

**Lesław Kyziół**  
**Akademia Marynarki Wojennej**

## **WYZNACZANIE STAŁYCH MATERIAŁOWYCH DREWNA METODĄ HOMOGENIZACJI**

### **STRESZCZENIE**

Podano metodę, za pomocą której możliwe jest dedukowanie z opisu mikroskopowego odpowiadającego mu opisu makroskopowego. Ponieważ periodyczność struktury upraszcza analizę, zakłada się, że analizowane ośrodki mają właśnie taką strukturę.

Elementem strukturalnym drewna sosnowego jest jego warstwowość części bielastej składającej się naprzemiennie z warstw drewna wczesnego i późnego. W analizie założono, że każda z warstw jest zbudowana z materiału jednorodnego i transwersalnie izotropowego. Związki fizyczne sprężystości składników ośrodka przyjęto jako liniowe zależności Hooke'a. Warstwowość struktury drewna wraz z warunkami periodyczności implikują zależności pola przemieszczeń, pola odkształcenia oraz pola naprężenia tylko od jednej mikroskopowej współrzędnej przestrzennej. Na tej podstawie opracowano zależności matematyczne pozwalające określić zastępcze stałe materiałowe na podstawie ustalonych doświadczalnie stałych materiałowych pojedynczych warstw drewna wczesnego i późnego.

#### Słowa kluczowe:

homogenizacja, periodyczność, mikrostruktura, makrostruktura, jednorodność, niejednorodność, warstwy drewna wczesnego i późnego, stałe materiałowe pojedynczych warstw, zastępcze stałe materiałowe.

### **WSTĘP**

Obserwacja ciał rzeczywistych wskazuje, że reakcja materiału niejednorodnego, po odpowiednim uśrednieniu jego składników, jest taka, jak gdyby był on jednorodny. Każdy osobny składnik mieszaniny na poziomie mikro, jest traktowany

jako ośrodek ciągły z jego własnym równaniem konstytutywnym, prawami zachowania oraz warunkami brzegowymi na granicy rozdziału faz. Równania na poziomie mikroskopowym są uśredniane w celu otrzymania równań makroskopowych. Metoda „przejścia” z poziomu niejednorodności do poziomu makroskopowego jednorodnego nosi nazwę **homogenizacji** [5]. Stosując metodę homogenizacji, należy dokonać opisu matematycznego rozważanego procesu przez „przenoszenie” do skali makroskopowej informacji dostępnej na poziomie mikro (niejednorodności). Ponadto, jeżeli znana jest geometria wewnętrzna ośrodka oraz parametry lokalne, metoda ta umożliwia jednoznaczne określenie wartości parametrów zastępczych ośrodka. W opisie makroskopowym mikrostruktura najczęściej jawnie nie występuje, jest natomiast „ukryta” pod wartościami parametrów zastępczych opisu makroskopowego. W związku z tym, aby analizować konkretne wartości parametrów zastępczych oraz ich zmienność, należy analizować wpływ mikrostruktury na ich wartości [4].

## METODA HOMOGENIZACJI

W metodzie homogenizacji poszukuje się ekwiwalentnego opisu makroskopowego, gdy znany jest opis mikrostruktury.

W skali mikro muszą być dane:

- geometria;
- równania równowagi dla każdej fazy (składnika) układu;
- warunki brzegowe na granicy rozdziału faz (składników);
- związki konstytutywne wraz z parametrami.

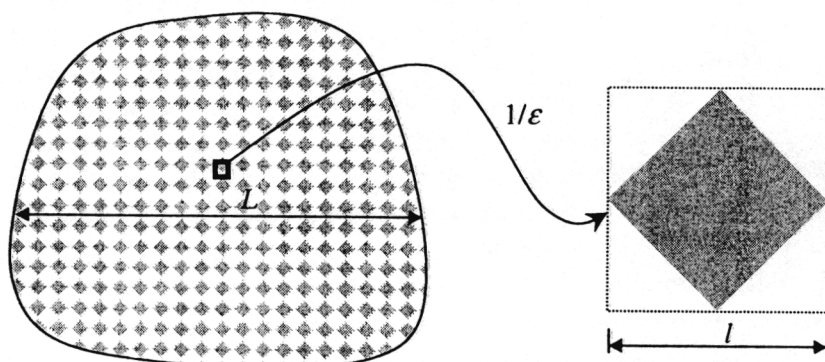
Proces homogenizacji musi dać w skali makroskopowej [1]:

- równanie równowagi;
- związki konstytutywne wraz z parametrami zastępczymi;
- prawo lokalizacji, tzn. związek pozwalający określić wszystkie pola fizyczne na poziomie mikroskopowym, gdy znane są makroskopowe pola fizyczne.

Metoda homogenizacji zastępczych stałych sprężystości drewna sformułowana została jako matematyczna teoria homogenizacji. Proces przejścia z opisem matematycznym [3] ze skali mikroskopowej do makroskopowej dokonuje się poprzez parametryzację opisu matematycznego parametrem  $\varepsilon > 0$ , będącym parame-

trem skali (np. reprezentującym typowy wymiar włókien drewna), a następnie poprzez żądanie, aby  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Jedną z metod poszukiwania opisu ekwiwalentnego dla ośrodka mikroniejnorodnego jest metoda asymptotycznej homogenizacji [2, 5, 6]. Podstawowym założeniem tej metody jest periodyczność struktury (rys. 1.).



Rys. 1. Struktura periodyczna i podstawowa komórka periodyczności

Parametryzacji opisu mikroskopowego dokonuje się parametrem  $\varepsilon = l/L$ , reprezentującym stosunek wymiarów pojedynczej komórki periodyczności  $l$ , z której wygenerowany jest przez periodyczność cały ośrodek, oraz  $L$ , będący jednym z wymiarów objętości rozważanego ośrodka (rys. 2.).

Metoda asymptotycznej homogenizacji poszukuje granicy parametryzowanego rozwiązania, zakładając, że parametryzowane pole opisu mikroskopowego wykazuje asymptotyczny charakter względem parametru  $\varepsilon$  i może być przedstawione w postaci rozwinięcia asymptotycznego zależnego od dwóch zmiennych przestrzennych  $x$  oraz  $y = \frac{x}{\varepsilon}$

$$u^\varepsilon(x) = u^{(0)}(x, y) + \varepsilon u^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots + y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Każdy człon rozwinięcia asymptotycznego (1), tj.  $u^{(i)}(x, y)$ , przyjmuje się ponadto jako  $Y$ -periodyczny względem  $y$ , tzn. dla ustalonego  $x$  wartości  $u^{(i)}$  w odpowiadają-

cych sobie punktach na krańcach pojedynczej komórki periodyczności (powiększonej w jednokładności o skali  $\varepsilon^{-1}$ ) są takie same, tj.

$$u^{(i)}(x, y + y) = u^{(i)}(x, y). \quad (2)$$

Zmienne  $x$  i  $y$  traktuje się więc jako dwie niezależne zmienne przestrzenne, modyfikując równocześnie operator pochodnej przestrzennej, tj.

$$\begin{aligned} f(x, y) \\ \frac{d}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \\ \frac{d}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \varepsilon^{-1} \\ \frac{d}{dx_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Poszukiwanie ekwiwalentnego opisu makroskopowego polega na wprowadzeniu rozwinięcia (1) do opisu mikroskopowego z równoczesną zmianą operatorów pochodnej przestrzennej według (3), a następnie identyfikacji równań stojących przy odpowiednich potęgach parametru  $\varepsilon$ . W rezultacie otrzymuje się cały szereg równań dla poszczególnych wyrazów rozwinięcia (1). Nałożony na poszczególne elementy rozwinięcia asymptotycznego  $u^{(i)}(x, y)$  warunek lokalnej periodyczności (2) powoduje, że rozwiązania tak otrzymanych równań poszukuje się w obrębie pojedynczej komórki. Po dokonaniu uśrednienia po zmiennej  $y$  opisany proces prowadzi do równań spełnionych przez pierwszy człon rozwinięcia (1), które są niczym innym, jak poszukiwanym ekwiwalentnym opisem makroskopowym rozważanego zagadnienia.

Łatwość dochodzenia do opisu makroskopowego jest wynikiem zastąpienia parametryzowanego pola szeregiem asymptotycznym (1), dlatego metoda jest nazywana metodą dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych.

Z punktu widzenia matematycznego metoda asymptotycznej homogenizacji daje wynik ścisły, jeżeli parametryzowane pole rzeczywiście wykazuje charakter asymptotyczny w postaci (1). Aby wynik był matematycznie spełniony, powinien być uzupełniony o dowód, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^{(\varepsilon)}(x) = u^{(0)}(x). \quad (4)$$

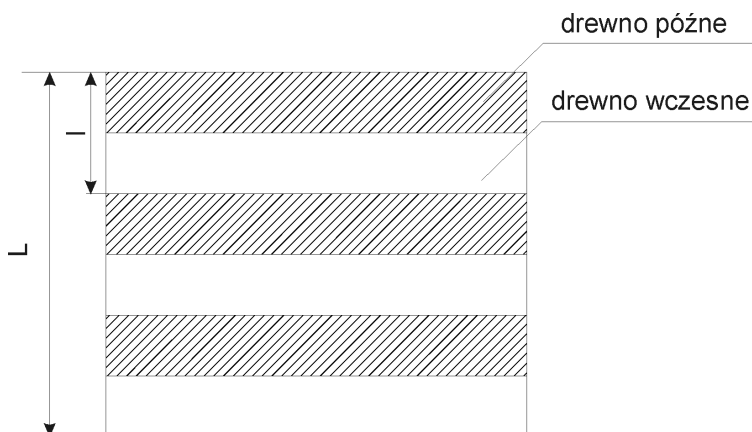
Brak dowodu (4) czyni wynik otrzymany metodą asymptotycznej homogenizacji wynikiem warunkowym, tj. opis makroskopowy jest poprawny, jeżeli parametryzowane pole może być zastąpione szeregiem asymptotycznym (1) lub równoważnie – jeśli (1) jest prawdziwe, to otrzymany wynik jest poprawny. Podstawą metody asymptotycznej homogenizacji jest przyjęcie, że przy odpowiednio małej wartości parametru  $\varepsilon$  parametryzowane pole  $u^{(\varepsilon)}$  oraz gradient tego pola mogą być aproksymowane przez [bezpośrednia konsekwencja prawa transformacji pochodnej przestrzennej (3)]

$$u^{(\varepsilon)}(x) \approx u^{(0)}(x); \quad \frac{\partial u^{(\varepsilon)}(x)}{\partial x} \approx \frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} + \frac{\partial u^{(1)}(x, y)}{\partial y}.$$

### PARAMETRY EFEKTYWNE DREWNA O STRUKTURZE WARSTWOWEJ

Podstawowym założeniem metody asymptotycznej homogenizacji jest periodyczność struktury (rys. 2.).

Parametryzacji opisu mikroskopowego dokonano parametrem  $\varepsilon = \frac{l}{L}$ , reprezentującym stosunek wymiarów pojedynczej komórki periodyczności  $l$ , składającej się z warstwy drewna wczesnego i późnego, oraz  $L$ , będący jednym z wymiarów objętości rozważanego ośrodka.



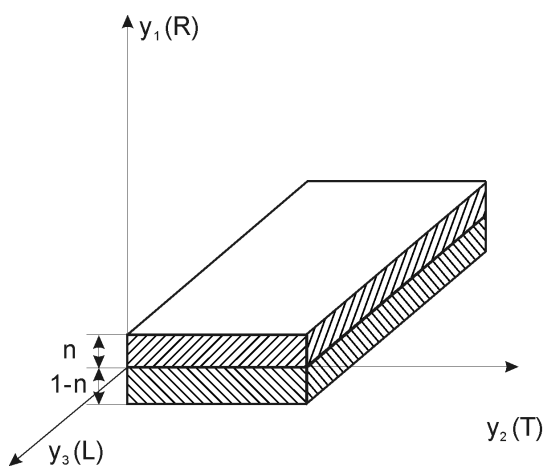
Rys. 2. Struktura periodyczna drewna i podstawowa komórka periodyczności

Elementem strukturalnym drewna jest jego warstwowość. Obliczenia ilościowe przeprowadzono dla sosnowego drewna części bielastej składającej się naprzemiennie z warstw drewna wczesnego i późnego. W analizie założono, że każda z warstw jest zbudowana z materiału jednorodnego i transversalnie izotropowego. Związki fizyczne sprężystości składników ośrodka przyjęto jako liniowe zależności Hooke'a. Założono, że w analizie nie wyróżnia się dodatkowo cech mechanicznych powierzchni kontaktu.

Założenie o transversalnej izotropii warstw drewna wydaje się rozsądne, ponieważ warstwy dla kierunku anatomicznego stycznego ( $T$ ) i promieniowego ( $R$ ) wykazują podobny układ przejrzysty. Ponadto takie założenie pozwala w bardzo przejrzysty sposób przedstawić metodykę określania własności efektywnych struktur warstwowych.

### DEFORMACJE SPRĘŻYSTE

Omawianą strukturę przedstawiono na rysunku 3. (przez  $n$  oznaczono udział drewna wczesnego, a przez  $(1-n)$  – udział drewna późnego). Komórka drewna została przedstawiona w układzie  $y_1(R)$ ,  $y_2(T)$ ,  $y_3(L)$ . Dla kierunku  $y_1$  i  $y_2$  właściwości każdej z tych warstw są takie same. Warstwowość struktury wraz z warunkiem lokalnej periodyczności implikują zależność pola przemieszczenia, pola odkształcenia oraz pola naprężenia tylko od jednej mikroskopowej współrzędnej przestrzennej, tj.  $y_1$  (rys. 3.).



Rys. 3. Komórka drewna w układzie kartezjańskim

Zależność naprężenia od odkształcenia dla pojedynczej warstwy drewna w postaci macierzowej przedstawia się jak poniżej

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Dalej przedstawiono związki konstytutywne dla dwu warstw:

materiał 1. – drewno wczesne

$$\sigma_{ij}^1 = C_{ijkh}^1 e_{kh}^1; \quad (6)$$

materiał 2. – drewno późne

$$\sigma_{ij}^2 = C_{ijkh}^2 e_{kh}^2. \quad (7)$$

### OPIS MIKROSKOPOWY

Poszukujemy pola przemieszczenia.

⇒ Równania równowagi

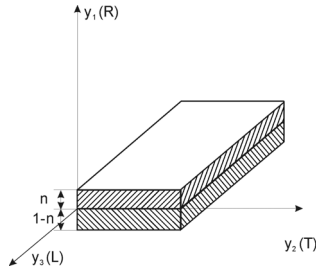
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} = 0 \quad (8)$$

$$U_k(x, y_1, y_2, y_3) = U_k(x, y_1).$$

Pola przemieszczenia komórki nie zależą od  $y_2$  i  $y_3$ , zależą natomiast od  $y_1$

$$U_k(x, y_1) = U_k^{(0)}(x, y_1) + \varepsilon U_k^{(1)}(x, y_1) + \dots \quad (9)$$

⇒ Warunek periodyczności



$$\begin{aligned} U_k^{(1)}(x, n) &= U_k^{(1)}(x, -(1-n)) \\ \sigma_{ij}(x, n) &= \sigma_{ij}(x, -(1-n)) \end{aligned} \quad (9a)$$

Oznacza on, że w odpowiednich sobie punktach na krańcach elementu mikrostruktury wartości przemieszczenia i naprężenia są takie same.

⇒ Warunek ciągłości wektora przemieszczenia

$$U_k^{(i)}(x, y_1 = 0) = U_k^{(i)}(x, y_1 = 0^-) = U_k^{(i)}(x, y_1 = 0^+) \quad (10)$$

Oznacza on, że na powierzchniach kontaktu między składnikami (warstwami) przemieszczenia są równe.

⇒ Warunek ciągłości wektora naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x, 0^+) &= \sigma_{12}(x, 0^-) \\ \sigma_{11}(x, 0^+) &= \sigma_{11}(x, 0^-) \\ \sigma_{13}(x, 0^+) &= \sigma_{13}(x, 0^-) \end{aligned} \quad (11)$$

Oznacza on, że wektor naprężenia jest ciągły na powierzchni kontaktu. Pole składników przemieszczenia liczy się tylko względem współrzędnej  $y_1$

$$U_k(x, y_1) = U_k^{(0)}(x, y_1) + \varepsilon U_k^{(1)}(x, y_1) + \dots \quad (12)$$

Każdy człon tego rozwinięcia przyjmuje się jako  $Y$ -periodyczny względem  $y_1$ , tzn. dla ustalonego  $x$  wartości  $u^{(i)}$  w odpowiadających sobie punktach na krańcach pojedynczej komórki periodyczności są takie same. Zmienne  $x$  i  $y$  traktuje się



jako dwie niezależne zmienne przestrzenne, modyfikując równocześnie operator pochodnej przestrzennej, tj.

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (13)$$

Przez  $e_{ij}$  oznaczono składową tensora odkształcenia wewnątrz elementu mikrostruktury, która dla małych odkształceń jest określona zależnością

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Wykorzystując operator (13)

$$\begin{aligned} e_{ij}(u) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \\ e_{ij}(u) &= e_{ij}^x + \varepsilon^{-1} e_{ij}^y, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:  $e_{ij}^x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$

$$e_{ij}^y = \varepsilon^{-1} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right),$$

rozwińnięcie asymptotyczne tensora odkształcenia zależnego od dwóch zmiennych przestrzennych  $x$  i  $y$  oraz  $y = \frac{x}{\varepsilon}$

$$e_{ij}(u) = e_{ij}^x + \varepsilon^{-1} e_{ij}^y, \quad u^i(x, y) = u^{(0)}(x, y) + \varepsilon u^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots,$$

stąd

$$\begin{aligned} e_{ij}(u) &= e_{ij}^x u^{(0)} + \varepsilon^{-1} e_{ij}^y u^{(0)} + \varepsilon [e_{ij}^x u^{(1)} + \varepsilon^{-1} e_{ij}^y u^{(1)} + \dots = \\ &= e_{ij}^x u^{(0)} + e_{ij}^y u^{(1)} + \varepsilon^{-1} e_{ij}^y u^{(0)} + \varepsilon e_{ij}^x u^{(1)} + \dots \varepsilon^{-1} e_{ij}^y u^{(0)} = 0 \quad [\text{ze względu na (12)}] \end{aligned}$$

$$e_{ij}(u) = e_{ij}^x u^{(0)} + e_{ij}^y u^{(1)} + 0(\varepsilon)$$

$0(\varepsilon)$  – rzędu wielkości (symbol Landau)

$$e_{ij}(u) = e_{ij}^x(u^{(0)}) + e_{ij}^y(u^{(1)}), \quad (15)$$

$$e_{ij}^y(u^{(1)}) = \left\{ \begin{array}{l} e_{11}^y(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial(u_1^{(1)})}{\partial y_1} \\ e_{12}^y(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial(u_2^{(1)})}{\partial y_1} \\ e_{13}^y(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_3} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial(u_3^{(1)})}{\partial y_1} \end{array} \right\}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_3} = 0, \text{ pozostałe pochodne także są równe zero.}$$

### ROZWIĄZANIE PRZEDSTAWIONEGO ZAGADNIENIA

Wykorzystując ogólne równanie równowagi (8)  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} = 0$ , wszystkie równania zawierające  $y_2, y_3$  są spełnione tożsamościowo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_1} = 0 \end{aligned}$$

Równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_1} = 0 \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_1} = 0. \quad (17c)$$

Wykorzystując zależności (5) naprężenia od odkształcenia dla pojedynczej warstwy drewna wczesnego i późnego dla materiału 1 w postaci ogólnej

$$\sigma_{11} = C_1 e_{11} + C_2 e_{22} + C_3 e_{33}; \quad \sigma_{12} = C_5 e_{12}; \quad \sigma_{13} = C_6 e_{13}$$

oraz wykorzystując zależności (15) i (16)

$$\sigma_{11}^1 = C_1^1(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + C_2^1(e_{22}^x(U^{(0)}) + e_{22}^y(U^{(1)})) + C_3^1 e_{33}^x(U^{(0)}) \\ e_{22}^y(U^{(1)}) = 0$$

$$\sigma_{11}^1 = C_1^1(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + C_2^1 e_{22}^x(U^{(0)}) + C_3^1 e_{33}^x(U^{(0)}) \quad (18)$$

$$\sigma_{12}^1 = C_5^1(e_{12}^x(U^{(0)}) + e_{12}^y(U^{(1)})) \quad (19)$$

$$\sigma_{13}^1 = C_6^1(e_{13}^x(U^{(0)}) + e_{13}^y(U^{(1)})) . \quad (20)$$

Górny indeks oznacza materiał 1. (drewno wczesne). Analogiczne zależności są dla 2. materiału (drewno późne), górny indeks oznaczono 2.

Przechodzimy do równań równowagi w materiale 1. Wykorzystując zależności (17a)  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} = 0$  i uwzględniając zależność (18)  $C_1^1 \frac{\partial e_{11}^y(U^{(1)})}{\partial y_1} = 0$ , to na mocy zależności (16)

$$C_1^1 \frac{\partial^2 U_1^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 . \quad (21a)$$

Z zależności (17b)  $C_5^1 \frac{\partial e_{12}^y(U^{(1)})}{\partial y_1} = 0$ , to na mocy zależności (16)

$$\frac{1}{2} C_5^1 \frac{\partial^2 U_2^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 . \quad (21b)$$

Z zależności (17c)  $C_6^1 \frac{\partial e_{13}^y(U^{(1)})}{\partial y_1} = 0$ , to na mocy zależności (16)

$$\frac{1}{2} C_6^1 \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 . \quad (21c)$$

Przemieszczeniowe warunki równowagi przyjmują postać równań różniczkowych jednorodnych II rzędu

$$\frac{d^2 U_1^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 ; \quad \frac{d^2 U_2^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 ; \quad \frac{d^2 U_3^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0 .$$

Dwukrotne scałkowanie powyższych równań pozwala na ich rozwiązanie

$$\begin{array}{ll}
 \text{dla materiału 1.} & \text{dla materiału 2.} \\
 U_1^{(1)} = A_1 y_1 + B_1 & U_1^{(1)} = A_1 y_1 + B_1 \\
 U_2^{(1)} = A_2 y_1 + B_2 & U_2^{(1)} = A_2 y_1 + B_2 \\
 U_3^{(1)} = A_3 y_1 + B_3 & U_3^{(1)} = A_3 y_1 + B_3
 \end{array} \quad (22)$$

Współczynniki  $A$  i  $B$  są składowymi przemieszczenia w jednym kierunku. Wykorzystujemy warunki ciągłości przemieszczenia (10), które dla obu składników są identyczne.

Warunki brzegowe

$$B_1 = B_1 = B_1; \quad B_2 = B_2 = B_2; \quad B_3 = B_3 = B_3.$$

Korzystając z warunków ciągłości wektora naprężenia (11)  $\sigma_{11}(x,0^+) = \sigma_{11}(x,0^-)$  oraz zależności (22) i (18), określimy ciągłość wektora naprężenia na kontakcie powierzchni obu warstw drewna, zależność (18)  $\sigma_{11}^1 = C_1(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + C_2 e_{22}^x(U^{(0)}) + C_3 e_{33}^x(U^{(0)})$  wstawiamy do (22) oraz przyjmując  $e_{11}^y(u^{(1)}) = \frac{\partial(u_1^{(1)})}{\partial y_1}$ ;  $u_1^{(1)} = A_1 y_1 + B_1 \Rightarrow e_{11}^y(u^{(1)}) = A_1$ ,

dla 1. materiału zapiszemy

$$\sigma_{11}^1 = C_1 e_{11}^x(U^{(0)}) + C_1 A_1 + C_2 e_{22}^x(U^{(0)}) + C_3 e_{33}^x(U^{(0)}),$$

dla 2. materiału natomiast

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{11}(x,0^+) = \sigma_{11}(x,0^-) \\
 \sigma_{11}^2 = C_1 e_{11}^x(U^{(0)}) + C_1 A_1 + C_2 e_{22}^x(U^{(0)}) + C_3 e_{33}^x(U^{(0)}),
 \end{array}$$

odejmując stronami  $\sigma_{11}^1 - \sigma_{11}^2 = 0$

$$e_{11}^x(U^{(0)})[C_1 - C_1] + e_{22}^x(U^{(0)})[C_2 - C_2] + e_{33}^x(U^{(0)})[C_3 - C_3] + C_1 A_1 - C_1 A_1 = 0; \quad (23a)$$

wykorzystując zależność (16), (22)  $e_{12}^y(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\partial(u_2^{(1)})}{\partial y_1} = \frac{1}{2} A_2^1$ , stąd na mocy

zależności (19)  $\sigma_{12}^1 = C_5^1 e_{12}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_5^1 A_2^1$  analogicznie dla materiału 2.

$$\sigma_{12}^2 = C_5^2 e_{12}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_5^2 A_2^2$$

$$\sigma_{12}^1 - \sigma_{12}^2 = 0$$

$$\sigma_{12}^1 = C_5^1 e_{12}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_5^1 A_2^1$$

$$\sigma_{12}^2 = C_5^2 e_{12}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_5^2 A_2^2$$

$$\sigma_{12}^1 - \sigma_{12}^2 = 0$$

$$e_{12}^x(U^{(0)}) [C_5^1 - C_5^2] + \frac{1}{2} C_5^1 A_2^1 - \frac{1}{2} C_5^2 A_2^2 = 0; \quad (23b)$$

wykorzystując zależność (16), (22)  $e_{13}^y(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\partial(u_3^{(1)})}{\partial y_1} = \frac{1}{2} A_3^1$ , stąd na mocy

zależności (19)  $\sigma_{13}^1 = C_6^1 e_{13}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_6^1 A_3^1$  analogicznie dla materiału 2.

$$\sigma_{13}^2 = C_6^2 e_{13}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_6^2 A_3^2$$

$$\sigma_{13}^1 - \sigma_{13}^2 = 0$$

$$\sigma_{13}^1 = C_6^1 e_{13}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_6^1 A_3^1$$

$$\sigma_{13}^2 = C_6^2 e_{13}^x(U^{(0)}) + \frac{1}{2} C_6^2 A_3^2$$

$$\sigma_{13}^1 - \sigma_{13}^2 = 0$$

$$e_{13}^x(U^{(0)}) [C_6^1 - C_6^2] + \frac{1}{2} C_6^1 A_3^1 - \frac{1}{2} C_6^2 A_3^2 = 0. \quad (23c)$$

Warunek periodyczności naprężeń spełniają równania (23). Wartości tych naprężeń nie zależą od współrzędnej  $y$ . Na granicy i na brzegach przedziałów wartości naprężeń są jednakowe.

Wykorzystując zależności (9a) i (22), sprawdzamy warunek periodyczności, przyjmując za  $y_1 = n$  i  $y_1 = -(1-n)$

$$\begin{aligned} A_1^1 n + B_1^2 &= -(1-n) A_1^2 + B_1^1 \\ A_2^1 n + B_2^2 &= -(1-n) A_2^2 + B_2^1, \\ A_3^1 n + B_3^2 &= -(1-n) A_3^2 + B_3^1 \end{aligned}$$

stąd

$$A_1^1 = -\frac{1-n}{n} A_1^2 \quad (24a)$$

$$A_2^1 = -\frac{1-n}{n} A_2^2 \quad (24b)$$

$$A_3^1 = -\frac{1-n}{n} A_3^2. \quad (24c)$$

Podstawiając do (23c) zależność (24c) i dokonując przekształceń, otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_{13}^x(U^{(0)}) [C_6^1 - C_6^2] - \frac{1}{2} \frac{1-n}{n} C_6^1 A_3^2 - \frac{1}{2} C_6^2 A_3^2 &= 0 \\ e_{13}^x(U^{(0)}) [C_6^1 - C_6^2] &= \frac{1}{2} A_3^2 [C_6^1 \frac{1-n}{n} + C_6^2] \\ A_3^2 &= 2 \frac{e_{13}^x(U^{(0)}) [C_6^1 - C_6^2]}{C_6^1 + C_6^2 \frac{1-n}{n}}. \end{aligned}$$

Podstawiając do (23b) zależność (24b) i dokonując przekształceń, otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_{12}^x(U^{(0)}) [C_5^1 - C_5^2] - \frac{1}{2} \frac{1-n}{n} C_5^1 A_2^2 - \frac{1}{2} C_5^2 A_2^2 &= 0 \\ e_{12}^x(U^{(0)}) [C_5^1 - C_5^2] &= \frac{1}{2} A_2^2 [C_5^1 \frac{1-n}{n} + C_5^2] \end{aligned}$$

$$A_2 = 2 \frac{e_{12}^x(U^{(0)}) [C_5^1 - C_5^2]}{C_5 + C_5 \frac{1-n}{n}}$$

Podstawiając do (23b) zależność (24b) i dokonując przekształceń, otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_{11}^x(U^{(0)}) [C_1^1 - C_1^2] + e_{22}^x(U^{(0)}) [C_2^1 - C_2^2] + e_{33}^x(U^{(0)}) [C_3^1 - C_3^2] - \frac{1-n}{n} C_1^2 A_1 - C_1^2 A_1 &= 0 \\ e_{11}^x(U^{(0)}) [C_1^1 - C_1^2] + e_{22}^x(U^{(0)}) [C_2^1 - C_2^2] + e_{33}^x(U^{(0)}) [C_3^1 - C_3^2] &= A_1 \left[ \frac{1-n}{n} C_1^1 + C_1^2 \right] \\ A_1 &= \frac{e_{11}^x(U^{(0)}) [C_1^1 - C_1^2] + e_{22}^x(U^{(0)}) [C_2^1 - C_2^2] + e_{33}^x(U^{(0)}) [C_3^1 - C_3^2]}{C_1^1 + \frac{1-n}{n} C_1^1} \end{aligned}$$

Warstwokowość struktury drewna wraz z warunkami periodyczności implikują zależności pola przemieszczeń, pola odkształcenia oraz pola naprężenia tylko od jednej mikroskopowej współrzędnej przestrzennej, tj.  $y_1$  (rys. 1.).

## OPIS WIELKOŚCI W SKALI MAKROSKOPOWEJ

Po oznaczeniu składowych tensora makronaprężenia i makroodkształcenia można zapisać związki konstytutywne sprężystości.

Tensor makronaprężenia

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = n \sigma_{ij}^1 + (1-n) \sigma_{ij}^2 \quad (25)$$

Tensor makroodkształcenia

$$\begin{aligned} E_{ij} = \langle e_{ij}(U) \rangle &= \langle e_{ij}^x(U^{(0)}) + e_{ij}^y(U^{(1)}) \rangle = \langle e_{ij}^x(U^{(0)}) \rangle + \langle e_{ij}^y(U^{(1)}) \rangle \\ e_{ij}^y(U^{(1)}) &= 0 \end{aligned}$$

Na mocy równania (12) równanie periodyczności  $U_k(x, y_1) = U_k^{(0)}(x, y_1) + \varepsilon U_k^{(1)}(x, y_1) + \dots$   
 $\varepsilon U_k^{(1)}(x, y_1) = 0$

$$e_{ij}^y(U^{(1)}) = \frac{du_1^{(1)}}{dy_1}$$

Definiując wielkości makroskopowe jako średnie objętościowe po obszarze elementu, otrzymujemy

$$\langle e_{ij}^y(U^{(1)}) \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V \frac{du_1^{(1)}}{dy_1} dV = \frac{1}{\|V\|} \int_{\partial V} du_1^{(1)} n_1 dS = 0$$

$$\langle e_{11}^y(U^{(1)}) \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V e_{11}^y(U^{(1)}) dV = \frac{1}{\|V\|} \int_{\partial V} du_1^{(1)} n_1 dS = 0$$

$$\langle e_{ij} \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V e_{ij}(y) dV = \frac{1}{2} (E_{ij} + E_{ji})$$

z definicji

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V \sigma_{ij}(y) dV = \frac{1}{\|V\|} \int_{\partial V} \sigma_{ki} n_k y_j ds$$

stąd

$$E_{ij} = e_{ij}^x(U^{(0)}) \quad (26)$$

makroskopowe związki konstytutywne

$$\Sigma_{ij} = K_{ijkh} E_{kh} \quad (27)$$

$$E_{kh} = e_{kh}^x(U^{(0)}) .$$

Zależności naprężenia od odkształcenia materiału drewna (w skali makro) w postaci macierzowej przedstawiono poniżej

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{23} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} K_1 & K_2 & K_3 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & K_4 & K_5 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_5 & K_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_9 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{array} \right\} . \quad (28)$$

Wykorzystując zależność (25), (5), (26) oraz (15)

$$\begin{aligned} \Sigma_{23} &= \langle \sigma_{23} \rangle = n \sigma_{23}^1 + (1-n) \sigma_{23}^2 = n \overset{1}{C}_6 e_{23}^x(U^{(0)}) + (1-n) \overset{2}{C}_6 e_{23}^x(U^{(0)}) = \\ &= [n \overset{1}{C}_6 + (1-n) \overset{2}{C}_6] e_{23}^x(U^{(0)}) = [n \overset{1}{C}_6 + (1-n) \overset{2}{C}_6] \cdot E_{23}, \end{aligned}$$



stąd

$$K_9 = n C_6^1 + (1-n) C_6^2 \quad (29)$$

Z zależności (25) oraz (5)

$$\begin{aligned} \Sigma_{13} &= n \sigma_{13}^1 + (1-n) \sigma_{13}^2 = \sigma_{13}^1 = \sigma_{13}^2 \\ \Sigma_{13} &= \sigma_{13}^1 = \sigma_{13}^2 = C_6^2 (e_{13}^x(U^{(0)}) + e_{13}^y(U^{(1)})) = C_6^2 e_{13}^x(u^{(0)}) + C_6^2 e_{13}^y(u^{(1)}) = \\ &= C_6^2 (e_{13}^x(U^{(0)})) + C_6^2 \frac{1}{2} \frac{du_3^{(1)}}{dy_1} = C_6^2 e_{13}^x + \frac{1}{2} C_6^2 A_3 = \\ &= C_6^2 e_{13}^x + \frac{1}{2} C_6^2 \frac{e_{13}^x [C_6^1 - C_6^2]}{C_6^1 + C_6^2 \frac{1-n}{n}} = [C_6^2 + C_6^2 \frac{C_6^1 - C_6^2}{C_6^1 + C_6^2 \frac{1-n}{n}}] E_{13} \end{aligned}$$

$$K_8 = C_6^2 + C_6^2 \frac{C_6^1 - C_6^2}{C_6^1 + C_6^2 \frac{1-n}{n}} \quad (30)$$

Z zależności (25) oraz (5)

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= n \sigma_{12}^1 + (1-n) \sigma_{12}^2 = \sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2 \\ \Sigma_{12} &= \sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2 = C_5^2 (e_{12}^x(U^{(0)}) + e_{12}^y(U^{(1)})) = C_5^2 e_{12}^x(u^{(0)}) + C_5^2 e_{12}^y(u^{(1)}) = \\ &= [C_5^2 + C_5^2 \frac{C_5^1 - C_5^2}{C_5^1 + C_5^2 \frac{1-n}{n}}] e_{12}^x = [C_5^2 + C_5^2 \frac{C_5^1 - C_5^2}{C_5^1 + C_5^2 \frac{1-n}{n}}] E_{12} \end{aligned}$$

$$K_7 = C_5^2 + C_5^2 \frac{C_5^1 - C_5^2}{C_5^1 + C_5^2 \frac{1-n}{n}} \quad (31)$$

Z zależności (25) oraz (5)

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} &= n\sigma_{11}^1 + (1-n)\sigma_{11}^2 = \sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 \\
\Sigma_{11} &= \sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 = C_1^2(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + C_2^2(e_{22}^x(U^{(0)}) + e_{22}^y(U^{(1)})) + C_3^2(e_{33}^x(U^{(0)}) + e_{33}^y(U^{(1)})) \\
e_{22}^y(U^{(1)}) &= \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial y_2} = 0; \quad e_{33}^y(U^{(1)}) = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y_3} = 0; \quad e_{11}^y(U^{(1)}) = \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_1} = A_1^2 \\
\Sigma_{11} &= \sigma_{11}^2 = C_1^2(e_{11}^x(U^{(0)}) + A_1^2) + C_2^2 e_{22}^x(U^{(0)}) + C_3^2 e_{33}^x(U^{(0)}) = \\
&= C_1^2 E_{11} + C_2^2 E_{22} + C_3^2 E_{33} + C_1^2 \frac{E_{11}(C_1 - C_1^1) + E_{22}(C_2 - C_2^1) + E_{33}(C_3 - C_3^1)}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1} = \\
&= [C_1^2 + C_1^2 \frac{C_1 - C_1^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1}] E_{11} + [C_2^2 + C_1^2 \frac{C_2 - C_2^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1}] E_{22} + [C_3^2 + C_1^2 \frac{C_3 - C_3^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1}] E_{33}
\end{aligned}$$

$$K_1 = C_1^2 + C_1^2 \frac{C_1 - C_1^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1} \quad (32)$$

$$K_2 = C_2^2 + C_1^2 \frac{C_2 - C_2^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1} \quad (33)$$

$$K_3 = C_3^2 + C_1^2 \frac{C_3 - C_3^1}{C_1^2 + \frac{1-n}{n} C_1^1} \quad (34)$$

Z zależności (25) oraz (5)

$$\Sigma_{22} = n\sigma_{22}^1 + (1-n)\sigma_{22}^2$$

$$\Sigma_{22} = n[\overset{1}{C}_2(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + \overset{1}{C}_1(e_{22}^x(U^{(0)}) + \overset{1}{C}_3(e_{33}^x(U^{(0)}))] + (1-n)[\overset{2}{C}_2(e_{11}^x(U^{(0)})) + e_{11}^y(U^{(1)}) + \overset{2}{C}_1(e_{22}^x(U^{(0)}) + \overset{2}{C}_3(e_{33}^x(U^{(0)}))$$

$$e_{11}(U) = e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})$$

$$e_{22}(U) = e_{22}^x(U^{(0)}) + e_{22}^y(U^{(1)}) = e_{22}^x(U^{(0)})$$

$$e_{33}(U) = e_{33}^x(U^{(0)}) + e_{33}^y(U^{(1)}) = e_{33}^x(U^{(0)})$$

$$\Sigma_{22} = [n\overset{1}{C}_2 + (1-n)\overset{2}{C}_2]E_{11} + [n\overset{1}{C}_1 + (1-n)\overset{1}{C}_1]E_{22} + [n\overset{1}{C}_3 + (1-n)\overset{2}{C}_3]E_{33} + n\overset{1}{C}_2 e_{11}^y(U^{(1)}) + (1-n)\overset{2}{C}_2 e_{11}^y(U^{(1)})$$

$$\Sigma_{22} = [n\overset{1}{C}_2 + (1-n)\overset{2}{C}_2]E_{11} + [n\overset{1}{C}_1 + (1-n)\overset{1}{C}_1]E_{22} + [n\overset{1}{C}_3 + (1-n)\overset{2}{C}_3]E_{33} + n\overset{1}{C}_2 e_{11}^y + (1-n)\overset{2}{C}_2 e_{11}^y$$

$$e_{11}^y(U^{(1)}) = A_1$$

$$\Sigma_{22} = [n\overset{1}{C}_2 + (1-n)\overset{2}{C}_2]E_{11} + [n\overset{1}{C}_1 + (1-n)\overset{1}{C}_1]E_{22} + [n\overset{1}{C}_3 + (1-n)\overset{2}{C}_3]E_{33} + n\overset{1}{C}_2 \overset{1}{A}_1 + (1-n)\overset{2}{C}_2 \overset{2}{A}_1$$

Po przekształceniach i podstawieniach

$$K_4 = n\overset{1}{C}_1 + (1-n)\overset{2}{C}_1 + (1-n)(\overset{2}{C}_2 - \overset{1}{C}_2) \frac{\overset{1}{C}_2 - \overset{2}{C}_2}{\overset{2}{C}_1 + \frac{1-n}{n}\overset{1}{C}_1} \quad (35)$$

$$K_5 = n\overset{1}{C}_3 + (1-n)\overset{2}{C}_3 + (1-n)(\overset{2}{C}_2 - \overset{1}{C}_2) \frac{\overset{1}{C}_3 - \overset{2}{C}_3}{\overset{2}{C}_1 + \frac{1-n}{n}\overset{1}{C}_1} \quad (36)$$

Z zależności (25) oraz (5)

$$\Sigma_{33} = n\sigma_{33}^1 + (1-n)\sigma_{33}^2$$

$$\Sigma_{33} = n[C_3^1(e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})) + C_3^1(e_{22}^x(U^{(0)}) + C_4^1(e_{33}^x(U^{(0)}))] + (1-n)[C_3^2(e_{11}^x(U^{(0)})) + e_{11}^y(U^{(1)}) + C_3^2(e_{22}^x(U^{(0)}) + C_4^2(e_{33}^x(U^{(0)}))]$$

$$e_{11}(U) = e_{11}^x(U^{(0)}) + e_{11}^y(U^{(1)})$$

$$e_{22}(U) = e_{22}^x(U^{(0)}) + e_{22}^y(U^{(1)}) = e_{22}^x(U^{(0)})$$

$$e_{33}(U) = e_{33}^x(U^{(0)}) + e_{33}^y(U^{(1)}) = e_{33}^x(U^{(0)})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{33} &= n[C_3^1(E_{11} + e_{11}^y) + C_3^1 E_{22} + C_4^1 E_{33}] + (1-n)[C_3^2(E_{11} + e_{11}^y) + C_3^2 E_{22} + C_4^2 E_{33}] = nC_3^1 E_{11} + nC_3^1 e_{11}^y + nC_3^1 E_{22} + nC_4^1 E_{33} + \\ &+ nC_4^1 E_{33} + (1-n)C_3^2 E_{11} + (1-n)C_3^2 e_{11}^y + (1-n)C_3^2 E_{22} + (1-n)C_4^2 E_{33} = \\ &= [nC_3^1 + (1-n)C_3^2]E_{11} + [nC_3^1 + (1-n)C_3^2]E_{22} + [nC_4^1 + (1-n)C_4^2]E_{33} + nC_3^1 A_1 + \\ &+ (1-n)C_3^2 A_1 \\ &(A_1 = -\frac{1-n}{n} A_1) \end{aligned}$$

dla  $E_{11} = E_{22} = 0$

$$\begin{aligned} nC_4^1 + (1-n)C_4^2 + nC_3^1 A_1 + (1-n)C_3^2 A_1 &= \\ (nA_1 = -(1-n)A_1) & \\ = nC_4^1 + (1-n)C_4^2 + (1-n)C_3^1 A_1 + (1-n)C_3^2 A_1 &= \\ = nC_4^1 + (1-n)C_4^2 + (C_3^2 - C_3^1)(1-n)A_1 &= \\ (A_1 = \frac{C_3^1 - C_3^2}{C_1 + \frac{1-n}{n}C_1}) & \end{aligned}$$

$$K_6 = nC_4^1 + (1-n)C_4^2 + (C_3^2 - C_3^1)(1-n) \frac{C_3^1 - C_3^2}{C_1 + \frac{1-n}{n}C_1} \quad (37)$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Auriault J. L., *Dynamic behaviour of porous media*, ed. J. Bear and M. Y. Co-rapcioglu, *Transport Processes in Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 471 – 519.
- [2] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1978.
- [3] Bieslki J. G., Telega J. J., *Effective properties of geomaterials: rocks and porous media*, „Pobl. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci.”, 1997, A-26 (285).
- [4] de Buhan P., Taliercio A., *A homogenization approach to the yield strength of composite material*, „Eur. J. Mech.”, 1991, A/Solid, No 10, pp. 129 – 154.
- [5] Łydźba D., *Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002.
- [6] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, „Lecture Notes in Physics”, 127, Springer-Verlag, Berlin 1980.

## ABSTRACT

The paper presents a method which can use a microscope description to deduce a macro scope description corresponding to it. Since periodic appearance of the structure simplifies the analysis, it is assumed that the analyzed media have such structure.

Layer structure of white part which consists of layers of early and late wood is the structural element of pine-wood. It was assumed in the analysis that each layer is composed of homogenous and transversely isotropic material. Physical dependences of resilience of components were assumed as Hook's linear dependences. Layer structure of wood along with conditions of periodic appearance imply dependences of dislocation field, of deformation field and of strain field on only one microscope spatial co-ordinate. This was used to work out mathematical dependences which in turn can be used to determine substitute material constants based on experimentally determined material constants for single layers of early and late wood.

Recenzent dr hab. inż. Zbigniew Powierża, prof. nadzw. AM w Gdyni