

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej

REKONSTRUKCJA ATRAKTORA *MONARCHY SAFYE* NA PODSTAWIE SZEREGÓW CZASOWYCH

STRESZCZENIE

W artykule opisano zagadnienie rekonstrukcji atraktora na podstawie szeregu czasowego oraz przedstawiono oprogramowanie pozwalające wyznaczać jej parametry. Zagadnienie to zastosowano do rekonstrukcji atraktora *Monarchy Safye* na podstawie szeregów czasowych otrzymanych z numerycznego rozwiązania układu dynamicznego opisującego ten atraktor. Wskazano również na związek rekonstrukcji atraktora z analizą rekurencyjną szeregu czasowego.

Słowa kluczowe:

rekonstrukcja, atraktor, szereg czasowy, opóźnienie czasowe, wymiar zanurzenia, analiza rekurencyjna, diagram rekurencyjny, analiza ilościowa.

WSTĘP

Pojęcie atraktora związane jest z układem dynamicznym. Mówiąc najogólniej, układ dynamiczny to określona reguła ewolucji punktów x pewnej wyróżnionej przestrzeni \mathbb{X} w czasie t^1 . Na początku lat 60. ubiegłego stulecia topolog amerykański Stephen Smale, analizując prace swoich poprzedników: Poincarego, Bendixsona, Birkhoffa, Lapunowa, Pontriagina, Arnolda i innych z zakresu układów dynamicznych, sformułował własny punkt widzenia na układy dynamiczne [18]:

*najważniejszą własnością układu dynamicznego
jest jego zachowanie długookresowe.*

¹ \mathbb{X} nazywamy *przestrzenią stanów* (*przestrzenią fazową*), natomiast jej punkty — *stanami* układu dynamicznego.

W związku z tym problemem inny matematyk amerykański Ian Stewart, badacz dynamiki nieliniowej, w swojej książce *Czy Bóg gra w kości?* [18] sformułował pytanie:

Co zatem robi układ dynamiczny w długim okresie czasu?

Udzielił jednocześnie odpowiedzi na to pytanie:

Zbliża się on do atraktora. Atraktor jest zdefiniowany jako to (...) do czego zmierzają układ! Istota atraktora polega na tym, że jest to pewna część przestrzeni fazowej, taka że każdy punkt, który zaczyna ruch w jej pobliżu², coraz bardziej zbliża się do niej.

DZIWNY ATRAKTOR

Od powyższego, popularnonaukowego opisu atraktora, przejdziemy teraz do jego formalnej definicji. Niech więc będzie dana przestrzeń metryczna \mathbb{X} z określoną w niej metryką d . *Układem dynamicznym (UD)* nazywamy parę (\mathbb{X}, φ) , gdzie φ jest odwzorowaniem

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X},$$

zwanym *rezolwentą* i spełniającym warunki:

- (a) $\varphi(t_0, t_0) = I^3$;
- (b) $\varphi(t, s)\varphi(s, t_0) = \varphi(t, t_0)$;
- (c) $\varphi(t, t_0) = (\varphi(t_0, t))^{-1}$.

Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku często spotykanego w praktyce, gdy $\mathbb{X} := \mathbb{R}^n$ i d jest odległością euklidesową, tzn.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Określmy rezolwentę $\varphi(t, t_0)$ za pomocą deterministycznego autonomicznego układu równań różniczkowych w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \varphi(t, t_0)(\mathbf{x}_0) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}. \quad (1)$$

² Mowa tutaj o tzw. *basenie przyciągania* atraktora.

³ I jest odwzorowaniem tożsamościowym określonym na \mathbb{X} .

Założmy również, że zagadnienie Cauchy'ego (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wówczas $\varphi(t + s, s) = \varphi(t, 0)$ i rodzina odwzorowań

$$\varphi_t(\mathbf{x}_0) := \varphi(t, 0)(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$$

określa jednoparametrową przemienną grupę przekształceń przestrzeni \mathbb{X} w siebie, tzn.

$$\varphi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \varphi_{-t}(\mathbf{x}_0) = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}_0), \quad \varphi_{t+s}(\mathbf{x}_0) = \varphi_t[\varphi_s(\mathbf{x}_0)].$$

Zbiór $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ nazywamy *niezmienniczym* (względem danego UD), jeżeli

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(\mathbb{A}) = \mathbb{A}.$$

Atraktoem (wg Milnora, [13]) układu dynamicznego (1) nazywamy najmniejszy zbiór domknięty i niezmienniczy \mathbb{A} względem tego układu, taki że warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(\mathbf{x}_0), \mathbb{A}) = 0 \tag{2}$$

zachodzi dla prawie każdego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$.

Zbiór

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\}$$

nazywamy *trajektorią fazową (orbitą)* punktu \mathbf{x}_0 .

Z (2) wynika zatem, że z upływem czasu prawie każda trajektoria jest przyciągana⁴ przez atraktor \mathbb{A} .

Jeżeli

$$\mathbb{V}(t) := \text{vol}[\varphi_t(\mathbb{V})], \quad t \in \mathbb{R},$$

to $\mathbb{V}(t)$ nazywamy *objętością fazową* obszaru $\mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ w chwili t względem układu (1). Wówczas

$$\frac{1}{\mathbb{V}(t)} \frac{d\mathbb{V}(t)}{dt} = \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Układ dynamiczny, dla którego $\text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$, nazywamy układem *dysypatywnym* (rozpraszającym). Dla takiego układu objętość fazowa jest niezależna od wyboru obszaru \mathbb{V} i kurczy się do zera wraz z upływem czasu, tzn. $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}(t) = 0$.

Dysypatywność układów fizycznych (np. mechanicznych lub elektrycznych) oznacza, że w trakcie ruchu tracą one energię całkowitą.

Atraktorami układów dysypatywnych mogą być:

- punkty równowagi;

⁴ Z j. ang. *attract* oznacza *przyciągać*.

- orbity okresowe;
- orbity quasi-okresowe;
- dziwne atraktory.

Atraktor nazywamy *dziwnym*, jeżeli [15, 16]:

- ma on złożoną strukturę geometryczną;
- jest generowany przez układ dynamiczny wrażliwy na zmiany warunków początkowych.

Miarą „skomplikowanej” (dziwnej, fraktalnej) struktury geometrycznej takiego atraktora, zanurzonego w pewnej przestrzeni fazowej, jest jego wymiar, który jest zawsze mniejszy od wymiaru rozpatrywanej przestrzeni. Ma to związek z kurczeniem się objętości fazowej układu dysypatywnego.

Miarą wrażliwości na warunki początkowe są dodatnie wartości tzw. wykładników Lapunowa. W ewolucji układu charakteryzują one wykładnicze tempo zbliżania się lub oddalania dwóch jego trajektorii, które w chwili początkowej były dowolnie blisko siebie.

Niech $x_i(t)$, $\tilde{x}_i(t)$ oznaczają i -te składowe wektorów stanu $\mathbf{x}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ układu (1), które w chwili początkowej przyjmowały wartości $x_i(t_0)$, $\tilde{x}_i(t_0)$. Jeżeli $\lambda_i \in \mathbb{R}$ jest taką liczbą, że

$$\rho_i(t) = \lim_{\rho_i(t_0) \rightarrow 0} \rho_i(t_0) e^{\lambda_i t},$$

gdzie $\rho_i(t) := d(x_i(t), \tilde{x}_i(t))$, to

$$\lambda_i := \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\rho_i(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\rho_i(t)}{\rho_i(t_0)}$$

nazywamy *wykładnikiem Lapunowa* układu (1) względem i -tej osi przestrzeni fazowej Z atraktorem zanurzonym w przestrzeni \mathbb{R}^n związanych jest n wykładników Lapunowa, które możemy przedstawić w sposób uporządkowany

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

tworząc tzw. *spektrum Lapunowa*.

Dla małej objętości fazowej mamy

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{V}(0) e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i t}. \quad (4)$$

Na podstawie (3) i (4) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Zatem dla układu dysypatywnego suma wykładników Lapunowa jest zawsze ujemna. Ponadto, jeżeli w spektrum Lapunowa występuje co najmniej jeden wykładnik dodatni, to pobliskie trajektorie układu rozbiegają się w miarę upływu czasu.

Deterministyczny autonomiczny układ dynamiczny (1) nazywamy *chaotycznym*, jeżeli ma dziwny atraktor.

Z twierdzenia Poincarego-Bendixsona [9] wynika, że układ (1) może być chaotyczny tylko w przypadku, gdy jego dynamikę będą opisywały co najmniej trzy równania różniczkowe (tzn., gdy $n \geq 3$), z których co najmniej jedno jest nieliniowe. Jeżeli dysypatywny układ (1) jest chaotyczny, to jego spektrum Lapunowa ma postać: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$.

Chaos deterministyczny został po raz pierwszy dostrzeżony w 1963 roku przez meteorologa i matematyka amerykańskiego Edwarda Lorenza w uproszczonym modelu przewodzenia ciepła w atmosferze. Otrzymany przez niego atraktor nazywamy dzisiaj *atraktorem* lub *motylem Lorenza*.

ZAGADNIENIE REKONSTRUKCJI

Załóżmy, że model matematyczny układu dynamicznego nie jest znany. Dysponujemy natomiast pomiarami jednej składowej $x_j(t)$ wektora stanu $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ tego układu. W tym momencie pojawia się naturalne pytanie:

Czy możliwa jest rekonstrukcja trajektorii atraktora na podstawie szeregu czasowego

$$s[i] := x_j(t_0 + i\Delta t), \quad i \in \overline{0, N}^5 \quad (5)$$

(w stanie ustalonym, czyli po wygaśnięciu efektów przejściowych)?

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. W 1980 roku fizyk amerykański Norman H. Packard wraz z kolegami J. P. Crutchfieldem, J. D. Farmerem i R. S. Shawem zauważyli [14], że na szereg czasowy (5) mają wpływ prawie wszystkie zmienne stanu układu (1) i liczby te muszą się zachowywać zgodnie z jakąś ukrytą regułą.

Rozwinięta już dzisiaj idea Packarda polega na tym, że nie znając wymiaru przestrzeni fazowej \mathbb{R}^n , zanurza się poszukiwany atraktor w przestrzeni \mathbb{R}^m metodą *opóźnienia czasowego* $\tau = \ell \Delta t, \ell \in \mathbb{N}$, tworząc $m - 1$ *falszywych obserwabli* układu według następującego schematu:

⁵ $\overline{0, N} := \{0, 1, \dots, N\}$.

$$\left. \begin{array}{c|c|c|c|c} s[0] & s[1] & s[2] & s[3] & \dots \\ s[\tau] & s[1+\tau] & s[2+\tau] & s[3+\tau] & \dots \\ s[2\tau] & s[1+2\tau] & s[2+2\tau] & s[3+2\tau] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{szereg czasowy (5)} \\ \text{fałszywe} \\ \text{observable} \end{array}$$

Wyznaczają one tzw. *m*-historie lub *współrzędne stroboskopowe* punktów

$$\mathbf{Y}_i = (s[i], s[i+\tau], s[i+2\tau], \dots, s[i+(m-1)\tau]) \in \mathbb{R}^m$$

należących do zrekonstruowanego atraktora \mathbb{A}_r , tzn.

$$\{\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\} \subset \mathbb{A}_r,$$

gdzie $k := N - (m-1)\tau$ (jeżeli $N \rightarrow \infty$, to punkty te wypełniają cały atraktor \mathbb{A}_r).

W 1980 roku matematyk holenderski Floris Takens sformułował i udowodnił tzw. *twierdzenie o zanurzeniu* [19], z którego wynika uzasadnienie konstrukcji Pacarda. Mianowicie, jeżeli $m \geq 2n + 1$, to

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}_r \iff \bigvee_{\text{dyfeomorfizm } h} \mathbb{A} \xrightleftharpoons[h^{-1}]{h} \mathbb{A}_r.$$

Zanurzenie h przekształca homeomorficznie oryginalną przestrzeń fazową \mathbb{R}^n w przestrzeń \mathbb{R}^m . Zatem atraktory \mathbb{A} i \mathbb{A}_r są topologicznie równoważne. Oryginalny atraktor \mathbb{A} może być ściskany, rozciągany, wyginany lub skręcany z zachowaniem jego gładkości, ponieważ h jest odwzorowaniem różniczkowalnym z różniczkowalną odwrotnością. W zrekonstruowanym atraktorze \mathbb{A}_r zachowane zostają topologiczne własności atraktora \mathbb{A} , czyli jego wymiar, entropia itp., natomiast geometrycznie \mathbb{A}_r może ulec zniekształceniu. Niezmiennikami są również własności dynamiczne atraktora, np. własność nieprzecinania się trajektorii startujących z różnych punktów basenu przyciągania czy też wartości liczbowe wykładników Lapunowa.

Twierdzenie Takensa wymaga, aby $N \rightarrow \infty$. W praktyce dane eksperymentalne nie spełniają tego warunku. Stąd też ważny jest właściwy dobór podstawowych parametrów metody Pacarda, jakimi są opóźnienie czasowe τ i wymiar zanurzenia m . O skuteczności i jakości rekonstrukcji decydują optymalne wartości tych wskaźników.

Jeżeli τ jest zbyt małe, to $s[i] \approx s[i+\tau]$. Wówczas punkty $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{A}_r$ stają się liniowo zależne i leżą blisko przekątnej przestrzeni \mathbb{R}^m , co wskazuje na bezużyteczność rekonstrukcji. Z kolei jeżeli τ jest za duże, to współrzędne punktów \mathbf{Y}_i stają się nieskorelowane i związki przyczynowe między nimi ulegają zatraceniu, co w efekcie prowadzi do zniekształcenia zrekonstruowanego atraktora.

W 1985 roku fizycy amerykańscy Andrew Fraser i Harry Swinney, wprowadzając dyskretne zmienne losowe S_τ o wartościach $s[i + \tau]$, rozważali *funkcję średniej informacji wzajemnej* między S_0 i S_τ

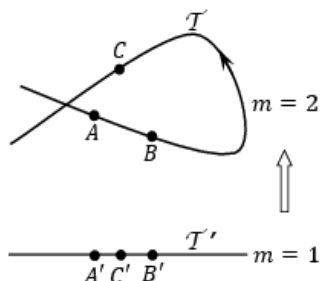
$$\text{AMI}(\tau) := \sum_i P(S_0 = s[i], S_\tau = s[i + \tau]) \log_2 \frac{P(S_0 = s[i], S_\tau = s[i + \tau])}{P(S_0 = s[i])P(S_\tau = s[i + \tau])}, \quad (6)$$

która określa ilość informacji o S_0 , jaką uzyskujemy, obserwując S_τ [7]. Ich badania sugerują optymalne opóźnienie czasowe, zapewniające niezależność współrzędnych punktów \mathbf{Y}_i jako tę liczbę τ^* , dla której funkcja (6) przyjmuje pierwsze minimum lokalne.

Warunek Takensa $m \geq 2n + 1$ nie jest warunkiem koniecznym całkowitego wyeksponowania atraktora \mathbb{A}_r w przestrzeni \mathbb{R}^m . Jeżeli badany szereg czasowy $\{s[i]\}$ jest dostatecznie długi, to do prawidłowego rozwinięcia atraktora często wystarczy niższy wymiar zanurzenia m^6 . Dla takiego przypadku opracowano dwie metody jego ustalania:

- fałszywych najbliższych sąsiadów;
- stabilizacji wymiaru korelacyjnego.

W 1991 roku fizyk amerykański Matthew B. Kennel wraz z R. Brownem oraz H. D. J. Abarbanelem wykorzystali ideę fałszywych najbliższych sąsiadów, badając ich zachowanie na trajektorii rekonstruowanego atraktora przy przejściu z wymiaru zanurzenia m do $m + 1$ [10]. Istotę tego pojęcia wyjaśnia rysunek 1. Odcinek \mathcal{T}' jest tam rzutem ortogonalnym trajektorii $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ na przestrzeń \mathbb{R}^1 . Punkt C' jest fałszywym najbliższym sąsiadem punktów A' i B' na odcinku \mathcal{T}' , ponieważ punkt C nie jest bliskim sąsiadem punktów A i B na trajektorii \mathcal{T} .



Rys. 1. C' jako fałszywy najbliższy sąsiad punktów A' i B'

Źródło: opracowanie własne.

⁶ W pracy [1] podano warunek wystarczający postaci $m > D$, gdzie D jest jednym z wymiarów atraktora.

Niech $\mathbf{Y}_i^{m+1}, \mathbf{Y}_j^{m+1}$ będą dwoma różnymi punktami atraktora \mathbb{A}_r zanurzonego w przestrzeni \mathbb{R}^{m+1} , natomiast $\mathbf{Y}_i^m, \mathbf{Y}_j^m$ ich rzutami ortogonalnymi na przestrzeń \mathbb{R}^m . W metodzie najbliższych sąsiadów, dla opóźnienia czasowego τ^* , oblicza się

$$d_{\tau^*, m} := \left[\frac{d^2(\mathbf{Y}_i^{m+1}, \mathbf{Y}_j^{m+1}) - d^2(\mathbf{Y}_i^m, \mathbf{Y}_j^m)}{d^2(\mathbf{Y}_i^m, \mathbf{Y}_j^m)} \right]^{1/2} = \frac{|s[i + m\tau^*] - s[j + m\tau^*]|}{d(\mathbf{Y}_i^m, \mathbf{Y}_j^m)}.$$

Jeżeli $d_{\tau^*, m}$ przekracza pewien ustalony poziom, to uznaje się, że punkt \mathbf{Y}_j^m jest *falszywym najbliższym sąsiadem* punktu \mathbf{Y}_i^m . Jako wymiar zanurzenia $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ należy przyjąć ten parametr m^* , dla którego liczba fałszywych najbliższych sąsiadów jest najmniejsza.

Druga metoda ustalania wymiaru zanurzenia opracowana została w 1982 roku przez fizyka niemieckiego Petera Grassbergera i chemika izraelskiego Itamara Procaccię, którzy w tym celu wprowadzili pojęcia całki korelacyjnej i wymiaru korelacyjnego atraktora [8].

Całką korelacyjną $C(\varepsilon)$ nazywamy prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana para punktów atraktora znajduje się w odległości mniejszej od ε . Zakładając, że w punkcie $\varepsilon = 0$ jest ono asymptotycznie równe objętości ε^{D_2} hiperkostki o krawędzi ε , gdzie D_2 jest *wymiarem korelacyjnym* atraktora, możemy napisać

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon^{D_2}} = 1, \quad \text{czyli } C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_2}, \quad \text{gdy } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Całka korelacyjna może być aproksymowana *sumą korelacyjną*

$$C_k(\tau^*, m, \varepsilon) = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k H(\varepsilon - d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j))}{\binom{k}{2}},$$

gdzie $H(\cdot)$ jest funkcją jednostkową Heaviside'a⁷. Mamy wówczas

$$C(\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k(\tau^*, m, \varepsilon).$$

Stąd, na podstawie (7), otrzymujemy wzór na wymiar korelacyjny atraktora

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log C_k(\tau^*, m, \varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

⁷ $H(x) := \{1 : x \geq 0; 0 : x < 0\}$.

Algorytm Grassbergera-Procaccii polega na tym, że dla danego (niskiego) m oblicza się D_2 . Następnie zwiększa się o jeden wymiar zanurzenia i ponownie oblicza D_2 , itd. Minimalnym wymiarem zanurzenia jest liczba m^* , powyżej której wymiar korelacyjny już się praktycznie nie zmienia. Z praktyki wynika jednak, że w wielu przypadkach podany algorytm jest mało dokładny. Często bowiem wymiar zanurzenia, gwarantujący prawidłowe „rozprostowanie” się atraktora, jest nadal niższy od wymiaru wyznaczonego za pomocą tego algorytmu.

REKONSTRUKCJA MONARCHY SAFYE

W 1997 roku ekonomista tunezyjski Safieddine Bouali modelując cykle ekonomiczne, rozważał następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky + \mu x(a - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + bz \\ \frac{dz}{dt} = px - qy \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)^8$$

o rzeczywistych i dodatnich współczynnikach (k, μ, a, b, p, q) [4].

W szczególności zauważył, że parametry $(0.02, 0.4, 0.2, b, 10, 0.1)$ generują chaos deterministyczny dla dowolnego $b > 0$. Mimo że warunek dysypatywności

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 0.4(0.2 - y^2) < 0$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $|y| > \sqrt{0.2} \approx 0.447$, wartości największego wykładnika Lapunowa (NWL) są dodatnie dla każdego parametru $b > 0$ (rys. 2.).

W dalszym ciągu rozważać będziemy przypadek, gdy $b = 35$. Wówczas trajektoria układu

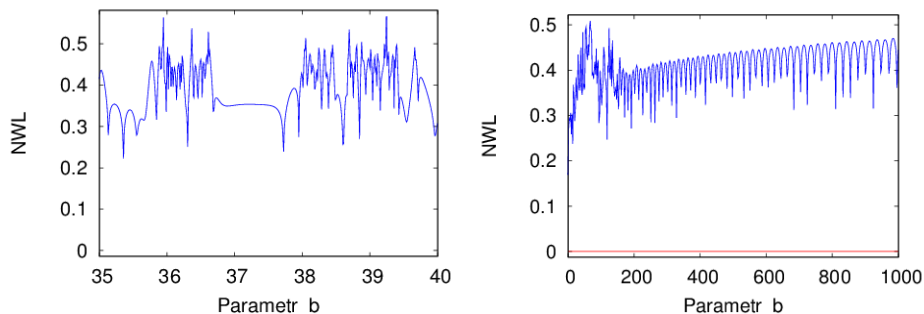
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.02y + 0.4x(0.2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + 35z \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 0.1y \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

⁸ Jeżeli $t \in \mathbb{R}_+$, to mówimy o układzie *semidynamicznym*.

mająca swój początek w punkcie

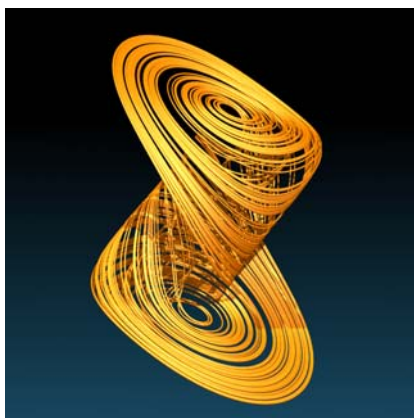
$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0.01, 0), \quad (9)$$

z upływem czasu wypełnia dziwny atraktor, który nazywamy *Monarchą Safye* [22] (rys. 3.).



Rys. 2. NWL w zależności od wartości parametru b

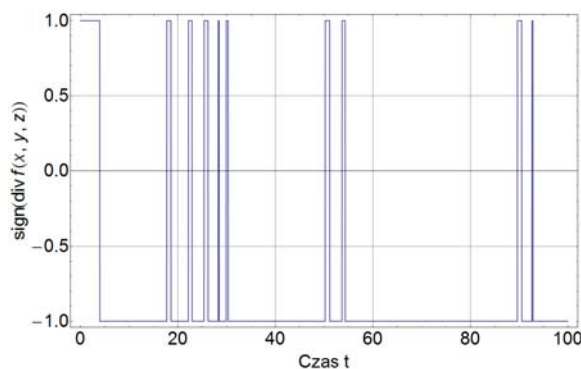
Źródło: obliczenia NWL i wykresy wykonano za pomocą programu *E&F Chaos* dostępnego na: <http://www1.fee.uva.nl/cendef/whoiswho/makehp/page.asp?iID=19>.



Rys. 3. Dziwny atraktor *Monarcha Safye*

Źródło: S. Bouali, J. Leys, *Sculptures du chaos — Images des Mathématiques*, CNRS, 2010, <http://images.math.cnrs.fr/Sculptures-du-chaos.html>.

Rysunek 4. przedstawia zmianę znaku $\text{div } \mathbf{f}(x)$ w czasie t , gdzie $x = (x, y, z)$ jest rozwiązaniem układu (8), (9). Jest to układ niezachowawczy, który nie jest globalnie dysypatywny. W krótkich przedziałach czasowych staje się układem samowzbudnym, próbującym odzyskiwać energię.

Rys. 4. Wykres funkcji $\text{sign}[\text{div } \mathbf{f}[x(t), y(t), z(t)]]$

Źródło: opracowanie własne.

Szeregi czasowe odpowiadające układowi (8), (9) uzyskamy, rozwiązując go numerycznie za pomocą programu *Mathematica*. Stosując polecenie

```
NDSolve[{x'[t] == 0.02 y[t] + 0.4 x[t] (0.2 - y[t]^2),
y'[t] == -x[t] + 35 z[t], z'[t] == 10 x[t] - 0.1 y[t], x[0] == 0,
y[0] == 0.01, z[0] == 0}, {x, y, z}, {t, 1000},
MaxSteps -> Infinity, AccuracyGoal -> 12, PrecisionGoal -> 30]
```

otrzymujemy trzy funkcje interpolacyjne $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ przedstawiające rozwiązanie w przedziale $[0, 1000]$. Na rysunku 5. zamieszczono przebiegi tych sygnałów w oknie czasowym $[0, 150]$. Z kolei rysunek 6. zawiera przebieg trajektorii $\mathcal{T}(x(0))$ atraktora \mathbb{A} układu (8), (9) w przestrzeni fazowej $\{x, y, z\}$, gdy $t \in [0, 400]$. Rysunek 7. przedstawia jej rzuty odpowiednio w płaszczyznach $\{y, x\}$, $\{y, z\}$ i $\{z, x\}$, gdy $t \in [0, 1000]$.

Do rekonstrukcji użyjemy szeregów czasowych liczących po 20 001 próbek wygenerowanych ze składowych $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ otrzymanego rozwiązania, przyjmując okres próbkowania $\Delta t = 0.05$, tzn.

$$x[i] = x(0.05 i), \quad y[i] = y(0.05 i), \quad z[i] = z(0.05 i), \quad i \in \overline{0, 20000}. \quad (10)$$

Przeszukując światowe zasoby Internetu, możemy bez trudu uzyskać adresy darmowego lub komercyjnego oprogramowania do rekonstrukcji atraktorów metodą Pacarda. W istocie rzeczy chodzi o optymalny dobór parametrów τ i m . Pod tym względem na szczególną uwagę zasługują następujące programy: *Auguri*⁹, *Dataplore*¹⁰, *Nonlinear Dynamics Toolbox (NDT)*¹¹, *Nonlinear Time Series Analysis (TISEAN)*¹² oraz *Visual Recurrence Analysis (VRA)*¹³. Wersja niekomercyjna *VRA* jest rozbudowanym

⁹ <http://aag-auguri.com>.

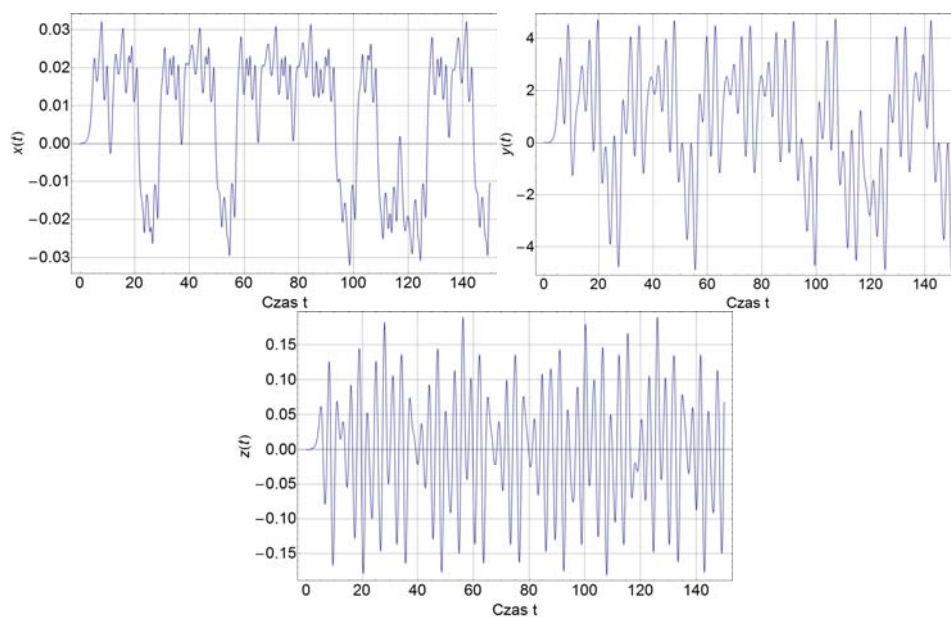
¹⁰ <http://www.ixellence.com/>.

¹¹ <http://www.physics.gatech.edu/chaos/research/NDT.html>.

¹² <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/>.

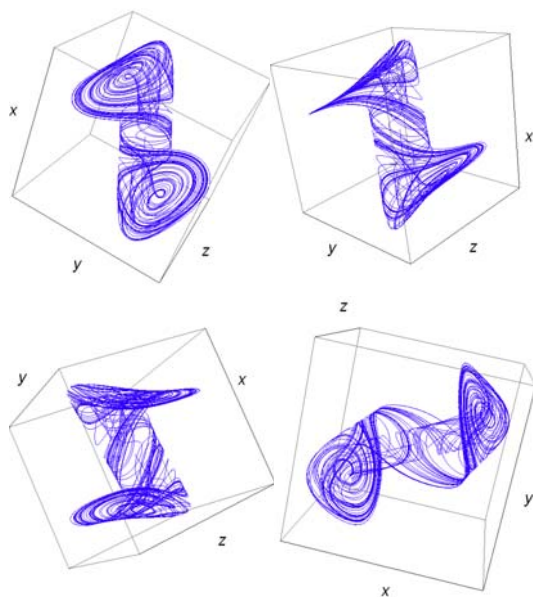
¹³ <http://nonlinear.110mb.com/vra/>.

i jednocześnie prostym w użyciu narzędziem do nieliniowej analizy szeregów czasowych. Jako program darmowy zostanie wykorzystana w tej pracy.



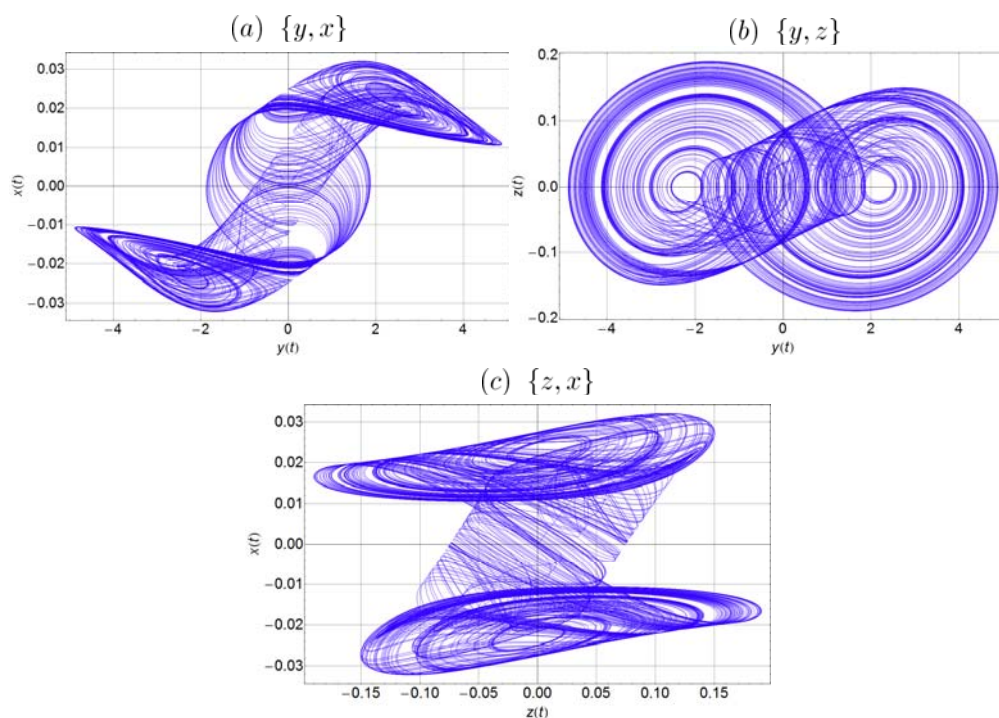
Rys. 5. Składowe rozwiązania układu (8), (9) w przedziale $[0, 150]$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. *Monarcha Słafy* w przestrzeni fazowej $\{x, y, z\}$ jako numeryczne rozwiązanie układu (8), (9), gdy $t \in [0, 400]$

Źródło: opracowanie własne.

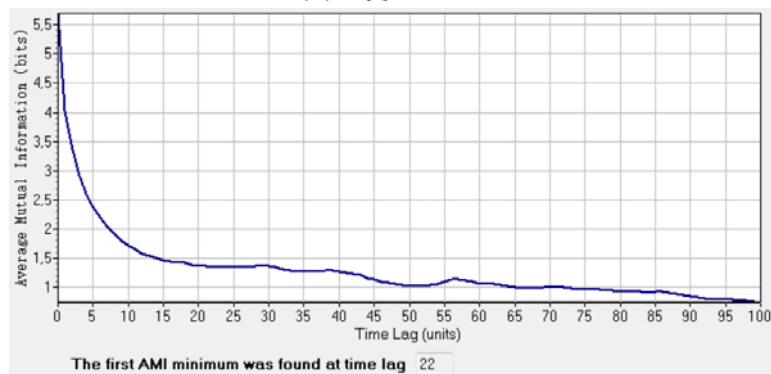


Rys. 7. *Monarcha Safye* w przestrzeniach fazowych $\{y, x\}$, $\{y, z\}$, $\{z, x\}$ jako numeryczne rozwiązanie układu (8), (9), gdy $t \in [0, 1000]$

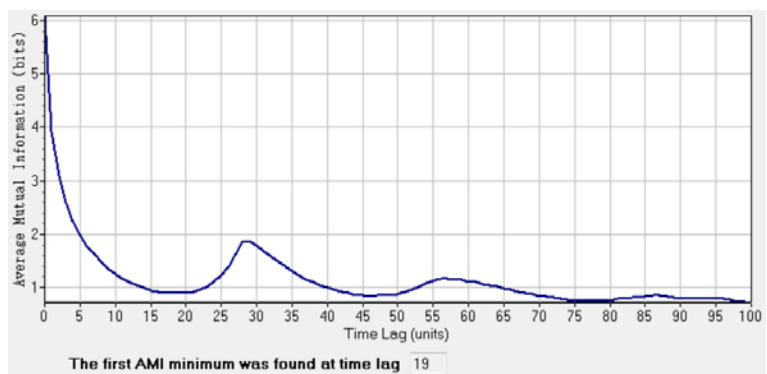
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 8. przedstawia wyniki zastosowania programu *VRA* do ustalenia optymalnego opóźnienia τ^* dla szeregów czasowych (10) metodą wyznaczania pierwszego minimum funkcji $AMI(\tau)$. Opóźnienia te wynoszą odpowiednio 22, 19 oraz 16. Z kolei rysunek 9. zawiera graficzną interpretację liczby fałszywych najbliższych sąsiadów, wyrażoną w procentach, w zależności od wymiaru zanurzenia. Wynika stąd, że optymalny wymiar zanurzenia m^* dla każdego z szeregów (10) wynosi 3 i jest równy wymiarowi przestrzeni fazowej, w której rzeczywiście jest zanurzony atraktor *Monarcha Safye*. Jak wspomniano wcześniej, wyznaczanie wymiaru zanurzenia metodą stabilizacji wymiaru korelacyjnego jest często niedokładne. Idea ta może być jednak sprawdzianem właściwego doboru opóźnienia czasowego. Ponieważ tylko w tym przypadku, jeżeli rozważany układ jest deterministyczny, następuje ustalanie się wymiaru korelacyjnego wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Rysunek 10. potwierdza tę własność.

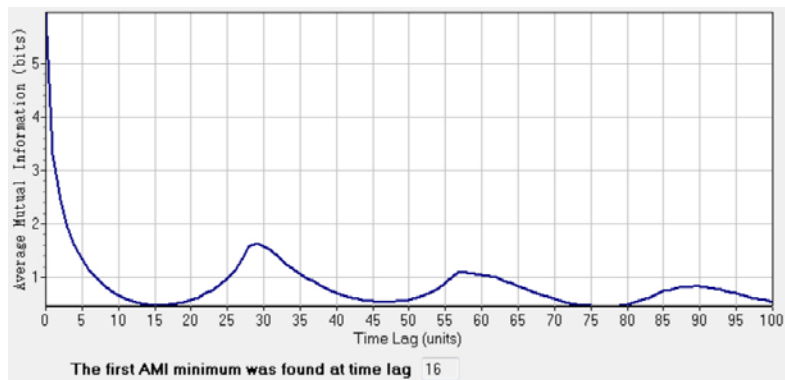
(a) $x[i] : \tau^* = 22$



(b) $y[i] : \tau^* = 19$

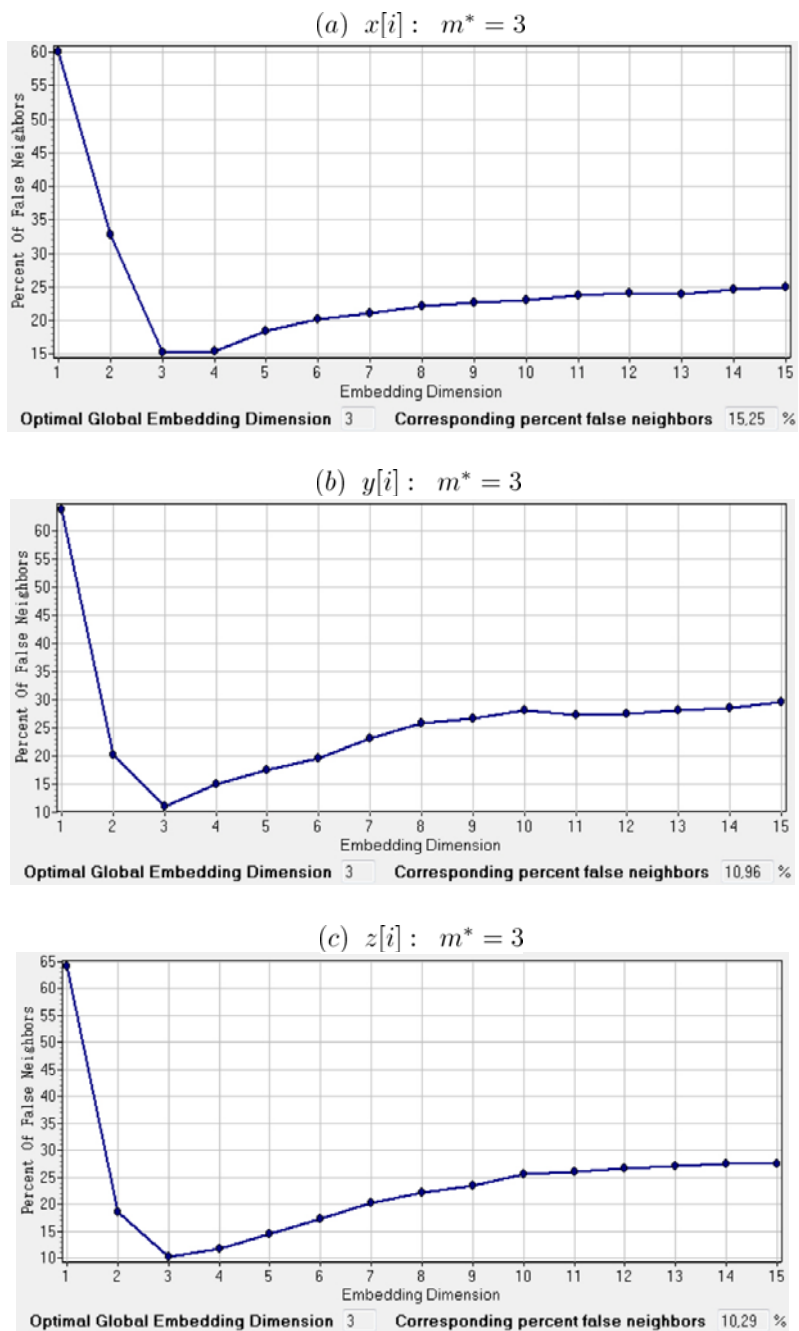


(c) $z[i] : \tau^* = 16$



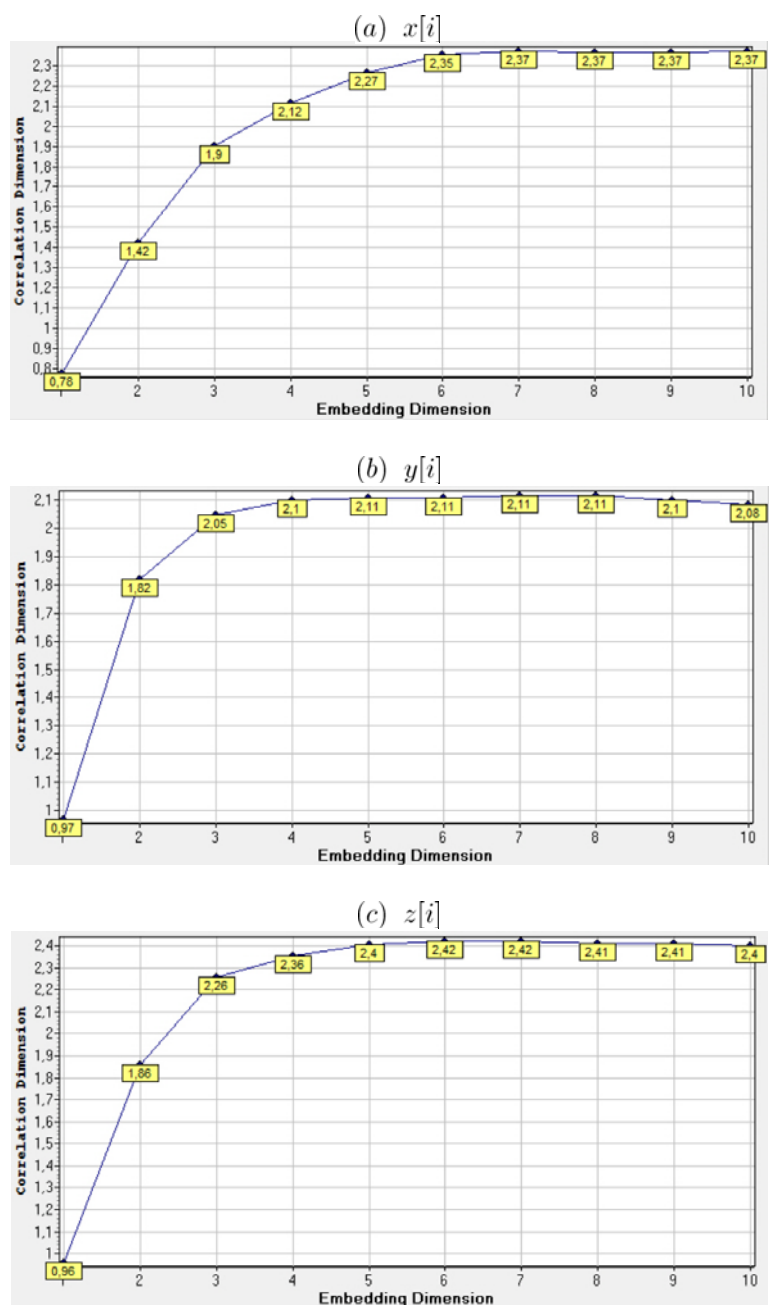
Rys. 8. Optymalne opóźnienia czasowe dla szeregów (10)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Optymalne wymiary zanurzenia dla szeregów (10)

Źródło: opracowanie własne.

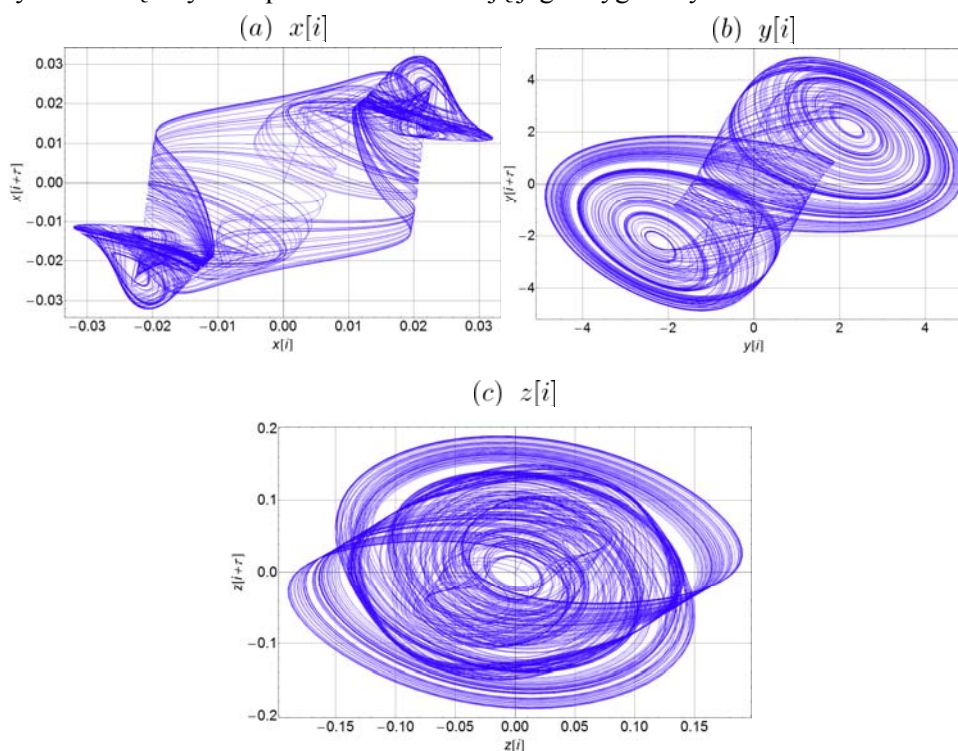


Rys. 10. Stabilizacja wymiaru korelacyjnego dla szeregów (10)

Źródło: opracowanie własne.

Kolejne rysunki przedstawiają efekty rekonstrukcji *Monarchy Safye* w przestrzeniach \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 . Zostały one wykonane w programie *Mathematica*. Dostrzegamy tutaj pewne podobieństwo między uzyskanymi obrazami (a) i (b), zamieszczonymi na rysunku 11., a rzutami atraktora *Monarchy Safye* na przestrzenie fazowe $\{y, x\}$ oraz $\{y, z\}$ (rys. 7a, b). Podobieństwo to widoczne jest również w zestawieniu rysunków 12–14 z rysunkiem 6¹⁴.

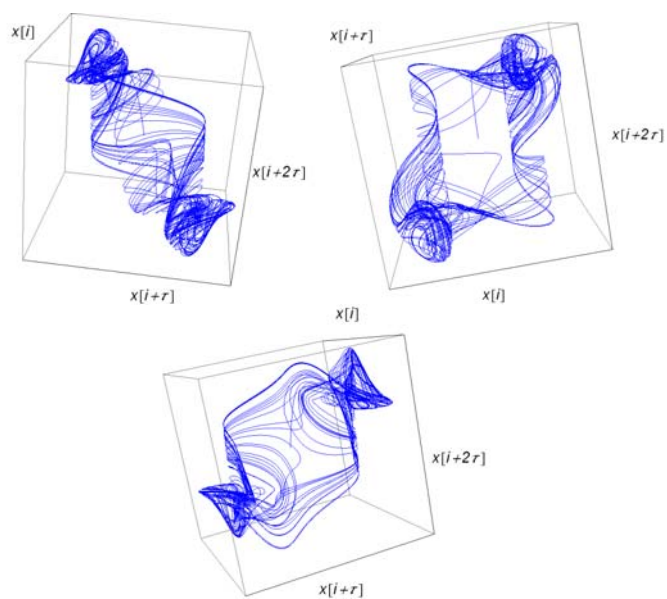
Z przeprowadzonych rekonstrukcji wynika, że pewne składowe wektora stanu układu dynamicznego generują szeregi czasowe bardziej „podatne” na homeomorficzne działania ściskania, rozciągania, wyginania i skręcania, a inne mniej. W efekcie otrzymujemy obrazy komputerowe zrekonstruowanego atraktora, które w mniejszym lub większym stopniu odzwierciedlają jego oryginalny kształt.



Rys. 11. Dwuwymiarowa rekonstrukcja *Monarchy Safye* na podstawie szeregów czasowych (10)

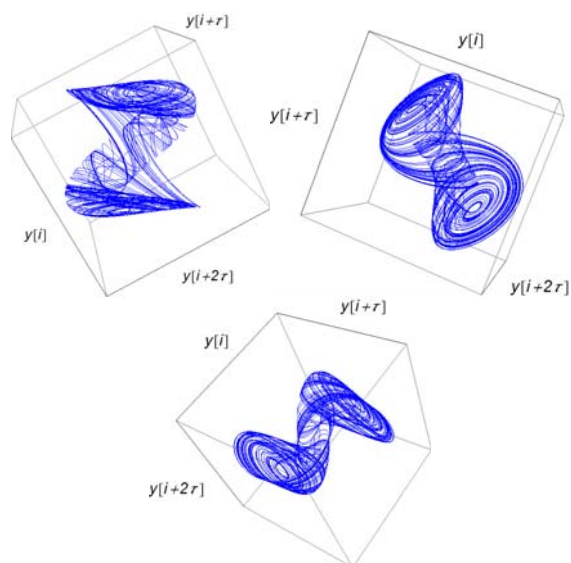
Źródło: opracowanie własne.

¹⁴ Z uwagi na niewielkie rozmiary rysunków w celu zwiększenia ich czytelności, zrekonstruowane trajektorie zawierają „tylko” 10 000 punktów.



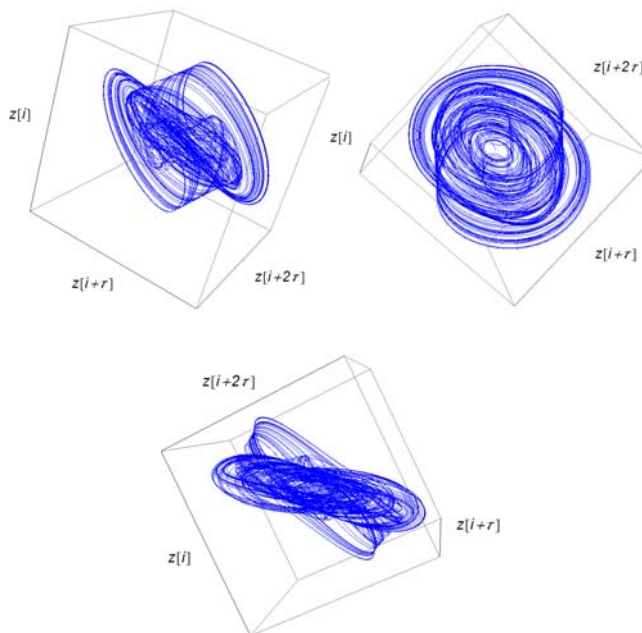
Rys. 12. Trójwymiarowa rekonstrukcja *Monarchy Safye* na podstawie szeregu czasowego $\{x[i]\}$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13. Trójwymiarowa rekonstrukcja *Monarchy Safye* na podstawie szeregu czasowego $\{y[i]\}$

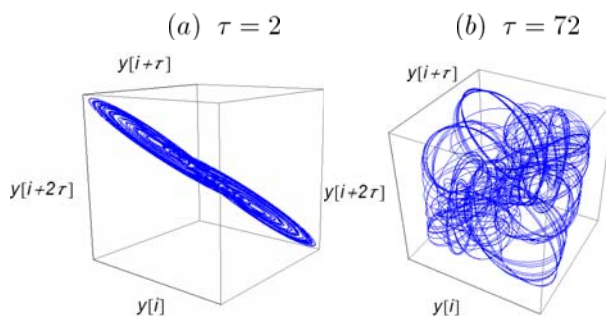
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 14. Trójwymiarowa rekonstrukcja *Monarchy Safye* na podstawie szeregu czasowego $\{z[i]\}$

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 15. przedstawiono efekty rekonstrukcji *Monarchy Safye* w przestrzeni \mathbb{R}^3 na podstawie szeregu czasowego $\{y[i]\}$ w przypadku nieprawidłowo dobranego opóźnienia czasowego. Zarówno za małe, jak i za duże τ powoduje, że rekonstrukcja staje się beużyteczna.



Rys. 15. Trójwymiarowa rekonstrukcja *Monarchy Safye* na podstawie szeregu czasowego $\{y[i]\}$ w przypadku źle dobranego opóźnienia czasowego

Źródło: opracowanie własne.

ZAKOŃCZENIE

Rekonstrukcja atraktora ma zastosowanie głównie do tych szeregów czasowych, które „podejrzewamy”, że ukrywają w sobie chaotyczną dynamikę. Tego typu zachowanie możemy zaobserwować między innymi w laserach (równania Maxwella-Plancka), niektórych reakcjach chemicznych (równania kinetyczne), dynamice płynów, dynamice trzęsień ziemi, sygnałach EKG (elektrokardiograficznych), sygnałach EEG (elektroencefalograficznych) oraz modelach ekonometrycznych. Pozostaje ona w ścisłym związku z tzw. *analizą rekurencyjną* [12] bazującą na ocenie odległości między punktami $\mathbf{Y}_i, i \in \overline{1, k}$ trajektorii zrekonstruowanego atraktora \mathbb{A}_r .

Mówimy, że para punktów $(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \in \mathbb{A}_r \times \mathbb{A}_r$ tworzy *rekurencję* (por. [17]), co zapisujemy $\mathbf{Y}_i \approx \mathbf{Y}_j$, wtedy i tylko wtedy gdy

$$d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) < \varepsilon \iff \varepsilon - d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) > 0, \quad (11)$$

gdzie ε jest zadany *progiem* wspomnianej odległości (*parametrem odcięcia*)¹⁵. Idea analizy rekurencyjnej nawiązuje do ewolucji układu zachowawczego, którą cechuje powtarzalność. Z twierdzenia Poincarego o powracaniu [2] wynika bowiem, że po pewnym czasie punkt bieżący trajektorii takiego układu powraca w pobliże prawie każdego stanu początkowego. Oznacza to, że z upływem czasu na trajektorii atraktora znajdują się punkty tworzące rekurencje, czyli będące dostatecznie blisko siebie.

Z relacją rekurencji związana jest macierz kwadratowa $\mathbf{R}_\varepsilon = [R_{ij}(\varepsilon)]_{k \times k}$ o elementach

$$R_{ij}(\varepsilon) := H(\varepsilon - d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mathbf{Y}_i \approx \mathbf{Y}_j \\ 0 & \text{dla } \mathbf{Y}_i \not\approx \mathbf{Y}_j \end{cases}, \quad i, j \in \overline{1, k},$$

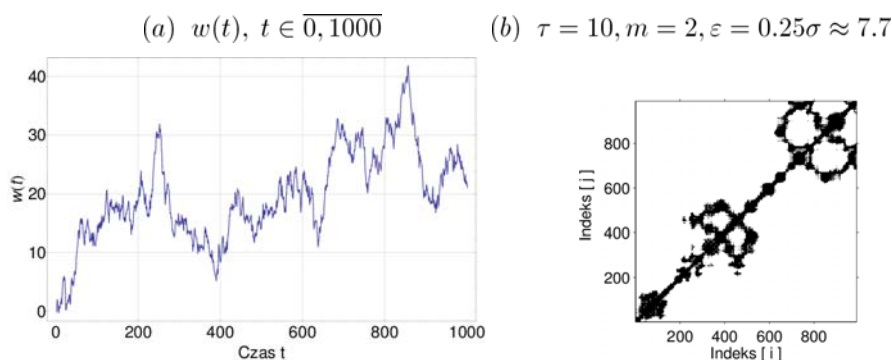
którą nazywamy *macierzą rekurencyjną*. Podstawą analizy rekurencyjnej jest diagram (wykres) rekurencyjny, który w dalszej kolejności poddawany jest analizie ilościowej. *Diagram rekurencyjny* jest uporządkowaną tablicą czarnych i białych punktów, która powstaje z macierzy \mathbf{R}_ε w ten sposób, że 1 zastępujemy czarnym pikselem, natomiast 0 — białym. Utworzona tekstura jest swojego rodzaju „zdjęciem rentgenowskim” badanego szeregu czasowego ujawniającym mniejsze struktury pojedynczych punktów i linii, które mogą być diagonalne, wertykalne lub horyzontalne. Jej analiza typologiczna odzwierciedla dynamikę układu, z którym ten szereg jest związany.

¹⁵ Zasady doboru parametru ε opisano m.in. w [12].

Rysunek 16. przedstawia realizację procesu niestacjonarnego, jakim jest błądzenie przypadkowe z dryfem

$$w(t+1) = 0.05 + w(t) + u_t, \quad u_t \sim \mathcal{N}(0, 1), w(0) = 0 \quad (12)$$

oraz diagram rekurencyjny tej realizacji. Koncentracja otrzymanej struktury wzdłuż głównej przekątnej świadczy o niestacjonarności szeregu $\{w(t)\}_{t=0}^{1000}$.



Rys. 16. Przykładowa realizacja błądzenia przypadkowego z dryfem (12) i jej diagram rekurencyjny

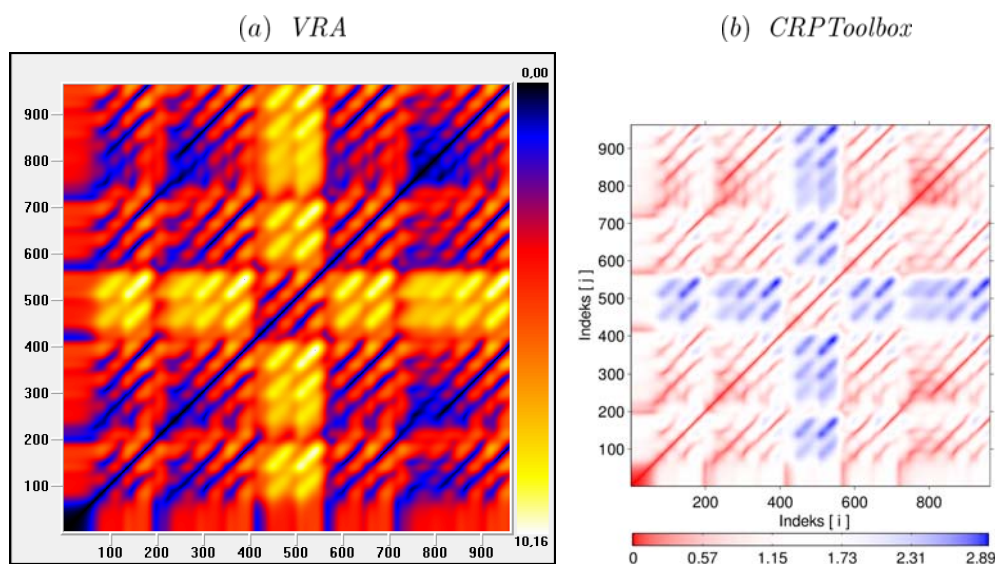
Źródło: opracowanie własne.

Bardziej zaawansowane diagramy rekurencyjne są wielobarwne. W tym przypadku odległościom $d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)$ przyporządkowane są odpowiednie barwy z przyjętej palety kolorów. Mówimy wówczas o tzw. *diagramach odległości* [12].

Na rysunku 17. zamieszczono takie diagramy dla szeregu czasowego $\{y[i]\}_{i=0}^{1000}$ generującego atraktor *Monarchę Safye*. Liczne, lecz krótkie linie równoległe do głównej diagonal, tworzące tekstury w postaci wąskich pasów, potwierdzają deterministyczną i chaotyczną naturę tego szeregu. Diagram z rysunku 17a wykonano, stosując opisany wcześniej program *VRA*. Diagram z rysunku 17b (oraz diagram 16b) otrzymano za pomocą *Cross Recurrence Plot Toolbox (CRP Toolbox)*¹⁶. Istnieje również okrojona wersja online tego programu dostępna na stronie internetowej <http://www.recurrence-plot.tk/online/>. Analizę rekurencyjną szeregów czasowych można także przeprowadzić, korzystając ze wspomnianych już programów *Auguri*, *Dataplore*, *NDT* oraz za pomocą *Recurrence Quantification Analysis Software (RQA)*¹⁷.

¹⁶ <http://www.agnld.uni-potsdam.de/~marwan/toolbox/>.

¹⁷ <http://homepages.luc.edu/~cwebber/>.



Rys. 17. Diagram rekurencyjny szeregu czasowego $y[i]$, $i \in \overline{0, 1000}$ *Monarchy Safye* dla $\tau = 19$, $m = 3$

Źródło: opracowanie własne.

Stosując ilościową analizę rekurencyjną, otrzymanemu diagramowi rekurencyjnemu przypisujemy pewne parametry liczbowe (np. współczynnik rekurencji, entropię, determinizm, laminarność, dywergencję i trend), na podstawie których możemy wnioskować o losowej bądź deterministycznej naturze badanego układu, o jego stacjonarności bądź niestacjonarności, o regularności bądź chaotyczności.

Od 1987 roku, kiedy to fizyk szwajcarski Jean-Pierre Eckmann wraz z S. O. Kamphorst i D. Ruellem wprowadzili pojęcie diagramu rekurencyjnego [6], a zwłaszcza od 1992 roku, gdy fizjologowie amerykańscy Joseph P. Zbilut i Charles L. Webber poddali diagramy rekurencyjne analizie ilościowej [21], nieustannie zwiększa się zakres zastosowań analizy rekurencyjnej. Dzisiaj możemy już twierdzić, że wpisała się ona na trwałe do zestawu narzędzi służących do badania szeregów czasowych. Oprócz zagadnień wspomnianych na początku tego punktu, analizę rekurencyjną stosuje się z powodzeniem również w astrofizyce i geofizyce, w fizjologii, genetyce i biologii, w meteorologii, finansach i inżynierii. Od 2005 roku, w dwuletnich odstępach, organizowane są międzynarodowe sympozja dotyczące teorii i zastosowań analizy rekurencyjnej. Istnieje również strona internetowa (<http://www.recurrence-plot.tk/>) poświęcona tym zagadnieniom.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abarbanel H. D. I., Brown R., Kadtke J. B., *Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband Fourier spectra*, 'Physical Review A', 1990, 41, 4, pp. 1782–1807.
- [2] Arnold W. I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1981.
- [3] Baker G. L., Gollub J. P., *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [4] Bouali S., *Feedback loop in extended van der Pol's equation applied to an economic model of cycles*, 'International Journal of Bifurcation and Chaos', 1999, 9, 4, pp. 745–756.
- [5] Bouali S., Leys J., *Sculptures du chaos — Images des Mathématiques*, CNRS, 2010, <http://images.math.cnrs.fr/Sculptures-du-chaos.html>.
- [6] Eckmann J. P., Kamphorst S. O., Ruelle D., *Recurrence plots of dynamical systems*, 'Europhysics Letters', 1987, 4, 9, pp. 973–977.
- [7] Fraser A. M., Swinney H. L., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, 'Physical Review A', 1986, 33, 2, pp. 1134–1140.
- [8] Grassberger P., Procaccia I., *Characterization of strange attractors*, 'Physical Review Letters', 1983, 50, 5, 346–349.
- [9] Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L., *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Series: *Pure and applied mathematics*, Vol. 60, 2ed, Academic Press, New York 2004.
- [10] Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. I., *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, 'Physical Review A', 1992, 45, 6, pp. 3403–3411.
- [11] Kudrewicz J., *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1996.
- [12] Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J., *Recurrence plots for the analysis of complex systems*, 'Physics Reports', 2007, 438, 5–6, pp. 237–329.
- [13] Milnor J., *On the concept of attractor*, 'Communications of Mathematical Physics', 1985, 99, pp. 177–195.
- [14] Pacard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S., *Geometry from a time series*, 'Physical Review Letters', 1980, 45, 9, pp. 712–716.
- [15] Peitigen H. O., Jürgens H., Saupe D., *Fraktale — Granice chaosu, cz. 2*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1996.

- [16] Schuster H. G., *Chaos deterministyczny*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- [17] Schreiber T., *Interdisciplinary application of nonlinear time series methods*, 'Physics Reports', 1999, 308, 2, pp. 1–64.
- [18] Stewart I., *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1996.
- [19] Takens F., *Detecting strange attractors in turbulence*, [in:] D. Rand, L. S. Young (eds.), *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980; 'Lecture Notes in Mathematics', 1981, 898, pp. 366–381.
- [20] Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne — Elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*, „Prace Naukowe”, Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego, Katowice 1996.
- [21] Zbilut J. P., Webber C. L. Jr., *Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots*, 'Physics Letters A', 1992, 171, 3–4, pp. 199–203.
- [22] <http://www.ams.org/mathimagery/displayimage.php?pid=273>.

RECONSTRUCTION OF THE *MONARCH SAFYE* ATTRACTOR ON THE BASIS OF TIME SERIES

ABSTRACT

The paper describes the problem of attractor reconstruction on the basis of a time series and presents software allowing to specify the reconstruction parameters. The above problem has been applied to reconstruct the *Monarch Safye* attractor on the basis of time series obtained from a numerical solution of a dynamic system describing that attractor. It has also been indicated that there exists a relation between the attractor reconstruction and the recurrence analysis of a time series.

Keywords:

reconstruction, attractor, time series, time delay, embedding dimension, recurrence plot, recurrence quantification analysis.