

Agata Załęska-Fornal

Marek Zellma

DWUWYMIAROWA FUNKCJA REGRESJI OPISANA ZA POMOCĄ BAZOWYCH FUNKCJI SKLEJANYCH

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania bazowych funkcji sklejanych do wyznaczenia dwuwymiarowej funkcji regresji metodą największej wiarygodności.

WSTĘP

Niech zmienna losowa Z zależy od funkcji rzeczywistej $f(x, y)$ i losowego składnika $\varepsilon(x, y)$ wyrażającego zakłócenie

$$Z = f(x, y) + \varepsilon(x, y),$$

gdzie $\varepsilon(x, y)$ jest zmienną losową. Ponadto zakładamy, że dla dowolnych punktów (x'_k, y'_k) , $k \in \overline{0, n_1}$ zmienne $\varepsilon(x_k, y_k)$ są niezależne.

Niech będą dane wartości \tilde{z}_k , $k \in \overline{0, n_1}$ zmiennej Z zaobserwowane w punktach (x'_k, y'_k) , $k \in \overline{0, n_1}$. W danych punktach (x'_k, y'_k) , $k \in \overline{0, n_1}$ możliwe są różne wartości Z .

BAZOWE FUNKCJE SKLEJANE N-TEGO STOPNIA

Niech

$$B = \{B_n^{-n}, \dots, B_n^{N-1}\}$$

będzie zbiorem tzw. funkcji sklejanych n-tego stopnia wyznaczonych rekurencyjnie za pomocą wzoru De Boora [4]:

$$\tilde{B}_n^i(x) = \frac{n+1}{n} \left[\frac{x-x_i}{x_{i+n+1}-x_i} \tilde{B}_{n-1}^i(x) + \frac{x_{i+n+1}-x}{x_{i+n+1}-x_i} \tilde{B}_{n-1}^{i+1}(x) \right], \quad (1)$$

gdzie $i \in \overline{-n, N-1}$, a dla $n=0$ baza $\tilde{B}_0^i(x)$ jest opisana następująco:

$$\tilde{B}_0^i(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{for } t \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

Niech Δ_N , gdzie $N < n_1 - n$ będzie układem punktów

$$x_i = x'_0 + ih, \quad h := \frac{x'_n - x'_0}{N}, \quad i \in \overline{0, N}$$

dzielących przedział $[x'_0, x'_n] = [x_0, x_N]$ na N podprzedziałów

$$\Delta_N : x_0 < \dots < x_N.$$

Uzupełnimy podział Δ_N punktami

$$x_{-i} = x_0 - ih, \quad x_{N+i} = x_N + ih, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Bazowe funkcje mają następujące własności

$$\tilde{B}(x) > 0 \text{ dla } x_i < x < x_{i+n+1}, \quad \tilde{B}(x) = 0 \text{ dla } x \notin (x_i, x_{i+n+1}), \quad \int_{x_i}^{x_{i+n+1}} \tilde{B}_n^i(x) dx = 1.$$

W każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ funkcję sklejaną można zapisać jako

$$s_i(x) = c_{i-n} \tilde{B}_n^{i-n}(x) + \dots + c_i \tilde{B}_n^i(x), \quad c_i \in R, \quad i \in \overline{0, N-1}.$$

Zatem każdą funkcję sklejaną s można przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$s(x) = \sum_{i=-n}^{N-1} c_i \tilde{B}_n^i(x).$$

W praktycznych zagadnieniach znajdują zastosowanie funkcje sklepane II rzędu określone wzorem

$$B_n^i(x) := \frac{x_{i+n+1} - x_i}{n+1} \tilde{B}_n^i(x). \quad (2)$$

Funkcje te stanowią rozkład jedności, tzn. dla każdego $x \in (x_0, x_N)$ mamy

$$\sum_i \tilde{B}_n^i(x) = 1.$$

Dalej do opisu powierzchni zastosujemy bazową funkcję sklejaną dwóch zmiennych określoną w obszarze Ω : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

W obszarze tym definiujemy siatkę $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$,

$$\begin{aligned} \Delta_x : x_i &= a + ih_x, \quad i \in \overline{0, N}, \quad x_0 := a, \quad h_x := \frac{b-a}{N}, \\ \Delta_y : y_j &= c + jh_y, \quad j \in \overline{0, M}, \quad y_0 := c, \quad h_y := \frac{d-c}{M}. \end{aligned} \quad (3)$$

Podział (3) dzieli obszar Ω na prostokąty

$$\Omega_{ij} = \{ (x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}, \quad i \in \overline{0, N-1}, \quad j \in \overline{0, M-1} \}.$$

Siatkę $\Delta_x \times \Delta_y$ rozszerzymy o punkty

$$\begin{aligned} \Delta_x & : x_{-n} < \dots < x_{-1} < x_0 \quad ; \quad x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+n}, \\ \Delta_y & : y_{-m} < \dots < y_{-1} < y_0 \quad ; \quad y_M < y_{M+1} < \dots < y_{M+m}. \end{aligned}$$

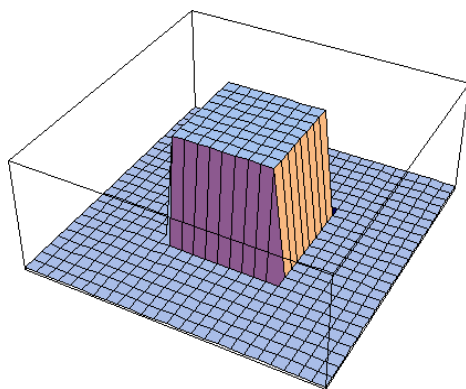
Dwuwymiarową funkcję regresji przedstawimy w postaci kombinacji liniowej

$$s = \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij} B_n^i(x) B_m^j(y), \quad c_{ij} \in \mathbf{R}, \quad i \in \overline{-n, N-1}, \quad j \in \overline{-m, M-1}$$

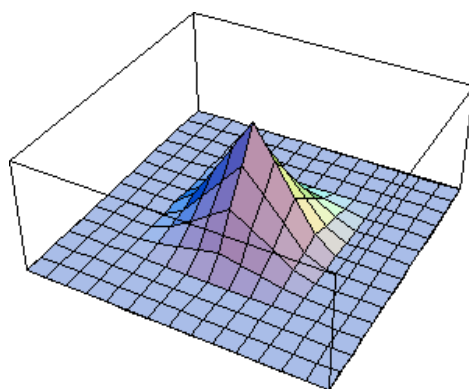
utworzonej ze wszystkich możliwych iloczynów $B_n^i(x) \cdot B_m^j(y)$ elementów baz:

$$B_x = \{B_{-n}^{-n}(x), \dots, B_{-n}^{N-1}(x)\}, \quad B_y = \{B_{-m}^{-m}(y), \dots, B_{-m}^{M-1}(y)\}.$$

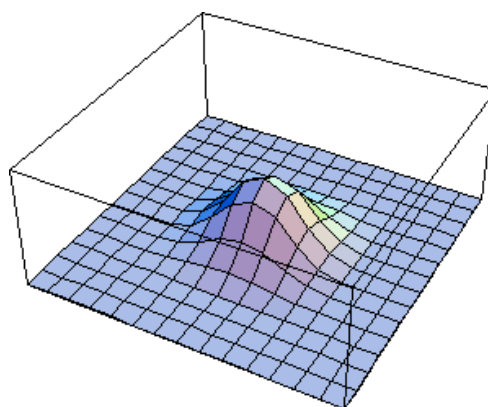
Przykłady bazowych dwuwymiarowych funkcji sklejanych od stopnia zerowego do stopnia piątego pokazane są na rysunkach 1. – 6.



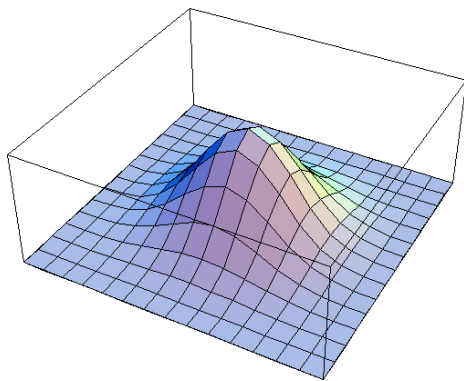
Rys. 1. Dwuwymiarowa bazowa funkcja sklejana stopnia zerowego



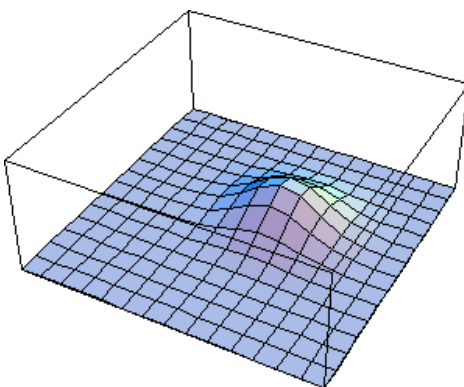
Rys. 2. Wykres dwuwymiarowej bazowej funkcji skleianej stopnia pierwszego



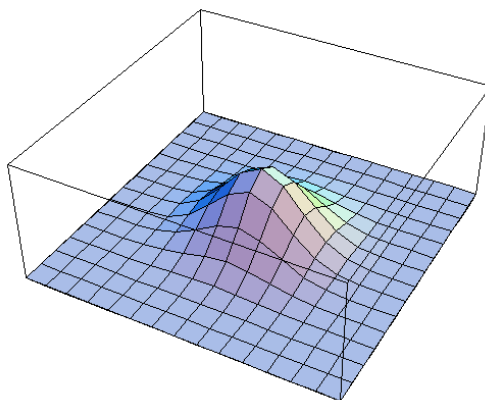
Rys. 3. Dwuwymiarowa bazowa funkcja sklejana stopnia drugiego



Rys. 4. Dwuwymiarowa bazowa funkcja sklejana stopnia trzeciego



Rys. 5. Dwuwymiarowa bazowa funkcja sklejana stopnia czwartego



Rys. 6. Dwuwymiarowa bazowa funkcja sklejana stopnia piątego

Każda funkcja sklejana dwóch zmiennych jest funkcją sklejaną względem każdej zmiennej z osobna. W podobny sposób definiujemy funkcje sklepane trzech i więcej zmiennych. Własności funkcji sklepanych jednej zmiennej przenoszą się na funkcje wielu zmiennych.

DWUWYMIAROWA FUNKCJA REGRESJI OPISANA ZA POMOCĄ BAZOWYCH FUNKCJI SKLEJANYCH

Na podstawie danych pomiarowych

$$(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k), k \in \overline{0, n_1}$$

wyznaczymy funkcję

$$\hat{z} = \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij} B_n^i(x) B_m^j(y), \quad (4)$$

taką że dla każdego ustalonego punktu $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$, $k \in \overline{0, n_1}$ zmienna losowa z_k ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną

$$\hat{z}_k = \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij} B_n^i(\tilde{x}_k) B_m^j(\tilde{y}_k). \quad (5)$$

Ponadto zakładamy, że zmienne losowe z_k są niezależne. Współczynniki c_{ij} , $i \in \overline{-n, N-1}$, $j \in \overline{-m, M-1}$ wyznaczymy metodą największej wiarygodności, minimalizując funkcję gęstości

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [\tilde{z}_k - \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij} B_n^i(\tilde{x}_k) B_m^j(\tilde{y}_k)]^2\right)$$

rozkładu zmiennych losowych \tilde{z}_k , $k \in \overline{0, n_1}$.

Logarytmując stronami tę funkcję, otrzymujemy

$$\ln L = -n_1 \ln \sigma - \frac{n_1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [\tilde{z}_k - \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij} B_n^i(\tilde{x}_k) B_m^j(\tilde{y}_k)]^2.$$

Optymalne współczynniki $c_{ij}^0, i \in \overline{-n, N-1}, j \in \overline{-m, M-1}$ dobieramy tak, aby funkcjonal $\ln L(c_{-n,-m}, \dots, c_{N-1, M-1})$ osiągał minimum. Obliczając pochodne $\frac{\partial \ln L(c_{-n,-m}, \dots, c_{N-1, M-1})}{\partial c_{\mu\nu}}$ i przyrównując je do zera, otrzymujemy układ $(N+n)(M+m)$ równań liniowych:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} [\tilde{z}_k - \sum_{i=-n}^{N-1} \sum_{j=-m}^{M-1} c_{ij}^0 B_n^i(\tilde{x}_i) B_m^j(\tilde{y}_j)] B_n^\mu(\tilde{x}_k) B_m^\nu(\tilde{y}_k) = 0, \mu \in \overline{-n, N-1}, \nu \in \overline{-m, M-1}.$$

Po przekształceniach powyższy układ równań zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} c_{-n,-m}^0 \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) + \dots + \\ + c_{N-1, M-1}^0 \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k), \\ \dots \\ c_{-n,-m}^0 \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) + \dots + \\ + c_{N-1, M-1}^0 \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) \end{cases} \quad (6)$$

lub macierzowo

$$\mathbf{BC} = \mathbf{G},$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) & \dots & \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) & \dots & \sum_{k=0}^{n_1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-n,-m} \\ \vdots \\ c_{N-1, M-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k), \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k), \end{bmatrix}$$

Na prostokącie $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ istnieje $(n+1)(m+1)$ nietożsamościowo równych zero funkcji postaci $B_n^i(x) \cdot B_m^j(y)$. Dlatego też macierz

$$B = \left[\sum_{k=0}^n B_n^i(\tilde{x}_k) B_n^j(\tilde{y}_k) B_n^\mu(\tilde{x}_k) B_n^\nu(\tilde{y}_k) \right]_{[(n+1)(m+1)] \times [(n+1)(m+1)]}$$

jest macierzą symetryczną.

$$\text{Sumy } \sum_{k=0}^n B_n^i(\tilde{x}_k) B_n^j(\tilde{y}_k) B_n^\mu(\tilde{x}_k) B_n^\nu(\tilde{y}_k) = 0,$$

gdy $|i-j| \geq n+1 \vee |\mu-\nu| \geq m+1$.

OCENA ZGODNOŚCI FUNKCJI REGRESJI Z DANYMI Z POMIARÓW

Sama znajomość funkcji regresji nie umożliwia oceny wartości rozbieżności między przewidywaniami a wartościami pomiarowymi. Do określenia natężenia związku między dwiema wielkościami wykorzystuje się współczynnik korelacji wielowymiarowej.

Wykażemy najpierw ważną własność, która zachodzi w metodzie najmniejszej sumy kwadratów, mianowicie: wartość średnia z pomiarów

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{z}_k$$

jest równa wartości średniej z regresji

$$\bar{\hat{z}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{z}_k.$$

W tym celu dodamy stronami równania w układzie (6), uzyskując następującą równość:

$$\begin{aligned}
 & c_{-n,-m}^0 \left[\sum_{k=0}^{n_1} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) (B_m^{-m}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) + B_m^{-m+1}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) \right. \\
 & + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) + \dots + B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k))] + \dots + \\
 & + c_{N-1,M-1} \left[\sum_{k=0}^{n_1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) (B_m^{-m}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) + \right. \\
 & \left. + B_m^{-m+1}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) + \dots + B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k))] \right. \\
 & = \sum_{k=0}^n \tilde{z}_k \left[B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) + B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m+1}(\tilde{y}_k) \right. \\
 & \left. + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{-m+1}(\tilde{y}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{-1}(\tilde{y}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{m-1}(\tilde{y}_k) \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

Korzystając z własności [5]

$$\sum_{i=-n}^{N-1} B_n^i(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [x_0, x_N], \quad \sum_{j=-m}^{M-1} B_m^j(y) = 1 \quad \text{dla } y \in [y_0, y_M],$$

możemy lewą stronę (7) zapisać w postaci

$$\sum_{k=0}^n [c_{-n,-m} B_n^{-n}(\tilde{x}_k) B_m^{-m}(\tilde{y}_k) + \dots + c_{N-1,M-1} B_n^{N-1}(\tilde{x}_k) B_m^{M-1}(\tilde{y}_k)] = \sum_{k=0}^n \hat{z}_k,$$

a prawą stronę następująco

$$\sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k \left[B_m^{-m}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) + \dots + B_m^{M-1}(\tilde{y}_k) (B_n^{-n}(\tilde{x}_k) + \dots + B_n^{N-1}(\tilde{x}_k)) \right] = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k.$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{n_1} \hat{z}_k = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k.$$

Dzieląc tę równość obustronnie przez n , otrzymamy żądaną równość wartości średnich

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_1} \hat{z}_k. \tag{9}$$

Policzymy teraz współczynnik korelacji między wielkościami \tilde{z}_k a \hat{z}_k , $k \in \overline{0, n}$, wyrażający natężenie związku między wartościami zmiennych losowych wyznaczonych z pomiarów a wartościami funkcji regresji. Wzór opisujący współczynnik korelacji wielowymiarowej wyraża się następującym wzorem:

$$R = R_{z\hat{z}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (z_i - \bar{z})(\hat{z}_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2}}. \quad (10)$$

Uwzględniając równość sum [2]

$$\sum_{i=1}^{n_1} (z_i - \bar{z})(\hat{z}_i - \bar{z}) = \sum_{i=1}^{n_1} (\hat{z}_i - \bar{z})^2,$$

wzór (10) przyjmuje postać

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (\hat{z}_i - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}}.$$

REGRESJA OPISANA ZA POMOCĄ BAZOWYCH FUNKCJI SKLEJANYCH STOPNIA PIERWSZEGO

Niech

$$\mathbf{B}_1 = \{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_i, \dots, \Phi_N\}$$

będzie zbiorem tzw. bazowych funkcji sklejanych stopnia pierwszego.

Do opisu powierzchni zastosujemy bazową funkcję sklejaną dwóch zmiennych określoną w obszarze $\Omega: a \leq x \leq b, c \leq x \leq d$.

W obszarze tym definiujemy siatkę $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$,

$$\begin{aligned} \Delta_x : x_i &= a + ih_x, \quad i \in \overline{0, N}, \quad x_0 := a, \quad h_x := \frac{b-a}{N}, \\ \Delta_y : y_j &= c + jh_y, \quad j \in \overline{0, M}, \quad y_0 := c, \quad h_y := \frac{d-c}{M}. \end{aligned} \quad (11)$$

Podział (11) dzieli obszar Ω na prostokątne komórki

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}, \quad i \in \overline{0, N-1}, \quad j \in \overline{0, M-1}\}.$$

Siatkę $\Delta_x \times \Delta_y$ rozszerzymy o punkty

$$\begin{aligned} \Delta_x & : x_{-1} < x_0 \quad ; \quad x_{N+1} < \dots < x_{N+1}, \\ \Delta_y & : y_{-1} < y_0 \quad ; \quad y_{M+1} < \dots < y_{M+1}. \end{aligned}$$

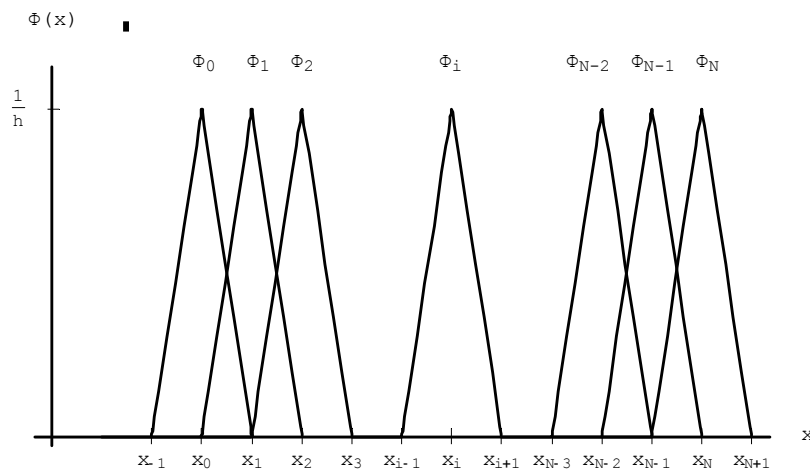
Funkcję sklejaną dwóch zmiennych $s = s(x, y)$ przedstawimy w postaci

$$s = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M c_{ij} \Phi_i(x) \hat{\Phi}_j(y), \quad (12)$$

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{h_x^2} \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq x_0 + (i-1)h_x \\ x - (x_0 + (i-1)h_x) & \text{dla} \quad x_0 + (i-1)h_x \leq x \leq x_0 + ih_x \\ x_0 + (i+1)h_x - x & \text{dla} \quad x_0 + ih_x \leq x \leq x_0 + (i+1)h_x \\ 0 & \text{dla} \quad x \geq x_0 + (i+1)h_x \end{cases}, \quad i \in \overline{0, N},$$

$$\hat{\Phi}_j(y) = \frac{1}{h_y^2} \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y \leq y_0 + (j-1)h_y \\ y - (y_0 + (j-1)h_y) & \text{dla} \quad y_0 + (j-1)h_y \leq y \leq y_0 + jh_y \\ y_0 + (j+1)h_y - y & \text{dla} \quad y_0 + jh_y \leq y \leq y_0 + (j+1)h_y \\ 0 & \text{dla} \quad y \geq y_0 + (j+1)h_y \end{cases}, \quad j \in \overline{0, M},$$

których wykresy przedstawia rysunek 7.



Rys. 7. Wykresy bazowych funkcji sklepanych pierwszego stopnia

Bazę funkcji sklepanych dwóch zmiennych stopnia pierwszego względem zmiennej x oraz stopnia pierwszego względem zmiennej y określimy wzorem

$$\Psi_v(x, y) = \Phi_i(x)\hat{\Phi}_j(y), \tag{13}$$

gdzie

$$v = (j + 1) + (M + 1)i, \quad v \in \overline{1, r}, \quad r = (1 + N)(1 + M), \quad \text{dla } i \in \overline{0, N}, \quad j \in \overline{0, M}.$$

Wykres bazowej funkcji sklepanej dwóch zmiennych stopnia pierwszego względem zmiennej x oraz stopnia pierwszego względem zmiennej y przedstawiony jest na rysunku 2.

Aproksymującą funkcję sklepaną dwóch zmiennych $s = s(x, y)$ przedstawimy w postaci

$$s = \sum_{v=1}^r c_v \Psi_v(x, y), \tag{14}$$

$$v = (j + 1) + (M + 1)i, \quad v \in \overline{1, r}, \quad r = (1 + N)(1 + M),$$

dla

$$i \in \overline{0, N}, \quad j \in \overline{0, M}.$$

Współczynniki c_ν , $\nu \in \overline{1, r}$ dobieramy tak, aby funkcjonal

$$L(c_1, \dots, c_r) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n_1} \left[\sum_{\nu=1}^r c_\nu \Psi_\nu(\tilde{x}_k) - \tilde{z}_k \right]^2\right) \quad (15)$$

osiągnął minimum. Optymalny dobór współczynników c_1^0, \dots, c_r^0 sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych

$$\sum_{p=1}^{r1} c_p^0 v_{pl} = w_l, \quad l \in \overline{1, r},$$

gdzie:

$$v_{p,l} = \sum_{k=0}^{n_1} \Psi_{n,m}^p(x'_k, y'_k) \Psi_{n,m}^l(x'_k, y'_k), \quad w_j = \sum_{k=0}^{n_1} \tilde{z}_k \Psi_{n,m}(x'_k, \tilde{y}'_k).$$

PRZYKŁAD

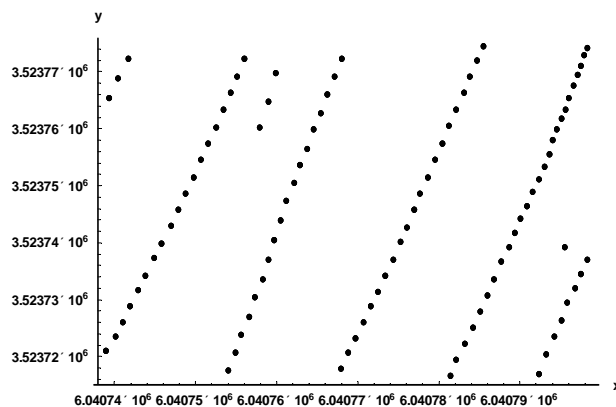
W celu weryfikacji metody dokonano $n_1 = 297$ pomiarów głębokości dna morskiego, a następnie wartości pomiarowe zaproksymowano opisaną funkcją

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M c_{ij} \Phi_{1,i}(x) \hat{\Phi}_{1,j}(y),$$

gdzie: $N=7$ – liczba przedziałów współrzędnej X;
 $M=7$ – liczba przedziałów współrzędnej Y.

Pomiarów głębokości \tilde{h}_i dokonano w punktach $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i), i \in \overline{1, 297}$ przedstawionych na rysunku 8.

W tabeli 1. są przedstawione wybrane dane pomiarowe.



Rys. 8. Pomiary głębokości \tilde{h}_i w punktach o współrzędnych $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$

Tabela 1.

\tilde{x}_i	\tilde{y}_i	\tilde{h}_i	\hat{h}_i	$\tilde{h}_i - \hat{h}_i$
6040792.31	3523716.93	-5.65	-5.65	0.000
6040793.23	3523720.38	-5.65	-5.64	-0.000
6040794.16	3523723.52	-5.64	-5.63	-0.000
6040795.09	3523726.36	-5.64	-5.64	0.000
6040795.83	3523729.50	-5.57	-5.56	-0.000
6040796.75	3523732.02	-5.57	-5.57	0.000
6040797.49	3523734.54	-5.08	-5.07	-0.000
6040798.23	3523737.06	-5.08	-5.08	0.000
6040781.38	3523716.61	-6.05	-6.04	-0.000
6040782.12	3523719.45	-5.73	-5.73	0.001
6040783.23	3523722.27	-5.73	-5.72	-0.003
6040784.16	3523725.11	-5.60	-5.60	0.006
6040785.08	3523727.93	-5.60	-5.59	-0.007
6040786.01	3523730.77	-5.48	-5.48	0.000
6040786.75	3523733.59	-5.48	-5.49	0.012
6040787.68	3523736.74	-5.33	-5.30	-0.021
6040788.60	3523739.25	-5.33	-5.34	0.014
6040789.34	3523741.77	-5.37	-5.37	0.005
6040790.08	3523744.29	-5.37	-5.35	-0.014
6040790.83	3523746.49	-5.42	-5.42	0.006
6040791.57	3523749.00	-5.40	-5.40	0.004
6040792.31	3523751.20	-5.40	-5.40	0.005
6040793.05	3523753.41	-5.37	-5.34	-0.027
6040793.60	3523755.61	-5.37	-5.39	0.028
6040793.97	3523758.13	-5.32	-5.33	0.013
6040794.53	3523760.00	-5.32	-5.25	-0.063
6040795.09	3523761.90	-5.17	-5.23	0.065
6040795.640	3523763.47	-5.17	-5.13	-0.032
6040796.01	3523765.36	-4.85	4.87	0.020
6040796.57	3523767.56	-4.85	-4.81	-0.038
6040797.12	3523769.45	-4.55	-4.59	0.050
.....

Tabela zawiera głębokości pomierzone \tilde{h}_i oraz wyznaczone z funkcji regresji \hat{h}_i dla punktów o współrzędnych $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$.

Do oceny modelu wykorzystano współczynnik korelacji, który wynosi $R = 0.99923$.

WNIOSKI

Dokładność aproksymacji funkcji dwóch zmiennych zależy od następujących czynników:

- gęstości punktów pomiarowych;
- podziału obszaru obserwacji;
- stopnia bazowych funkcji sklepanych.

Podział obszaru obserwacji determinuje liczba bazowych funkcji sklepanych. Zbyt gęsta siatka zwiększa wymiar macierzy układu normalnego, co przyczynia się do znacznego wydłużenia czasu obliczeń i powstawania błędów numerycznych. Z drugiej strony za mała liczba bazowych funkcji sklepanych zmniejsza precyzję dopasowania funkcji regresji.

W opisanym przykładzie użyto $(N + 1)(M + 1) = 64$ bazowe funkcje sklepane. Obliczony współczynnik korelacji $R = 0.99923$ świadczy o dobrym dopasowaniu postaci funkcji regresji do danych pomiarowych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Hac B., *Metodyka określania cech geometrycznych obiektów podwodnych na podstawie pomiarów wykonanych sonarem bocznym i sondą pionową*, rozprawa doktorska, AMW, Gdynia 2001.
- [2] Kołodziej W., *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [3] Mańczak K., *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1979.
- [4] Stieczkin S., Subbotin J., *Splines in mathematica*, „Science”, Moscow 1976.

- [5] Zawiałow J., Kwasow B., *Splines methods*, „Science”, Moscow 1980.
- [6] Załęska-Fornal A., Zellma M., *Applications of Basic Splines to Identification of Sailing Object Equations*, „Zeszyty Naukowe” WSM, 2002, nr 65, Szczecin Expoship 2002.

ABSTRACT

The paper presents some possibilities of applying the basic splines to determine the two dimensional regression function by means of the likelihood method.

Recenzent kmdr prof. dr hab. Franciszek Grabski