ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK XLVII NR 3 (166) 2006

Agata Załęska-Fornal
Akademia Marynarki Wojennej

MIARY NIEZAWODNOŚCIOWEJ I STRUKTURALNEJ ISTOTNOŚCI ELEMENTÓW

STRESZCZENIE

W artykule zdefiniowano i wyznaczono strukturalną i niezawodnościową istotność elementów dla obiektów o różnych strukturach niezawodnościowych. Zdefiniowano także istotność zdarzeń bazowych w drzewach zdarzeń (uszkodzeń).

WSTĘP

Zapewnienie niezawodności i bezpiecznego działania dużych, złożonych systemów ma ogromne znaczenie w analizie systemów. Aby poprawić niezawodność systemu, należy znaleźć odpowiedź na pytanie, które elementy mają największy wpływ na jego niezawodność. W systemach koherentnych niektóre elementy są bardziej istotne od innych w określaniu sprawności systemu. Element połączony szeregowo z resztą systemu musi być co najmniej tak samo znaczący jak każdy inny. Istotną sprawą dla projektanta czy analityka niezawodnościowego jest zatem znajomość istotności poszczególnych elementów systemu. W tym celu musimy znać odpowiednią miarę „wpływu elementu na niezawodność całego systemu". Od 1960 roku wprowadzono wiele różnych definicji miar istotności elementów.

Struktura systemu

Zakładamy, że w sensie niezawodnościowym obiekt (system) składa się z n elementów. Niech

$$C = \{1, 2, ..., n\}$$

oznacza zbiór elementów systemu.

Zakładamy również, że zbiór stanów k-tego elementu jest uporządkowanym zbiorem $S_k = \{0,1\}, k \in C,$ przy czym liczbę 0 przyporządkowujemy stanowi niezdatności, a liczbę 1 stanowi zdatności elementu.
Funkcję

$$\varphi : S_1 \times \ldots \times S_n \to S$$

nazywamy *funkcją struktury systemu lub strukturą systemu.* Funkcja ta przyporządkowuje stanom elementów stan systemu, przy czym

$$S_1 \times \ldots \times S_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in S_k, k \in C\}.$$

Stan elementu k w chwili t jest opisany zmienną losową $X_k(t)$, która przyjmuje wartości ze zbioru S_k. Stan $\mathbf{S}(t)$ całego systemu w czasie t jest całkowicie wyznaczony przez stany jego elementów poprzez strukturę φ :

$$\mathbf{S}(t) = \varphi(\mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)).$$

Element i nazywamy *pasywnym* dla struktury φ, jeśli φ jest stała w x_i; to znaczy, że dla każdego $(\cdot_i, \mathbf{x})$, $(\cdot_i, \mathbf{x}) \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ zachodzi

$$\varphi(1_i, \mathbf{x}) = \varphi(0_i, \mathbf{x});$$

przy czym

$$(1_i, \mathbf{x}) \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$
$$(0_i, \mathbf{x}) \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Innymi słowy, element jest pasywny, jeśli jego stan nie ma wpływu na stan systemu. Systemy zawierające co najmniej jeden element pasywny nazywamy *redukowalnymi.*

Funkcja struktury φ jest *niemalejąca* wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(1_i, \mathbf{x})$ i $\varphi(0_i, \mathbf{x})$ są funkcjami *niemalejącymi* oraz $\varphi(1_i, \mathbf{x}) \geq \varphi(0_i, \mathbf{x})$ dla każdego $(\cdot_i, \mathbf{x})$. Można wykazać [2], że dla każdej struktury zachodzi następujący wzór:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi(1_i, \mathbf{x}) + (\mathbf{1} - x_i)\varphi(0_i, \mathbf{x}). \tag{1}$$

P r z y k ł a d 1.

Niech $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$ będzie strukturą równoległą złożoną z dwóch elementów. Wzór przyjmuje w tym wypadku następującą postać:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) = {} & x_1(1-x_1)^0 x_2(1-x_2)^0 \cdot 1 + \\ & + x_1(1-x_1)^0 x_2^0(1-x_2) \cdot 1 + \\ & + x_1^0(1-x_1) x_2(1-x_2)^0 \cdot 1 + \\ & + x_1^0(1-x_1) x_2^0(1-x_2)^0 \cdot 0 = x_1 + x_2 - x_1 x_2 .\end{aligned}$$

S t r u k t u r y   k o h e r e n t n e

W pracy ograniczymy się do rozpatrywania struktur, które są funkcjami niemalejącymi. Struktury takie nazywamy *monotonicznymi.* Nie będziemy rozważać struktur, których stan nie zależy od stanu ich elementów.

Mówimy, że system jest *koherentny,* jeśli jego struktura jest monotoniczna i nieredukowalna. Jeżeli system ma strukturę koherentną, to $\varphi(\mathbf{0}) = 0$ oraz $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Podzbiór $P \subset C$ systemu (C, φ) nazywa się *ścieżką systemu (ścieżką zdatności systemu),* gdy przy zdatności wszystkich elementów należących do tego zbioru system jest w stanie zdatności. Ścieżkę nazywamy *minimalną,* gdy nie zawiera żadnej innej ścieżki jako podzbioru właściwego. Ścieżkę P nazywamy *krytyczną ze względu na element* $i \in C$, gdy $P - \{i\}$ nie jest ścieżką. Oznacza to, że utrata zdatności przez *i*-ty element systemu zdatnego, dlatego że zdatne są wyłącznie elementy tworzące daną ścieżkę, powoduje utratę zdatności przez system. Każda minimalna ścieżka jest krytyczna ze względu na dowolny swój element.

Podzbiór $K \subset C$ systemu (C, φ) nazywa się *cięciem,* gdy w następstwie niezdatności wszystkich elementów z K system jest niezdatny. Cięcie nazywamy *minimalnym,* jeżeli nie zawiera żadnego innego cięcia jako podzbioru właściwego.

Strukturą minimalnej ścieżki P_j, $j = 1, 2, ..., p$, nazywamy funkcję binarną określoną wzorem

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i . \tag{2}$$

Struktura minimalnej ścieżki przyjmuje wartość 1, gdy wszystkie jej elementy są zdatne i wartość 0 w przeciwnym przypadku.

Strukturą minimalnego cięcia K_j, $j = 1,2,...,k$ nazywamy funkcję binarną określoną wzorem

$$\kappa(\mathbf{x}) = \coprod_{i \in K_j} x_i, \tag{3}$$

gdzie symbol $\coprod$ jest skrótem zapisu następujących działań:

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i \equiv 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i),$$
$$x_1 \coprod x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2).$$

Struktura minimalnego cięcia przyjmuje wartość 0, gdy niezdatne są wszystkie elementy tworzące cięcie, a wartość 1 w pozostałych przypadkach.

Strukturę systemu φ można przedstawić za pomocą struktur jej minimalnych ścieżek

$$\varphi(\mathbf{x}) \equiv \coprod_{j=1}^{p} \pi_j(\mathbf{x}), \tag{4}$$

co odpowiada równoległej strukturze utworzonej z minimalnych ścieżek. Można ją też przedstawić za pomocą struktur minimalnych cięć

$$\varphi(\mathbf{x}) \equiv \prod_{j=1}^{k} \kappa_j(\mathbf{x}), \tag{5}$$

co odpowiada szeregowej strukturze utworzonej z minimalnych cięć.

Drzewa zdarzeń (uszkodzeń)

Rozważmy alternatywne do poprzednich przedstawienie struktury koherentnej zwane *drzewem zdarzeń (uszkodzeń).*

Metoda drzewa uszkodzeń polega na dekompozycji zdarzenia (np. uszkodzenia obiektu) na elementy łańcucha przyczynowo-skutkowego w taki sposób, że u podstawy drzewa uszkodzeń znajdują się zdarzenia elementarne, które mogą być przyczyną zdarzenia stanowiącego wierzchołek drzewa. Drzewo uszkodzeń umożliwia zaobserwowanie związku między uszkodzeniem systemu a jego przyczynami. Jeżeli znamy prawdopodobieństwa uszkodzeń elementów systemu, możemy obliczyć jego niezawodność.

Konstruowanie drzewa uszkodzeń rozpoczyna się od *zdarzenia szczytowego* z zastosowaniem bramek logicznych „AND" i „OR" oraz zdarzeń bazowych reprezentujących uszkodzenia sprzętu lub błędy człowieka. Sygnał wyjściowy pojawi się na bramce „AND" wtedy, gdy na wejściu podane zostaną wszystkie sygnały, np. obiekt jest uszkodzony, jeśli wszystkie elementy obiektu są uszkodzone. Sygnał pojawi się na bramce „OR", gdy na wejściu podany zostanie co najmniej jeden sygnał, np. obiekt zostanie uszkodzony, jeżeli co najmniej jeden element obiektu jest uszkodzony. Drzewo zdarzeń oznacza działanie na zdarzeniach, a zatem w analizie drzewa uszkodzeń wykorzystuje się algebrę Boola.

Cięciem dla drzewa zdarzeń jest zbiór zdarzeń bazowych, których wystąpienie powoduje wystąpienie zdarzenia szczytowego. Cięcie jest *minimalne*, jeżeli nie może być zredukowane i powoduje wystąpienie zdarzenia szczytowego. Cięcie jest *krytyczne dla zdarzenia bazowego* i, jeżeli każde cięcie minimalne zawiera i. Jeżeli zdarzenie szczytowe oznacza uszkodzenie systemu (drzewo uszkodzeń), a zdarzenia bazowe odpowiadają uszkodzeniom elementów, wówczas definicja cięcia jest identyczna z definicją cięcia dla struktury koherentnej.

W analizie drzew zdarzeń wykorzystuje się pojęcie *dualnego drzewa zdarzeń.* Jednym z powodów, aby to zrobić, jest fakt, że minimalne ścieżki danego drzewa są minimalnymi cięciami drzewa dualnego.

Ścieżką nazywamy zbiór zdarzeń, których niewystąpienie spowoduje, że nie zajdzie zdarzenie szczytowe.

ISTOTNOŚĆ STRUKTURALNA ELEMENTÓW

W danym systemie koherentnym niektóre elementy są bardziej istotne od innych w określaniu sprawności systemu. Jak istotny jest element i w określeniu czy system jest zdatny, czy nie?

Po pierwsze załóżmy, że znamy stan wszystkich pozostałych elementów, $(\cdot_i, \mathbf{x})$. Wtedy, jeżeli $\varphi(1_i, \mathbf{x}) = 1$ a $\varphi(0_i, \mathbf{x}) = 0$, to znaczy jeżeli

$$\varphi(1_i, \mathbf{x}) - \varphi(0_i, \mathbf{x}) = 1, \tag{6}$$

możemy przyjąć, że element i jest bardziej istotny niż jeżeli

$$\varphi(1_i, \mathbf{x}) = 1 = \varphi(0_i, \mathbf{x}) \tag{7}$$

lub

$$\varphi(1_i, \mathbf{x}) = 0 = \varphi(0_i, \mathbf{x}). \tag{8}$$

W pierwszym przypadku stan elementu i określa, czy system jest sprawny, czy nie, natomiast w przypadkach (7) i (8) stan elementu i jest bez znaczenia. Gdy zachodzi (6), wektor $(1_i, \mathbf{x})$ nazywamy *wektorem ścieżki krytycznej dla i.* Całkowitą liczbę wektorów ścieżek krytycznych dla elementu i oznaczamy następująco

$$n_\varphi(i) = \sum_{(1_i, \mathbf{x})} [\varphi(1_i, \mathbf{x}) - \varphi(0_i, \mathbf{x})]. \tag{9}$$

Poniższy wzór określa możliwy pomiar *strukturalnej istotności elementu i*:

$$I_\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} n_\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{\mathbf{x}|x_i=1\}} [\varphi(1_i, \mathbf{x}) - \varphi(0_i, \mathbf{x})]. \tag{10}$$

Stąd dla danej struktury φ możemy uporządkować elementy systemu według strukturalnej istotności poprzez uporządkowanie wartości $I_\varphi(1), \ldots, I_\varphi(n)$.

Przykład 2.

Niech φ będzie strukturą progową „2 z 3". Wtedy

$$I_\varphi(1) = \frac{1}{2^2} \cdot 2 = \frac{1}{2},$$

ponieważ wśród czterech możliwości: (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1) są dwie ścieżki krytyczne dla elementu pierwszego, mianowicie (1,0,1), (1,1,0). Symetrycznie

$$I_\varphi(2) = I_\varphi(3) = \frac{1}{2}.$$

Przykład 3.

Niech $\varphi(\mathbf{x}) = x_1(x_2 \coprod x_3)$. Wtedy

$$I_\varphi(1) = \frac{1}{2^2} \cdot 3 = \frac{3}{4},$$

ponieważ wśród czterech możliwości: (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1) są trzy ścieżki krytyczne dla elementu pierwszego (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1). Dla elementu drugiego

$$I_\varphi(2) = \frac{1}{2^2} \cdot 1 = \frac{1}{4},$$

ponieważ wśród czterech możliwości: (0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1) jest tylko jedna ścieżka krytyczna dla elementu drugiego, mianowicie (1,1,0). Symetrycznie

$$I_\varphi(3) = \frac{1}{4}.$$

Zauważmy, że element pierwszy jest wyraźnie bardziej istotny niż element drugi czy trzeci. Jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ element pierwszy jest połączony szeregowo z resztą systemu.

STRUKTURALNE UPORZĄDKOWANIE ZDARZEŃ BAZOWYCH W DRZEWACH ZDARZEŃ

W poprzedniej części określiliśmy strukturalną istotność elementów w strukturach koherentnych. Podobną miarę istotności dla zdarzeń bazowych możemy zdefiniować dla drzew zdarzeń. Miara ta jest niezależna od prawdopodobieństw zdarzeń bazowych.

Niech $y_i = 1$, gdy wystąpi zdarzenie i oraz $y_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Wektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ jest wektorem rezultatów zdarzeń bazowych. Określmy funkcję

$$\psi(\mathbf{y}) := \begin{cases} 1, & \text{gdy zajdzie zdarzenie szczytowe} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Załóżmy, że żadne ze zdarzeń bazowych nie jest pasywne. Jeżeli zdarzenie bazowe odpowiada uszkodzeniu elementu, a zdarzenie szczytowe uszkodzeniu systemu, wtedy y_i odpowiada $1 - x_i$, gdzie $x_i = 1$ oznacza, że element i jest zdatny. Funkcja $\psi(\mathbf{y})$ odpowiada zatem $1 - \varphi(\mathbf{x})$, gdzie φ jest funkcją struktury.

Podobnie jak dla struktur koherentnych, także dla drzewa uszkodzeń rozpatrujemy istotność zdarzeń bazowych.

Niech $n(i)$ oznacza liczbę cięć krytycznych dla elementu i. *Istotność zdarzenia* i *w drzewie zdarzeń* określa wzór

$$I(i) := 2^{-(n-1)}\, n(i), \tag{11}$$

gdzie n oznacza liczbę zdarzeń bazowych w danym drzewie zdarzeń.

Niech $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ będzie losowym wektorem rezultatów zdarzeń bazowych. Aby wyliczyć $n(i)$, załóżmy, że Y_i, $i = 1,2,...,n$ są statystycznie niezależne oraz $E(Y_i) = E(1 - Y_i) = \frac{1}{2}$. Wtedy

$$n(i) = 2^{n-1} E[\psi(1_i, \mathbf{Y}) - \psi(0_i, \mathbf{Y})]. \tag{12}$$

NIEZAWODNOŚCIOWA ISTOTNOŚĆ ELEMENTÓW

Do tej pory rozpatrywaliśmy miary, dla których ocena istotności opierała się tylko na znajomości struktury systemu. Do określenia *niezawodnościowej istotności* każdego elementu potrzebna jest nie tylko znajomość struktury systemu, ale także niezawodności poszczególnych jej elementów.

Załóżmy, że system i jego elementy są zdefiniowane przez binarne zmienne losowe. Niech X_i, $i - 1,2,...,n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{element i jest zdatny w ustalonej chwili } t_0 \\ 0, & \text{element i jest niezdatny w ustalonej chwili } t_0 \end{cases},$$

oraz

$$P[X_i = k] := r_i^k (1 - r_i)^{1-k} \text{ dla } k = 0, 1; \quad i = 1,2,...,n,$$

gdzie r_i oznacza niezawodność elementu i.

Wtedy

$$P[X_i = 1] = r_i = E(X_i). \tag{13}$$

Wynika stąd, że *niezawodność* h systemu można wyznaczyć tylko wówczas, gdy znamy łączny rozkład wektora $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ określającego stan elementów systemu oraz strukturę systemu. Mianowicie

$$P[\varphi(\mathbf{X}) = 1] = h = E(\varphi(\mathbf{X})). \tag{14}$$

W przypadku gdy elementy są niezależne (tzn. niezależne są składowe wektora $\mathbf{X}$ opisujące stan poszczególnych elementów), niezawodność systemu możemy przedstawić jako funkcję niezawodności jego elementów, czyli

$$h = h(\mathbf{r}), \tag{15}$$

gdzie $h(\mathbf{r})$ oznacza *niezawodność* struktury φ. Jeżeli $r_1 = ... = r_n = r$ będziemy używać zapisu $h(r)$.

Z prawa dekompozycji struktury [1] wynika możliwość zapisania niezawodności struktury w postaci:

$$h(\mathbf{r}) = r_i h(1_i, \mathbf{r}) + (1 - r_i) h(0_i, \mathbf{r}), \quad \text{dla} \quad i = 1,2,...,n. \tag{16}$$

Birnbaum (1969) jako pierwszy wprowadził niezawodnościową istotność elementów. Miara ta wyraża się wzorem [5]:

$$I_h(i) := \frac{\partial h(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \frac{\partial[1 - h(\mathbf{r})]}{\partial[1 - r_i]}, \quad i = 1,2,...,n. \tag{17}$$

W przypadku gdy nieznane są niezawodności elementów, otrzymujemy wzór opisujący istotność strukturalną:

$$I_\varphi(i) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{r})}{\partial r_i} \right|_{r_1 = ... = r_n = \frac{1}{2}}, \quad i = 1,...,n.$$

Czasami wygodniej jest *stosować unormowaną miarę istotności niezawodnościowej dla zbioru elementów*:

$$I_h^S(i) = \frac{I_h(i)}{\sum_{j=1}^{n} I_h(j)}, \quad i = 1,..,n.$$

Równoważną definicją istotności niezawodnościowej jest

$$I_h(i) := h(1_i, \mathbf{r}) - h(0_i, \mathbf{r}) \tag{18}$$

lub precyzyjniej

$$I_h(i) := E[\varphi(1_i, \mathbf{X}) - \varphi(0_i, \mathbf{X})]. \tag{19}$$

Dla systemu koherentnego, w którym niezawodność każdego elementu jest liczbą należącą do przedziału $(0,1)$, istotność niezawodnościowa elementu również zawiera się w przedziale $(0,1)$. Z (19) wynika, że

$$I_h(i) = P[\varphi(1_i, \mathbf{X}) - \varphi(0_i, \mathbf{X}) = 1]. \tag{20}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} I_h(i) &= h(1_i, \mathbf{r}) - h(0_i, \mathbf{r}) = E[\varphi(1_i, \mathbf{X}) - \varphi(0_i, \mathbf{X})] = \\ &= P[\varphi(1_i, \mathbf{X}) - \varphi(0_i, \mathbf{X}) = 1]. \end{aligned}$$

Ze wzoru (20) wnioskujemy, że $I_h(i)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo przebywania systemu w takim stanie, w który jest on niesprawny, jeśli element i jest niesprawny.

P r z y k ł a d 4.

Załóżmy, że niezawodności elementów zostały uporządkowane w sposób niemalejący, czyli

$$r_1 \le r_2 \le .... \le r_n .$$

1) System o strukturze szeregowej:

Jeżeli $h(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^{n} r_i$, to

$$I_h(i) = \prod_{j \ne i} r_j = \frac{h(\mathbf{r})}{r_i}$$

oraz $I_h(1) \ge I_h(2) \ge ... \ge I_h(n)$,

zatem element o najmniejszej niezawodności jest najistotniejszy dla całego systemu.

2) System o strukturze równoległej:

Jeżeli $h(\mathbf{r}) = \coprod_{i=1}^{n} r_i$, to

$$I_h(i) = \prod_{j \neq i} (1 - r_j) = \frac{1 - h(\mathbf{r})}{1 - r_i}$$

oraz $I_h(1) \leq I_h(2) \leq ... \leq I_h(n)$, a zatem element o największej niezawodności jest dla całego systemu najistotniejszy.

3) System progowy „2 z 3":

Dla „2 z 3" $h(\mathbf{r}) = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 - 2 r_1 r_2 r_3$. Zatem

$$I_h(1) = r_2 + r_3 - 2 r_2 r_3 ,$$

$$I_h(2) = r_1 + r_3 - 2 r_1 r_3 ,$$

$$I_h(3) = r_1 + r_2 - 2 r_1 r_2 .$$

Jeżeli $r_i \geq \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, 3$, to $I_h(3) \geq I_h(2) \geq I_h(1)$, czyli element o najwyższej niezawodności jest najistotniejszy dla całego systemu. Jeżeli $r_i \leq \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, 3$, to $I_h(1) \geq I_h(2) \geq I_h(3)$, czyli element o najniższej niezawodności jest dla tego systemu najistotniejszy.

4) Ogólnie dla systemu progowego „k z n" (system uszkadza się, jeśli co najmniej k elementów jest uszkodzonych)

$$h(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{x}:\, x_1 + x_2 + ... + x_n > n-k} r_1^{x_1} \cdots r_n^{x_n} (1 - r_1)^{1 - x_1} \cdots (1 - r_n)^{1 - x_n}$$

mamy

$$I_h(i) = \frac{1}{1 - r_i} \sum_{\substack{\mathbf{x}:\, x_i = 0, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n > n-k}} r_1^{x_1} \cdots r_n^{x_n} (1 - r_1)^{1 - x_1} \cdots (1 - r_n)^{1 - x_n} ,$$

a istotność strukturalna:

$$I_{\varphi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{2^{n-11}(k-1)!(n-k)!}.$$

5) System o strukturze $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 \coprod x_2)x_3$, dla którego $h(\mathbf{r}) = 1-[(1-r_1r_2)(1-r_3)]$ lub $h(\mathbf{r}) = r_1r_2 + r_3 - r_1r_2r_3$. Zatem

$$I_h(1) = r_2 - r_2r_3,$$

$$I_h(2) = r_1 - r_1r_3,$$

$$I_h(3) = 1 - r_1r_2.$$

Jeżeli $r_i \geq \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, 3$, to $I_h(3) \geq I_h(1) \geq I_h(2)$. Jeżeli $r_i \leq \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, 3$, to $I_h(3)$ jest również największa.

Ze wzoru (18) wynika, że $I_h(i)$ nie zależy od niezawodności elementu i, tzn. zawodne i niezawodne elementy mają taką samą istotność. Dlatego też Riabinin i Czerkesow w 1981 roku wprowadzili miarę określającą wpływ danego elementu na niezawodność całego systemu:

$$I_{R-Cz}(i) = r_i I_h(i), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Łatwo zauważyć, że dla systemów o elementach charakteryzujących się wysoką niezawodnością ($r_i \to 1$) miara ta ma praktycznie takie samo znaczenie jak $I_h(i)$. Bardziej naturalne wydaje się zatem wprowadzenie następującej definicji:

$$I^*_{R-Cz}(i) = (1 - r_I)I_h(i) \qquad i - 1,2,\ldots,n.$$

Im większą niezawodność ma element i, tym mniejszy wpływ na zawodność systemu. Miarę krytycznej istotności wprowadził w 1975 roku Lambert:

$$I_L(i) = I_h(i)\frac{(1-r_i)}{1-h(\mathbf{r})}.$$

Miara ta, jak widać, różni się od się od $I^{*}_{R-Cz}(i)$ tylko stałym mnożnikiem $[1-h(\mathbf{r})]^{-1}$.

W 1970 roku Vesely, a w 1975 roku Fussell wprowadzili miarę istotności niezawodnościowej:

$$I_{V-F}(i)=\frac{1-h_i(\mathbf{r})}{1-h(\mathbf{r})},$$

gdzie $1-h_i(\mathbf{r})$ jest prawdopodobieństwem uszkodzenia systemu, jeśli wszystkie elementy minimalnego cięcia zawierającego element i są uszkodzone.

Inne miary istotności niezawodnościowej zaproponował Natvig (1979, 1982, 1985, 1990). Wszystkie opierają się na idei, że najistotniejszym elementem systemu jest ten, którego uszkodzenie, z największym prawdopodobieństwem, zmniejsza czas uszkodzenia systemu. Miary istotności Natviga zostały uogólnione na systemy naprawialne. Jednakże wzory analityczne można otrzymać tylko dla bardzo prostych systemów naprawialnych. Dla systemów złożonych musimy korzystać z metod statystycznych.

WNIOSKI

Miary niezawodnościowej istotności elementów zostały wprowadzone dla prostych systemów, dla których analityczny sposób wyliczenia $I_h(i)$ nie stanowi problemu. Natomiast dla systemów bardzo złożonych lub dla przypadków bardziej realistycznych (zależne i naprawialne elementy, czasy zdatności elementów niemające rozkładu wykładniczego) nie można ich stosować. Miara Birnbauma $I_h(i)$ stała się jednak punktem wyjścia dla przyszłych poszukiwań bardziej dogodnych definicji istotności niezawodnościowej elementów systemów.

Miary istotności elementów opisane w pracy zostały wprowadzone dla systemów nienaprawialnych z niezależnymi elementami. Metody analityczne są oparte na zasadzie wyznaczania minimalnych cięć. W przypadku systemów rzeczywistych z naprawialnymi i zależnymi elementami metody analityczne są praktycznie niemożliwe do zastosowania.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barlow R. E., Proschan F., *Importance of system components and fault tree events,* „Stoch. Proc. Appl.", 1975, No 3, pp. 153 – 173.

[2] Barlow R. E., Proschan F., *Mathematical Theory of Reliability,* John Wiley & Sons, New York 1965.

[3] Barlow R. E., Proschan F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, John Wiley & Sons, New York 1972.

[4] Bobrowski D., *Modele i metody analityczne w teorii niezawodności,* Warszawa 1985.

[5] Kowalenko I. N., Kuzniecow N. J., Pegg Ph. A., *Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications,* John Wiley & Sons Ltd., England 1997.

[6] Załęska-Fornal A., *Konstruowanie i badanie probabilistycznych modeli niezawodności nieodnawialnych złożonych obiektów technicznych*, rozprawa doktorska, Gdynia 1998.

[7] Załęska-Fornal A., *Structural and reliability importance of components of the systems,* 3rd Safety and Reliability International Conference KONBIN 2003, Gdynia, May 27 – 30, 2003, Vol. 2, pp. 207 – 212.

ABSTRACT

The paper defines and determines the structural importance of the components for the systems of various structures. It also defines the reliability importance of the components for some structures of systems and the event tree importance of the basic events. Some illustrating examples are presented.

Recenzent prof. dr hab. Krzysztof S. Kołowrocki