałą

$$g = \frac{kM}{r^2} \tag{1}$$

określoną mianem „przyspieszenie grawitacyjne".

Ruch ciała w ośrodku (układzie) z centralno-symetrycznym polem ciążenia najprościej można opisywać za pomocą współrzędnych bieguno-

73

wych r, φ, w początku których znajduje się ciało będące źródłem pola centralno-symetrycznego. Taki układ współrzędnych przyjmiemy w naszych rozważaniach.

MOMENT PĘDU I MOMENT PRĘDKOŚCI CIAŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ W OŚRODKU Z CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLEM CIĄŻENIA

Zmiana momentu pędu ciała poruszającego się w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia wyniesie:

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{r}\, x\, m(r,u)\bar{u}] = \frac{d\bar{r}}{dt}\, x\, \bar{u} \cdot m(r,u) +$$

$$+ (\bar{r}\, x\, \bar{u})\frac{d\, m(r,u)}{dt} + \bar{r}\, x\, \frac{d\bar{u}}{dt} \cdot m(r,u) = (\bar{r}\, x\, \bar{u}) \cdot \frac{d\, m(r,u)}{dt} \qquad (2)$$

Z zależności (2) wynika, że moment prędkości $(\bar{r}\, x\, \bar{u})$ jest wartością stałą.

Prędkość kątowa ciał poruszających się w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia

Przyjmijmy, że dla promienia $r = p$ (p-parametr) zachodzi równanie:

$$\omega_p^2 \cdot p = \frac{kM}{p^2} \qquad (3)$$

stąd:

$$\omega_p = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{kM}{p}} \qquad (4)$$

Ponieważ moment prędkości $(\bar{r}\, x\, \bar{u})$ jest wartością stałą (zależność 2), to dla dowolnego r zachodzi:

$$r^2 \cdot \omega = p^2 \cdot \omega_p \qquad (5)$$

Wstawiając (4) do (5) otrzymujemy:

$$\omega = \frac{p}{r^2}\sqrt{\frac{kM}{p}} \qquad (6)$$

W rozważanych przez nas przypadkach składowa prędkości

$$u_{\varphi} = \omega \cdot r = \frac{p}{r}\sqrt{\frac{kM}{p^2}} \qquad (7)$$

jest tylko funkcją promienia „r". Biorąc to pod uwagę, masę ciała, którego trajektorię opisujemy, możemy również traktować jako funkcję potencjału (promienia) oraz składowej prędkości u_r:

$$m = m(r, u_r) \qquad (8)$$

74

Przyrost energii ciała poruszającego się w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia w wyniku zmiany składowej jego pędu w osi promienia

Przyrost pędu fotonu poruszającego się po drodze „r" może być określony zależnością: (w analogiczny sposób do przyrostu pędu dowolnego ciała)

$$\frac{d\,p_f}{d\,t} = \frac{d\,(m \cdot c)}{d\,t} = c\,\frac{d\,m}{d\,t} \tag{9}$$

ale również:

$$\frac{d\,p_f}{d\,t} = \frac{d\,E}{d\,r} \tag{10}$$

Wstawiając (10) do (9) otrzymujemy:

$$d\,E = c\,\frac{d\,m}{d\,t}\,d\,r, \tag{11}$$

ponieważ jednak

$$\frac{d\,r}{d\,t} = c, \tag{12}$$

to

$$d\,E = c^2 \cdot d\,m. \tag{13}$$

Ogólnie znana zależność (13) mówi, że danemu ciału nie można dostarczyć energii, nie dostarczając mu dodatkowej masy.

W wyniku oddziaływania centralno-symetrycznego pola ciążenia, składowa pędu ciała w osi promienia ulega zmianie zgodnie z zależnością:

$$\frac{d\,p_r}{d\,t} = \frac{d\,[m\,(r, u_r) \cdot u_r]}{d\,t} = u_r \cdot \frac{d\,m\,(r, u_r)}{d\,t} + m\,(r, u_r) \cdot \frac{d\,u_r}{d\,t} \tag{14}$$

Przez analogię do (10) możemy również napisać:

$$\frac{d\,p_r}{d\,t} = \frac{d\,E}{d\,r} \tag{15}$$

Składowa prędkości u_r wyrażona jest zależnością:

$$u_r = \frac{d\,r}{d\,t} \tag{16}$$

Porównując prawe strony (14, 15) oraz uwzględniając (13, 16) otrzymujemy:

$$\frac{d\,[m\,(r, u_r)]}{m\,(r, u_r)} = \frac{u_r \cdot d\,u_r}{c^2 - u_r^2} \tag{17}$$

a stąd:

$$m\,(r, u_r) = \frac{m\,(r, u_r = 0)}{\sqrt{1 - \frac{u_r^2}{c^2}}} \tag{17a}$$

75

Dla $u_r = 0$ promień r jest wartością stałą, więc

$$m\,(r, u_r = 0) = m\,(r = \text{const},\ u_r = 0) = \text{const}. \tag{18}$$

Składowa pędu w osi „r" określona będzie wyrażeniem

$$p_r = \frac{m\,(r, u_r = 0)}{\sqrt{1 - \frac{u_r^2}{c^2}}} \cdot u_r \tag{19}$$

Uwzględniając (18), z zależności (19) znajdujemy wyrażenie na przyrost składowej pędu w osi „r":

$$d\,p_r = \frac{m\,(r, u_r = 0)}{\left(\sqrt{1 - \frac{u_r^2}{c^2}}\right)^3} \cdot d\,u = \gamma^2 \cdot m\,(r, u_r) \cdot d\,u_r \tag{20}$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_r^2}{c^2}}} \tag{21}$$

Przyrost energii ciała w wyniku zmiany składowej pędu p_r *wynosi:*

$$d\,E = \frac{d\,p_r}{d\,t} \cdot d\,r = u_r \cdot d\,p_r = \gamma^2 \cdot m\,(r, u_r) \cdot d\,u_r \tag{22}$$

RÓWNANIE TRAJEKTORII CIAŁ W OŚRODKU INERCJALNYM Z CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLEM CIĄŻENIA

Ciało swobodne, którego $\omega = 0$, w ośrodku inercjalnym (układzie) z centralno-symetrycznym polem ciążenia doznaje zmiany pędu p_r zgodnie z równaniem:

$$\frac{d\,p_r}{d\,t} = -\,m\,(r, u_r) \cdot g = -\,m\,(r, u_r) \cdot \frac{k\,M}{r^2}. \tag{23}$$

Jeżeli prędkość kątowa ciała jest różna od zera, wówczas:

$$\frac{d\,p_r}{d\,t} = m\,(r, u_r)\,(\omega^2 \cdot r - g). \tag{24}$$

Porównując prawe strony (20, 24) otrzymujemy:

$$\gamma^2 \cdot \frac{d\,u_r}{d\,t} = (\omega^2 \cdot r - g). \tag{25}$$

Stałą g (dla danego r) najprościej wyznaczyć z (25), gdy $\frac{d\,u_r}{dt} = 0$, lub gdy $\omega = 0$. Zależność (25) uściśla nam jednocześnie określenie stałej g.

Uwzględniając (6), (21), (25) oraz mnożąc (25) obustronnie przez „dr", znajdujemy wyrażenie opisujące ruch ciała w ośrodku inercjalnym (układzie) z centralno-symetrycznym polem ciążenia:

$$\frac{u_r \cdot d\,u_r}{1 - \frac{u_r^2}{c^2}} = \left(\frac{p\,k\,M}{r^3} - \frac{k\,M}{r^2}\right) d\,r \tag{26}$$

76

Rozwiązując (26) otrzymujemy:

$$u_r{}^2 = c^2 \left[1 - e^{\left(\frac{p\,k\,M}{c^2 \cdot r^2} - \frac{2\,k\,M}{c^2 \cdot r} + h\right)}\right] \tag{27}$$

Stałą całkowania h znajdziemy z warunku, że dla $r = r_{max}$ oraz $r = r_{min}$: $u_r = 0$, stąd:

$$h = \frac{k\,M}{p\,c^2}\left[1 - \left(1 - \frac{p}{r_{max}}\right)^2\right] \tag{28}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\sigma = \frac{1}{r}, \quad d\sigma = \frac{1}{r^2}\,dr, \quad \omega = \frac{d\,\varphi}{d\,t},$$

oraz uwzględniając (6), zależność (27) możemy zapisać w postaci:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2\left[1 - e^{\left(\frac{p\,k\,M}{c^2}\sigma^2 - \frac{2\,k\,M}{c^2} + h\right)}\right]}{p\,k\,M}. \tag{29}$$

Równanie (29) rozwiążemy metodą przybliżoną.

Funkcję

$$f(\sigma) = e^{\left(\frac{p\,k\,M}{c^2}\sigma^2 - \frac{2\,k\,M}{c^2} + h\right)} \tag{30}$$

rozłożymy w szereg Maclaurina i uwzględnimy pierwsze jego trzy wyrazy (pozostałe w interesujących nas przypadkach są do pominięcia). Wyrażenie (29) przyjmuje teraz postać:

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi}\right)^2 \cong \frac{c^2}{p\,k\,M}\left[1 - \left(1 + \frac{p\,k\,M}{c^2}\sigma^2\right)\left(1 - \frac{2\,k\,M}{c^2}\sigma\right)e^h\right] \tag{31}$$

W interesujących nas przypadkach stała h jest bardzo mała i możemy przyjąć uproszczenie:

$$e^h \cong 1 \tag{32}$$

stąd:

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi}\right)^2 = \frac{2}{p}\,\sigma - \sigma^2 + \frac{2\,k\,M}{c^2}\,\sigma^3. \tag{33}$$

Różniczkując obustronnie (33), równanie to zastąpimy równoważnym mu równaniem drugiego rzędu:

$$2\,\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi}\cdot\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{2}{p}\cdot\frac{d\,\sigma}{d\varphi} - 2\,\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi} + 6\,\frac{k\,M}{c^2}\,\sigma^2\cdot\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi} \tag{34}$$

Dzieląc (34) obustronnie przez $2d\sigma/d\varphi$, otrzymujemy:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + 3\,\frac{k\,M}{c^2}\,\sigma^2. \tag{35}$$

Równanie (35) jest identyczne z równaniem otrzymanym na podstawie ogólnej teorii względności (wyprowadzonym również przy wielu uproszczeniach — [1] s. 558). Przyjęte w naszych rozważaniach rozumowa-

77

nie pozwalające na wyprowadzenie zależności (29), (35) jest niewspółmiernie prostsze i nie wymaga skomplikowanego aparatu matematycznego.

Z uproszczenia (32) można zrezygnować; zostało ono przyjęte w celu wykazania podobieństwa dalszych zależności do wzorów wg ogólnej teorii względności.

Łatwo zauważyć, że przy założeniu stałości masy ciał (równanie 14) otrzymalibyśmy:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma \tag{36}$$

Przybliżone rozwiązanie równania (35) ma postać:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \left[\left(1 - \frac{3\,k\,M}{p\,c^2} \right) (\varphi - \beta) \right]} \tag{37}$$

gdzie:

ε — mimośród,
β — wartość stała.

Równanie (37) oznacza, że w tym samym czasie, w którym planeta obiega swoją orbitę, orbita obraca się o kąt:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot k \cdot M}{p\,c^2} \tag{38}$$

Jeżeli przyjmiemy, że parametr p jest równy nieskończoności, to równanie (35) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\,\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \frac{3\,k\,M}{c^2}\,\sigma^2 \tag{39}$$

i opisuje trajektorię promienia świetlnego (podobnie jak w ogólnej teorii względności — poz. [1] s. 560).

Rozwiązując (39) metodą przybliżoną określono odchylenie promienia od kierunku początkowego (wyznaczonego prostą w odległości R). Odchylenie to równe jest kątowi

$$2\delta = \frac{4\,k\,M}{c^2 R} \tag{40}$$

MASA CIAŁ PORUSZAJĄCYCH SIĘ W OŚRODKU Z CENTRALNO-SYMETRYCZNYM POLEM CIĄŻENIA

W ogólnym przypadku, całkowity przyrost energii ciała poruszającego się w ośrodku inercyjnym (układzie) z centralno-symetrycznym polem ciążenia, wyrażony jest zależnością:

$$d\,E = -\,m\,(r, u_r)\,\frac{k\,M}{r^2} \cdot dr. \tag{41}$$

Uwzględniając (13) z zależności (41) otrzymujemy:

$$c^2 \cdot d\,m\,(r, u_r) = -\,m\,(r, u_r)\,\frac{k\,M}{r^2} \cdot dr \tag{42}$$

78

stąd:

$$m\,(r, u_r) = m\,(r = \infty,\ u_{r=\infty}) \cdot e^{\frac{kM}{c^2 \cdot r}}. \tag{43}$$

Biorąc pod uwagę (17a), (27) masę $m\,(r, u_r)$ możemy również wyznaczyć z zależności:

$$m\,(r, u_r) = m\,(r, u_r = 0) \cdot e^{\left(\frac{kM}{c^2 \cdot r} - \frac{pkM}{2c^2 \cdot r^2} - \frac{h}{2}\right)}. \tag{44}$$

Porównując prawe strony (43), (44) znajdujemy:

$$m\,(r, u_r = 0) = m\,(r = \infty,\ u_{r=\infty}) \cdot e^{\left(\frac{pkM}{2c^2 \cdot r^2} + \frac{h}{2}\right)}. \tag{45}$$

Masę $m\,(r, u_r = 0)$ wyróżniono ze względu na przeprowadzony tok obliczeń.

Jeżeli rozwiązując równanie (42) dana będzie masa ciała dla r_1 i składowa prędkości u_{r1}, zaś poszukiwać będziemy masy tego ciała dla r_2 i u_{r2}, to w miejsce (43) otrzymamy:

$$m\,(r_2, u_{r2}) = m\,(r_1, u_{r1}) \cdot e^{\left(\frac{k \cdot M}{c^2 \cdot r_2} - \frac{k \cdot M}{c^2 \cdot r_1}\right)} = m\,(r_1, u_{r1}) \cdot e^{\left(\frac{\psi_1}{c^2} - \frac{\psi_2}{c^2}\right)} =$$

$$= m\,(r_1, u_{r1}) \cdot e^{\frac{\Delta\psi_{12}}{c^2}} \tag{46}$$

gdzie:

$$\psi_1 = -\frac{k\,M}{r_1}, \quad \psi_2 = -\frac{k\,M}{r^2}, \quad \Delta\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2.$$

Zależność (46) jest słuszna również w odniesieniu do masy fotonów. Ponieważ energia fotonu, jego masa i częstotliwość fali elektromagnetycznej związanej z ruchem fotonu są do siebie proporcjonalne, to zależność pomiędzy częstotliwościami tej fali odpowiadającymi promieniom r_2 i r_1 przyjmie postać:

$$\nu_2 = \nu_1 \cdot e^{\frac{\Delta\psi_{12}}{c^2}} \tag{47}$$

Rozwijając (47) w szereg Maclaurina i uwzględniając pierwsze dwa człony (pozostałe są do pominięcia) otrzymamy:

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\psi_1 - \psi_2}{c^2}\right) \tag{48}$$

Wyrażenie (48) jest identyczne z odpowiadającym mu wzorem otrzymanym na podstawie ogólnej teorii względności [2] s. 139).

Wszystkie doświadczenia potwierdzające wyniki obliczeń według teorii względności dowodzą również słuszności wyprowadzonych tu wzorów. Interpretacja otrzymanych zależności jest bardzo prosta i zgodna z zasadami przyjętymi w „teorii klasycznej".

Należy pamiętać, że oprócz zmiany częstotliwości fali elektromagnetycznej wywołanej zmianami potencjału pola ciążenia, wystąpi również zmiana tej częstotliwości w wyniku zjawiska Dopplera. Zjawisko to, jak również zjawisko aberracji astronomicznej, omówiono w [3].

WNIOSKI

1. Jeżeli założymy, że masa ciał jest również funkcją potencjału pola ciążenia, to zjawiska fizyczne związane z powszechnym ciążeniem można opisać stosując klasyczny tok rozumowania.
2. W ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia, częstotliwość a zarazem długość fali elektromagnetycznej ulegają zmianie, dlatego nie mogą one służyć za wzorce jednostek pomiarowych.
3. Układ odniesienia umożliwiający opis ruchu ciał w ośrodku z centralno-symetrycznym polem ciążenia można przedstawić według zasad geometrii Euklidesowej.

BIBLIOGRAFIA

1. Raszewski P.K. *Geometria Riemanna i analiza tensorowa.* PWN, Warszawa 1958.
2. Trautman A. *Teoria względności.* Ossolineum, 1971.
3. Kamusiński A. *Refleksje na temat zjawisk fizycznych związanych z ruchem ciał w przestrzeni.* Dodatek do: Zbiór Prac WSMW, Gdynia 1973 nr 37.
4. Kamusiński A. *Indukcja jednobiegunowa w świetle teorii klasycznej i teorii względności.* Zeszyty Naukowe WSMW, Gdynia 1976 nr 1.