ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LII NR 3 (186) 2011

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej

MACIERZE FIBONACCIEGO GENEROWANE PRZEZ OPERACJE RÓŻNICOWE

STRESZCZENIE

Na gruncie teorii sterowania ciąg Fibonacciego można traktować jako rozwiązanie dyskretnego układu dynamicznego określonego za pomocą równania stanu i równania wyjścia. Różne operacje różnicowe generują różne macierze stanu takiego układu. W szczególności otrzymujemy macierz odpowiadającą różnicy wstecznej. W pracy omówiono jej zastosowania do wyznaczania pewnych własności ciągu Fibonacciego.

Słowa kluczowe:
liczby, macierze i tożsamości Fibonacciego, operacje różnicowe.

UKŁAD DYNAMICZNY FIBONACCIEGO

Dwustronny ciąg Fibonacciego

$$\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, \mathbf{0}, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

jest jednoznacznie określony za pomocą równania różnicowego

$$f(k) = f(k-1) + f(k-2), \quad k \in \mathbb{Z}^{1} \tag{1}$$

i warunków początkowych

$$f(-1) = 1, f(0) = 0. \tag{2}$$

[1] $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Można wykazać, że wyraz ogólny ciągu $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dany jest *wzorem Bineta*

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\Phi^k - \varphi^k\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

gdzie

$$\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \varphi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ponadto zachodzi zależność

$$f(-k) = (-1)^{k+1} f(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

W dalszej części pracy ciąg $f = \{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ będziemy rozważać jako rozwiązanie autonomicznego i jednorodnego dyskretnego układu dynamicznego o *równaniu stanu*

$$S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

i *równaniu wyjścia*

$$f = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

gdzie $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ jest wektorem o elementach $x_1 = \{x_1(k)\}, x_2 = \{x_2(k)\}$ należących do przestrzeni rzeczywistych nieskończonych ciągów dwustronnych $C(\mathbb{Z})$, natomiast *macierz stanu* $\boldsymbol{F}$ i *macierz wyjścia* $\boldsymbol{C}$ są danymi macierzami liczbowymi odpowiednio o wymiarach 2×2 i 1×2 oraz S jest jedną z następujących operacji różnicowych:

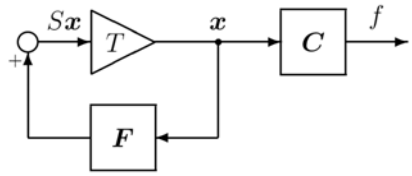
- $S := B$, gdzie $Bx := \{x(k-1)\}$ — przesunięcie w prawo;
- $S := \Delta$, gdzie $\Delta x := \{x(k+1) - x(k)\}$ — różnica progresywna;
- $S := E$, gdzie $Ex := \{x(k+1)\}$ — przesunięcie w lewo;
- $S := \nabla$, gdzie $\nabla x := \{x(k) - x(k-1)\}$ — różnica wsteczna,

gdzie $x = \{x(k)\} \in C(\mathbb{Z})$.

Operacje te generują różne macierze $\boldsymbol{F}$ równania stanu (5). Będziemy je nazywali *macierzami Fibonacciego*, ponieważ ich elementy będą się wyrażały za pomocą odpowiednich wyrazów ciągu $\{f(k)\}$.

Rysunek 1. przedstawia schemat blokowy wspomnianego układu, gdzie T oznacza operację prawą odwrotną do S[2].

[2] Zagadnienia związane z prawymi odwrotnościami do rozważanych w tej pracy operacji różnicowych S są przedmiotem badań analizy algebraicznej [7] i nieklasycznego rachunku operatorów [2, 12, 13].



Rys. 1. Schemat blokowy układu Fibonacciego (5), (6)

Źródło: opracowanie własne.

MACIERZE $\boldsymbol{F}_B$ I $\boldsymbol{F}_\Delta$

Stosując operację przesunięcia B, równanie (1) możemy przedstawić w postaci

$$B^2 f + Bf - f = 0. \tag{7}$$

Wprowadzając tzw. *fazowe zmienne stanu*

$$\begin{aligned} x_1 &= f, \\ x_2 &= Bx_1, \end{aligned}$$

otrzymujemy $Bx_1 = x_2 = Bf$ oraz, na podstawie (7), $Bx_2 = B^2 f = f - Bf = x_1 - x_2$. Mamy więc

$$B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Zatem w tym przypadku macierz stanu i macierz wyjścia są odpowiednio równe

$$\boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aby zastosować różnicę Δ, zamiast (1), (2) należy rozważyć następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{gathered} f(k+2) = f(k+1) + f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ f(0) = 0, f(1) = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Wówczas

$$\Delta^2 f + \Delta f - f = 0.$$

Otrzymane równanie ma postać (7). Zatem przy

$$x_1 = f,$$
$$x_2 = \Delta\, x_1$$

wnioskujemy, że $\boldsymbol{F}_{\Delta} = \boldsymbol{F}_B$ oraz $\boldsymbol{C}_{\Delta} = \boldsymbol{C}_B$.

Historia zastosowań macierzy

$$\boldsymbol{Q} := \boldsymbol{F}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

w związku z liczbami Fibonacciego została opisana w pracy [4]. Między innymi wykazuje się, że

$$\boldsymbol{Q}^k = \begin{bmatrix} f(k+1) & f(k) \\ f(k) & f(k-1) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

skąd wynika *tożsamość Cassiniego* [6]

$$f(k-1)f(k+1) - f^2(k) = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Z (9) i (10) otrzymujemy

$$\boldsymbol{F}_B^k = \begin{bmatrix} f(-k+1) & f(-k) \\ f(-k) & f(-k-1) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W szczególności

$$\boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} f(0) & f(-1) \\ f(-1) & f(-2) \end{bmatrix}.$$

MACIERZ $\boldsymbol{F}_E$

Stosując przesunięcie E, równanie (8) zapisujemy w postaci

$$E^2 f - Ef - f = 0,$$

która przy

$$x_1 = f,$$
$$x_2 = E\, x_1$$

sprowadza się do układu (5), (6), gdzie

$$\boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\boldsymbol{F}_E$ była rozważana między innymi w pracach [6, 8, 9]. Stosując indukcję, można wykazać, że

$$\boldsymbol{F}_E^k = \begin{bmatrix} f(k-1) & f(k) \\ f(k) & f(k+1) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

skąd wynika

$$\boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} f(0) & f(1) \\ f(1) & f(2) \end{bmatrix}.$$

MACIERZ $\boldsymbol{F}_\nabla$

Po zastosowaniu różnicy ∇ równanie (1) przyjmuje postać

$$\nabla^2 f - 3\nabla f + f = 0,$$

skąd wnioskujemy, że

$$\boldsymbol{F}_\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) & f(2) \\ -f(2) & f(4) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_\nabla = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z przeglądu literatury wynika, że macierz $\boldsymbol{F}_\nabla$ nie była dotąd stosowana do badania liczb Fibonacciego. Niniejszy artykuł jest więc, w jakimś stopniu, uzupełnieniem tej luki. Udowodnimy najpierw następujący

Lemat 1.

$$\boldsymbol{F}_\nabla^k = \begin{bmatrix} -f(2k-2) & f(2k) \\ -f(2k) & f(2k+2) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

D o w ó d. Wzór (12) wykażemy najpierw dla $k \in \mathbb{N}_0$[3], stosując zasadę indukcji.

[3] $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych.

Ponieważ

$$\boldsymbol{F}_{\nabla}^{0} = \begin{bmatrix} -f(-2) & f(0) \\ -f(0) & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I},$$

zatem (12) zachodzi dla $k = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k+1} = \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k}\boldsymbol{F}_{\nabla} &= \begin{bmatrix} -f(2k-2) & f(2k) \\ -f(2k) & f(2k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -f(2k) & 3f(2k) - f(2k-2) \\ -f(2k+2) & 3f(2k+2) - f(2k) \end{bmatrix} =: \left[\ f_{ij}(k+1)\ \right]_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Dokonajmy przekształcenia elementów $f_{ij}(k+1)$ otrzymanej macierzy. Najpierw zauważmy, że

$$f_{11}(k+1) = -f(2(k+1)-2), \quad f_{21}(k+1) = -f(2(k+1)).$$

Ponadto, korzystając ze określenia (1) ciągu Fibonacciego, uzyskujemy

$$\begin{aligned} f_{12}(k+1) &= 3f(2k) - f(2k-2) = 3f(2k) - (f(2k) - f(2k-1)) \\ &= 2f(2k) + f(2k-1) = f(2k) + (f(2k) + f(2k-1)) \\ &= f(2k) + f(2k+1) = f(2k+2) = f(2(k+1)), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_{22}(k+1) &= 3f(2k+2) - f(2k) = 2f(2k+2) + (f(2k) + f(2k+1)) - f(2k) \\ &= (f(2k+1) + f(2k+2)) + f(2k+2) \\ &= f(2k+3) + f(2k+2) = f(2k+4) = f(2(k+1)+2). \end{aligned}$$

Ostatecznie wnioskujemy, że wzór (12) zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$. Jeżeli $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, to $k = -\ell$, gdzie $\ell = |k|$. Biorąc pod uwagę, że $|\boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell}| = |\boldsymbol{F}_{\nabla}|^{\ell} = 1$, mamy więc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{-\ell} = (\boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell})^{-1} &= \begin{bmatrix} f(2\ell+2) & -f(2\ell) \\ f(2\ell) & -f(2\ell-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(-2k+2) & -f(-2k) \\ f(-2k) & -f(-2k-2) \end{bmatrix} =: \left[\ f_{ij}(-\ell)\ \right]_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Na podstawie własności (4) mamy dalej

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(-\ell)=f(-2k+2)=f(-(2k-2))=(-1)^{2k-1}f(2k-2)=-f(2k-2)=f_{11}(k),\\
&f_{12}(-\ell)=-f(-2k)=-(-1)^{2k+1}f(2k)=f(2k)=f_{12}(k),\\
&f_{21}(-\ell)=f(-2k)=-f(2k)=f_{21}(k),\\
&f_{22}(-\ell)=-f(-2k-2)=-f(-(2k+2))=-(-1)^{2k+3}f(2k+2)=f(2k+2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =f_{22}(k).
\end{aligned}
$$

Ostatecznie $\boldsymbol{F}_{\nabla}^{-\ell}=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k}$. ■

Wniosek 1.

$$f^2(2k)-f(2k-2)f(2k+2)=1,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{14}$$

D o w ó d . Ponieważ $\boldsymbol{F}_{\nabla}$ jest macierzą nieosobliwą, więc na podstawie twierdzenia Cauchy'ego $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, własność $|\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k}|=|\boldsymbol{F}_{\nabla}|^k$ zachodzi dla każdego $k\in\mathbb{Z}$. Stąd z lematu 1. otrzymujemy wzór (14). ■

Własność (14) jest szczególnym przypadkiem *tożsamości Catalana* [11]

$$f^2(n)-f(n-r)f(n+r)=(-1)^{n-r}f^2(r),$$

jeżeli przyjmiemy $n=2k, r=2, k\in\mathbb{Z}$.

Wniosek 2.

$$f(k-1)f(k+1)-f(k-2)f(k+2)=2,\quad k\in\mathbb{Z}_p:=\{2\ell:\ell\in\mathbb{Z}\}. \tag{15}$$

D o w ó d . Jeżeli $k\in\mathbb{Z}$, to z własności Cassiniego (11) otrzymujemy

$$f(2k-1)f(2k+1)-f^2(2k)=1.$$

Stąd i z (14) wynika tożsamość (15). ■

Wniosek 3.

$$f(k+\ell)=f(k)f(\ell+2)-f(k-2)f(\ell),\quad k,\ell\in\mathbb{Z}_p. \tag{16}$$

D o w ó d . Przyjmując $\boldsymbol{A}=[\ a_{ij}\ ]:=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k+l}$ oraz $\boldsymbol{B}=[\ b_{ij}\ ]:=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k}\boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell}$, gdzie $k,\ell\in\mathbb{Z}$, mamy $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. W szczególności $a_{12}=b_{12}$ oznacza, że

$$f(2k+2\ell)=f(2k)f(2\ell+2)-f(2k-2)f(2\ell),\quad k,\ell\in\mathbb{Z},$$

czyli wzór (16). ■

Wniosek 4.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} f(2i) &= f(2k+1)-1 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0 \qquad (17)\\ \sum_{i=k}^{0} f(2i) &= 1-f(2k-1) \quad \text{dla} \quad k \leqslant 0 \qquad (18)\end{aligned}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D o w ó d . Jeżeli $k \geqslant 0$ oraz $\boldsymbol{A} := \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{i}, \boldsymbol{B} := (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k+1})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{\nabla})^{-1}$, to $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. W szczególności $a_{12} = b_{12}$ oznacza, że

$$\sum_{i=0}^{k} f(2i) = f(2k+2) - f(2k) - 1,$$

skąd, na podstawie (1), wynika wzór (17).

Analogicznie, dla $k \leqslant 0$ oraz $\boldsymbol{A} := \sum_{i=k}^{0} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{i}, \boldsymbol{B} := (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k-1})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{\nabla}^{-1})^{-1}$ otrzymujemy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Stąd, w szczególności $a_{21} = b_{21}$, czyli

$$\sum_{i=k}^{0} f(2i) = 1 + f(2k-2) - f(2k) \overset{(1)}{=} 1 - f(2k-1). \quad \blacksquare$$

Lemat 2.

$$\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} = f(2k)\boldsymbol{F}_{\nabla} - f(2k-2)\boldsymbol{I}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

D o w ó d . Korzystając z (12) oraz (13), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} = \begin{bmatrix} -f(2k-2) & f(2k) \\ -f(2k) & f(2k+2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -f(2k-2) & f(2k) \\ -f(2k) & 3f(2k) - f(2k-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & f(2k) \\ -f(2k) & 3f(2k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(2k-2) & 0 \\ 0 & f(2k-2) \end{bmatrix} \\ &= f(2k)\boldsymbol{F}_{\nabla} - f(2k-2)\boldsymbol{I}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Wniosek 5.

$$f(kn)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f^i(k)f^{n-i}(k-2)f(2i),\quad k\in\mathbb{Z}_p\,,n\in\mathbb{N}_0,0^0:=1.\quad(20)$$

D o w ó d . Z lematu 2. wynika, że

$$\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{kn}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f^i(2k)f^{n-i}(2k-2)\boldsymbol{F}_{\nabla}^{i}=:\boldsymbol{B},\quad k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}_0,\quad(21)$$

skąd, w szczególności $a_{12}=b_{12}$ oznacza własność (20). Z tożsamości (20), między innymi dla $k=2$, otrzymujemy

$$f(2n)=f^n(2)f^0(0)f(2n).$$

Stąd wynika, że musimy przyjąć $0^0:=1$. ■

Wniosek 6.

$$f(kn+\ell)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f^i(k)f^{n-i}(k-2)f(2i+\ell),\ k,\ell\in\mathbb{Z}_p\,,n\in\mathbb{N}_0,0^0:=1.\quad(22)$$

D o w ó d . Na podstawie (21) otrzymujemy

$$\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{kn+\ell}=\boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell}\boldsymbol{F}_{\nabla}^{kn}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f^i(2k)f^{n-i}(2k-2)\boldsymbol{F}_{\nabla}^{i+\ell}=:\boldsymbol{B},\ k,\ell\in\mathbb{Z}.\quad(23)$$

Równość $a_{12}=b_{12}$ oznacza własność (22). ■

Z (19) mamy w szczególności

$$\boldsymbol{F^2}_{\nabla}=3\boldsymbol{F}_{\nabla}-\boldsymbol{I}.\quad(24)$$

Nietrudno sprawdzić, że wzór (24) wynika również z twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

Wniosek 7.

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}3^{k-i}f(2i)=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad k\notin\mathbb{Z}_p\\ 2f(2k) & \text{dla}\quad k\in\mathbb{Z}_p\end{cases},\quad k\in\mathbb{N}_0.\quad(25)$$

D o w ó d . Z (24) dla $k \in \mathbb{N}_0$ otrzymujemy

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{F}_{\nabla}^{-k} = (3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{\nabla})^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} 3^{k-i} \boldsymbol{F}_{\nabla}^i =: \boldsymbol{B}.$$

Z (12) oraz z równości $a_{12} = b_{12}$ i własności (4) mamy dalej

$$f(2k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} 3^{k-i} f(2i),$$

skąd wynika wzór (25). ■

Wniosek 8. Jeżeli $k + \ell = m + n$, *gdzie* $k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}_p$, to dla dowolnego $r \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$f(k)f(\ell) - f(m)f(n) = f(k-2r)f(\ell-2r) - f(m-2r)f(n-2r). \quad (26)$$

D o w ó d . Dla $k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}$ takich, że $k + \ell = m + n$ mamy $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell} = \boldsymbol{F}_{\nabla}^{m} \boldsymbol{F}_{\nabla}^{n} =: \boldsymbol{B}$. Stąd, wobec (12), równość $a_{11} = b_{11}$ oznacza, że

$$f(2k)f(2\ell) - f(2m)f(2n) = f(2k-2)f(2\ell-2) - f(2m-2)f(2n-2).$$

Iterując uzyskany wzór, otrzymujemy (26) dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$. Własność ta zachodzi również dla $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, ponieważ dla $k, \ell \in \mathbb{Z}_p$, wobec (4), mamy $f(k+2r)f(\ell+2r) = f(-k-2r)f(-\ell-2r)$. ■

Zauważmy, że $\boldsymbol{F}_{\nabla}\boldsymbol{P}_{\nabla} = \boldsymbol{P}_{\nabla}\boldsymbol{J}_{\nabla}$, gdzie

$$\boldsymbol{P}_{\nabla} = \begin{bmatrix} \Phi^2 & \varphi^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_{\nabla} = \begin{bmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & \Phi^2 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy stąd dekompozycję Jordana

$$\boldsymbol{F}_{\nabla} = \boldsymbol{P}_{\nabla}\boldsymbol{J}_{\nabla}\boldsymbol{P}_{\nabla}^{-1}, \quad (27)$$

gdzie Φ^2, φ^2 są wartościami własnymi macierzy $\boldsymbol{F}_{\nabla}$.

Wniosek 9.

$$f(k+2) - f(k-2) = \Phi^k + \varphi^k, \quad k \in \mathbb{Z}_p. \quad (28)$$

D o w ó d . Z rozkładu (27) otrzymujemy $\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} = \boldsymbol{P}_{\nabla}\boldsymbol{J}_{\nabla}^{k}\boldsymbol{P}_{\nabla}^{-1}, k \in \mathbb{Z}$, a stąd wynika równość $\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{J}_{\nabla}^{k}), k \in \mathbb{Z}$, która oznacza własność (28). ■

Nietrudno sprawdzić, że tożsamość (28) zachodzi również dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_p$ [3]. Stąd ze wzoru Bineta (3) oraz (28) wynika kolejny

Wniosek 10.

$$f(k) = \frac{f(2k)}{f(k+2) - f(k-2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

ZWIĄZEK $\boldsymbol{F}_{\nabla}$ Z MACIERZĄ ERCOLANO

W [3] Ercolano rozważał macierz Fibonacciego

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -f(-1) & f(1) \\ -f(1) & f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

dla której

$$\boldsymbol{F}^{k} = \begin{bmatrix} -f(k-2) & f(k) \\ -f(k) & f(k+2) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Porównując (12) z (30), mamy

$$\boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} = \boldsymbol{F}^{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Otrzymujemy stąd

Wniosek 11.

$$f^2(k+2) - f^2(k) = f(2k+2), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

D o w ó d . Z (31) mamy

$$\boldsymbol{A} := (\boldsymbol{F}^{k})^2 = \boldsymbol{F}_{\nabla}^{k} =: \boldsymbol{B}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd $a_{22} = b_{22}$ oznacza wzór (32). ■

Zgodnie z twierdzeniem Cayleya-Hamiltona $\boldsymbol{F}^2 = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{I}$. Stąd z (31) mamy

$$\boldsymbol{F}_\nabla = \boldsymbol{F}^2 = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{I}. \tag{33}$$

Wniosek 12.

$$f(2k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f(i), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{34}$$

D o w ó d . Z (33) otrzymujemy równość macierzy

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{F}_\nabla^k = (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{I})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{F}^i =: \boldsymbol{B},$$

która pociąga za sobą równość elementów $a_{12} = b_{12}$, czyli własność (34). ■

ZWIĄZEK $\boldsymbol{F}_\nabla$ Z MACIERZĄ $\boldsymbol{G}$

Z (33) wynika, że $\boldsymbol{F}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z macierzy $\boldsymbol{F}_\nabla$. Inny jej pierwiastek otrzymujemy, korzystając z dekompozycji Jordana (27). Mamy wówczas

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{F}_\nabla^{1/2} = \boldsymbol{P}_\nabla \boldsymbol{J}_\nabla^{1/2} \boldsymbol{P}_\nabla^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi^2 & \varphi^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\varphi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\varphi^2 \\ -1 & \Phi^2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\boldsymbol{G}$ możemy również wyznaczyć explicite ze wzoru Cayleya ([5], problem 6.2).

Lemat 3.

$$\boldsymbol{G}^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -[\Phi^{k-2} - (-1)^k \varphi^{k-2}] & \Phi^k - (-1)^k \varphi^k \\ -[\Phi^k - (-1)^k \varphi^k] & \Phi^{k+2} - (-1)^k \varphi^{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

D o w ó d . Wykażemy najpierw, że wzór (35) jest słuszny dla $k \in \mathbb{Z}_p$. Niech więc $k = 2\ell, \ell \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $\boldsymbol{G}^{2\ell} = \boldsymbol{F}_{\nabla}^{\ell}$, zatem na podstawie (12) i wzoru Bineta (3) otrzymujemy (35). Z kolei dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_p$, tzn. $k = 2\ell + 1, \ell \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\boldsymbol{G}^{2\ell+1} = \boldsymbol{G}^{2\ell}\boldsymbol{G} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -[\Phi^{2\ell-2} - \varphi^{2\ell-2}] & \Phi^{2\ell} - \varphi^{2\ell} \\ -[\Phi^{2\ell} - \varphi^{2\ell}] & \Phi^{2\ell+2} - \varphi^{2\ell+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -\Phi^{2\ell-1}(\Phi^{-1}+\Phi) - \varphi^{2\ell-1}(-\varphi^{-1}-\varphi) & \Phi^{2\ell+1}(4\Phi^{-1}-\Phi^{-3}) + \varphi^{2\ell+1}(\varphi^{-3}-4\varphi^{-1}) \\ -\Phi^{2\ell+1}(\Phi^{-1}+\Phi) - \varphi^{2\ell+1}(-\varphi^{-1}-\varphi) & \Phi^{2\ell+3}(4\Phi^{-1}-\Phi^{-3}) + \varphi^{2\ell+3}(\varphi^{-3}-4\varphi^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -[\Phi^{(2\ell+1)-2} - (-1)^{2\ell+1}\varphi^{(2\ell+1)-2}] & \Phi^{2\ell+1} - (-1)^{2\ell+1}\varphi^{2\ell+1} \\ -[\Phi^{2\ell+1} - (-1)^{2\ell+1}\varphi^{2\ell+1}] & \Phi^{(2\ell+1)+2} - (-1)^{2\ell+1}\varphi^{(2\ell+1)+2} \end{bmatrix},$$

co kończy dowód. ■

W zależności od parzystości liczby k, macierz $\boldsymbol{G}$ może być wyrażona przez wyrazy ciągu Fibonacciego lub ciągu Lucasa.

Dwustronny ciąg Lucasa

$$\ldots, 18, -11, 7, -4, 3, -1, \mathbf{2}, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$$

spełnia równanie różnicowe

$$l(k) = l(k-1) + l(k-2), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{36}$$

i warunki początkowe

$$f(-1) = -1, f(0) = 2. \tag{37}$$

Odpowiednik wzoru Bineta na ogólny wyraz ciągu $\{l(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ma postać

$$l(k) = \Phi^k + \varphi^k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{38}$$

Mamy przy tym

$$l(-k) = (-1)^k l(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Korzystając z (3) i (38), na podstawie lematu 3. otrzymujemy

Wniosek 13.

$$\boldsymbol{G}^k = \begin{cases} \boldsymbol{F}^k & \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}_p \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \boldsymbol{L}^k & \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_p \end{cases}, \tag{39}$$

gdzie $\boldsymbol{F}^k$ jest macierzą Ercolano (30) oraz

$$\boldsymbol{L}^k = \begin{bmatrix} -l(k-2) & l(k) \\ -l(k) & l(k+2) \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $\boldsymbol{G}^2 = \sqrt{5}\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}$. Zatem

$$\boldsymbol{F}_{\nabla} = \boldsymbol{G}^2 = \sqrt{5}\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}.$$

Porównując tę równość z (33), uzyskujemy

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{F} + 2\boldsymbol{I}), \text{ co implikuje } \boldsymbol{G}^k = \sqrt{5^{-k}}(\boldsymbol{F} + 2\boldsymbol{I})^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd oraz z (39), podobnie jak wnioski 7. i 12., otrzymujemy

Wniosek 14.

$$f(k) = \sqrt{5^{-k}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{k-i} f(i) \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}_p \tag{40}$$

$$, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$$l(k) = \sqrt{5^{-k+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{k-i} f(i) \quad \text{dla} \quad k \notin \mathbb{Z}_p \tag{41}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Benjamin A. T., Quinn J. J., *Proofs that really count: the art of combinatorial proof*, ‘Dolciani Mathematical Expositions’, 27, Mathematical Association of America, Washington 2003.

[2] Bittner R., *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.

[3] Ercolano J., *Golden sequences of matrices with applications to Fibonacci algebra*, 'Fibonacci Quart.', 1976, 14 (5), pp. 419–426.

[4] Gould H. W., *A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem*, 'Fibonacci Quart.', 1981, 19 (3), pp. 250–257.

[5] Higham N. J., *Functions of matrices: theory and computation*, SIAM, Philadelphia, PA 2008.

[6] Koshy T., *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley & Sons, New York 2001.

[7] Przeworska-Rolewicz D., *Algebraic Analysis*, D. Reidel & PWN, Dordrecht — Warszawa 1988.

[8] Robinson D. W., *The Fibonacci matrix modulo m*, 'Fibonacci Quart.', 1963, 1 (2), pp. 29–36.

[9] Silvester J. R., *Fibonacci properties by matrix methods*, 'Mathematical Gazette', 1979, 63, pp. 88–91.

[10] Vajda S., *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section*, John Wiley & Sons, New York 1989.

[11] Weisstein E. W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL 2003.

[12] Wysocki H., Taylor's formula for the forward difference via operational calculus, 'Stud. Sci. Math. Hung.', 2010, 47 (1), pp. 46–53.

[13] Wysocki H., *Model nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera dla różnicy wstecznej*, „Zeszyty Naukowe" AMW, 2010, nr 2, s. 37–48.

FIBONACCI MATRICES GENERATED BY DIFFERENCE OPERATIONS

ABSTRACT

On the basis of the control theory, the Fibonacci sequence can be treated as a solution of a discrete dynamic system defined by means of state and output equations. Distinct difference operations generate distinct state matrices of such a system. In particular, we obtain the matrix corresponding to the backward difference. In this paper, the applications of such a matrix to determining certain properties of the Fibonacci sequence have been discussed.

Keywords:
Fibonacci numbers, matrices and identities, difference operations.