ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LII NR 1 (184) 2011

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej

UOGÓLNIONE LICZBY HORADAMA I RACHUNEK RÓŻNIC WSTECZNYCH

STRESZCZENIE

W artykule wprowadzono pojęcie dwustronnego ciągu $\{h^{(n)}(k)\}$ liczb Horadama n-tego rzędu. Za pomocą dyskretnego modelu nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera opartego na różnicy wstecznej $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$ wyprowadzono wzór na ogólny wyraz ciągu $\{h^{(n)}(k)\}$ będący odpowiednikiem wzoru Bineta dla ciągu Fibonacciego.

Słowa kluczowe:
rachunek operatorów, pochodna, pierwotne, warunki graniczne, różnica wsteczna, liczby Fibonacciego, liczby Horadama.

PODSTAWY RACHUNKU OPERATORÓW

Rachunkiem operatorów Bittnera [1–3] nazywamy zespół

$$CO(L^0, L^1, S, T_q, s_q, Q), \tag{1}$$

gdzie L^0 i L^1 są przestrzeniami liniowymi (nad tym samym ciałem skalarów Γ[1]), takimi że $L^1 \subset L^0$. Operacja liniowa $S : L^1 \longrightarrow L^0$ (co zapisujemy $S \in \mathcal{L}(L^1, L^0)$), nazywana *pochodną* (abstrakcyjną), jest surjekcją. Ponadto Q jest zbiorem wskaźników q dla operacji $T_q \in \mathcal{L}(L^0, L^1)$, takich że $ST_q w = w, w \in L^0$, zwanych *pierwotnymi*, i dla operacji $s_q \in \mathcal{L}(L^1, L^1)$, takich że $s_q u = u - T_q S u, u \in L^1$, zwanych *warunkami granicznymi*. Jądro operacji S, tzn. $\operatorname{Ker} S$ nazywamy zbiorem *stałych* dla pochodnej S.

[1] Będziemy zakładali, że L^0 i L^1 są przestrzeniami zespolonymi, tzn. $\Gamma := \mathbb{C}$.

Łatwo sprawdzić, że warunki graniczne $s_q, q \in Q$ są rzutami L^1 na podprzestrzeń $\operatorname{Ker} S$.

Przez indukcję określa się ciąg przestrzeni $L^n, n \in \mathbb{N}$[2] w taki sposób, że

$$L^n := \{u \in L^{n-1} : Su \in L^{n-1}\}.$$

Wówczas

$$\ldots \subset L^n \subset L^{n-1} \subset \ldots \subset L^1 \subset L^0$$

oraz

$$S^n(L^{m+n}) = L^m,$$

gdzie

$$\mathcal{L}(L^n, L^0) \ni S^n := \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n-\text{razy}}, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Każdy rachunek operatorów określony przez zadanie obiektów (1) nazywamy jego *reprezentacją* lub *modelem*.

Przykład 1. Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Ponadto niech $C(\mathbb{Z})$ oznacza przestrzeń liniową nieskończonych dwustronnych ciągów zespolonych $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów i mnożenia ciągów przez liczby zespolone. W pracy [9] wykazano, że zespół (1), gdzie $u = \{u(k)\} \in L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z}), q \equiv k_0 \in Q := \mathbb{Z}$ oraz

$$Su \equiv \nabla u := \{u(k) - u(k-1)\}, \tag{2}$$

$$T_{k_0}u := \begin{cases} -\sum\limits_{i=k+1}^{k_0} u(i) & \text{dla} \quad k < k_0 \\ 0 & \text{dla} \quad k = k_0 \\ \sum\limits_{i=k_0+1}^{k} u(i) & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$s_{k_0}u := \{u(k_0)\} \tag{4}$$

tworzy *dyskretny nabla-model rachunku operatorów Bittnera* z pochodną jako różnicą wsteczną ∇[3].

[2] $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.

[3] Z uwagi na definicję pierwotnych T_{k_0}, zakłada się, że $\sum_{i=k_0+1}^{k_0} u(i) := 0$.

Elementem wykładniczym (*o wykładniku* λ) w tym modelu nazywamy ciąg

$$x \equiv \{\exp_\lambda(k)c\} := \{(1-\lambda)^{k_0-k}c\}, \quad \text{gdzie} \quad c \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{oraz} \quad c \neq 0, \lambda \neq 1, \tag{5}$$

będący rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} Sx = \lambda x \\ s_{k_0}x = c \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x(k) - x(k-1) = 0 \\ x(k_0) = c \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.^4 \tag{6}$$

▲

LICZBY HORADAMA n-TEGO RZĘDU

Uogólnieniem liczb Fibonacciego $\mathfrak{f}_k \equiv \mathfrak{f}(k)$ są liczby Fibonacciego n-tego rzędu $\mathfrak{f}_k^{(n)} \equiv \mathfrak{f}^{(n)}(k)$ [7] oraz liczby Horadama $\mathfrak{h}_k \equiv \mathfrak{h}(k)$ [5].

Ciągi $\{\mathfrak{f}^{(n)}(k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ i $\{\mathfrak{h}(k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ są rozwiązaniami następujących zagadnień początkowych

$$\begin{cases} \mathfrak{f}^{(n)}(k) = \mathfrak{f}^{(n)}(k-1) + \mathfrak{f}^{(n)}(k-2) + \cdots + \mathfrak{f}^{(n)}(k-n), \quad k \geqslant n \geqslant 2 \\ \mathfrak{f}^{(n)}(k) = 0, k \in \overline{0, n-2}, \quad \mathfrak{f}^{(n)}(n-1) = 1 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \mathfrak{h}(k) = b_1\mathfrak{h}(k-1) + b_2\mathfrak{h}(k-2), \quad k \geqslant 2_5 \\ \mathfrak{h}(0) = 0, \mathfrak{h}(1) = 1, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Naturalnym uogólnieniem liczb $\mathfrak{f}^{(n)}(k)$ oraz $\mathfrak{h}(k)$ są *liczby Horadama n-tego rzędu* $h^{(n)}(k)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Mianowicie zakładamy, że dla ustalonych $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$[6], gdzie $b_n \neq 0$, ciąg dwustronny $\{h^{(n)}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ jest rozwiązaniem równania

$$h^{(n)}(k) = b_1h^{(n)}(k-1) + b_2h^{(n)}(k-2) + \cdots + b_nh^{(n)}(k-n), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

i spełnia warunki początkowe

$$h^{(n)}(0) = h_0^0, h^{(n)}(-1) = h_{-1}^0, \ldots, h^{(n)}(-n+2) = h_{-n+2}^0, h^{(n)}(-n+1) = h_{-n+1}^0, \tag{8}$$

gdzie $h_0^0, h_{-1}^0, \ldots, h_{-n+2}^0, h_{-n+1}^0 \in \mathbb{Q}$ są danymi wartościami początkowymi.

---

[4] W (6) i w dalszej części pracy ciąg stały $\{c\}$ utożsamiamy z liczbą c [10].
[5] $\overline{m, n} := \{m, m+1, \ldots, n\}$.
[6] $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych.

W modelu nabla, na podstawie twierdzenia 1. [10], relację (7) można sprowadzić do postaci równania jednorodnego

$$a_n S^n h + a_{n-1} S^{n-1} h + \cdots + a_1 S h + a_0 h = 0, \tag{9}$$

gdzie $h := \{h^{(n)}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ oraz

$$a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad a_j = (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} b_i, \quad j \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

Z kolei warunki początkowe (8) sprowadzamy do warunków granicznych (przy $k_0 = 0$) postaci [10]

$$c_i := s_0 S^i h = \{\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} h^0_{-j}\}, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Przykład 2. Zagadnienie początkowe

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(3)}(k) = h^{(3)}(k-1) + 2h^{(3)}(k-2) + 3h^{(3)}(k-3) \\ h^{(3)}(0) = h^{(3)}(-1) = 0, h^{(3)}(-2) = 1 \end{array} \right. , k \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

w ∇-modelu przyjmuje postać

$$3S^3 h - 11 S^2 h + 14 S h - 5h = 0, \quad c_0 = c_1 = 0, c_2 = 1. \tag{13}$$

▲

Obok pochodnej, pierwotnych i warunków granicznych podstawowymi obiektami rachunku operatorów Bittnera są *wyniki* i *operatory* [2, 3, 8], które wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia (9), (11).

WYNIKI I OPERATORY

Przy danej przestrzeni liniowej L (nad ciałem Γ) i przemiennej półgrupie multiplikatywnej $\pi(L)$ endomorfizmów i zarazem injekcji przestrzeni L staje się możliwe wprowadzenie uporządkowanych par

$$\xi := [f, U], \quad f \in L, \ U \in \pi(L)$$

i relacji równości

$$(\ [f,U] = [g,V]\ ) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\ Vf = Ug\ ), \quad f, g \in L, \ U, V \in \pi(L),$$

która jest typu równoważności. Relacja ta dzieli zbiór wszystkich rozpatrywanych par na klasy abstrakcji, które nazywamy *wynikami*. Wynikiem nazywamy również dowolnego reprezentanta ξ danej klasy i używamy dla niego zapisu ułamkowego

$$\xi = \frac{f}{U} := [f, U].$$

Zbiór wyników $\Xi(L, \pi(L))$ (oznaczany krótko przez $\Xi(L)$) z działaniami

$$\frac{f}{U} + \frac{g}{V} := \frac{Vf + Ug}{UV}, \quad \gamma(\frac{f}{U}) := \frac{\gamma f}{U}, \quad f, g \in L,\ \gamma \in \Gamma,\ U, V \in \pi(L)$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem Γ.

Elementy przestrzeni L możemy traktować jako wyniki, ponieważ odwzorowanie

$$f \longmapsto \frac{Uf}{U},\ f \in L,\ U \in \pi(L)$$

jest izomorfizmem.

W $\Xi(L)$ określa się ponadto działanie

$$R(\frac{f}{U}) := \frac{Rf}{U},$$

gdzie $f \in L,\ R \in \mathcal{L}(L, L),\ U \in \pi(L),\ UR = RU.$

Element $\xi \in L$ nazywamy *wynikiem regularnym*, natomiast element $\xi \in \Xi(L) \setminus L$ *wynikiem singularnym* [8].

Niech będzie dany endomorfizm $R \in \mathcal{L}(L, L)$ przemienny z operacjami należącymi do półgrupy $\pi(L)$. Operację liniową określoną wzorem

$$\mu \frac{f}{V} := \frac{Rf}{UV}, \quad f \in L,\ U, V \in \pi(L)$$

nazywamy *operatorem* i oznaczamy symbolem $\mu := \frac{R}{U}$.

Operator jest więc endomorfizmem przestrzeni wyników $\Xi(L)$. Operator $\mu_0 := \frac{UR}{U}$, gdzie $U \in \pi(L)$, utożsamiamy z endomorfizmem R. Łatwo sprawdzić, że suma operatorów, iloczyn operatora przez element z ciała Γ i złożenie operatorów jest operatorem. Ponadto dzielenie przez operator, którego licznik jest injekcją, w następujący sposób

$$\frac{\xi}{\mu} := \frac{U}{R}\xi$$

prowadzi również do operatora.

ABSTRAKCYJNE PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A-CARSONA

Dla elementu $x \in L^n$ zachodzi następujący wzór Taylora (tw. 6 [3])

$$x = c_0 + T_q c_1 + \cdots + T_q^{n-1} c_{n-1} + T_q^n S^n x, \tag{14}$$

gdzie

$$c_i = s_q S^i x, \quad i \in \overline{0, n-1}.$$

Mamy stąd (tw. 9 [3])

$$S^n x = P_q^n x - P_q^n c_0 - P_q^{n-1} c_1 - \cdots - P_q c_{n-1}, \tag{15}$$

gdzie

$$P_q^i := \frac{I}{T_q^i}$$

jest i-tą iteracją tzw. *operatora Heaviside'a* P_q, natomiast $I := id_{L^0}$ jest operacją identycznościową określoną na L^0.

Przedstawienie wyniku ξ jako funkcji operatora Heaviside'a w postaci $\xi = X(P_q)c$, gdzie $c \in \operatorname{Ker} S$, nazywamy *abstrakcyjnym przekształceniem Laplace'a--Carsona*. Natomiast operator $X(P_q)$ nazywamy *transformatą Laplace'a-Carsona* wyniku ξ. Jeżeli $X(P_q) := \frac{L(P_q)}{M(P_q)}$ oznacza funkcję wymierną operatora Heaviside'a, to przez $\gamma \frac{L(P_q)}{M(P_q)} c$ lub $\frac{\gamma L(P_q)}{M(P_q)} c$, gdzie $\gamma \in \mathbb{C}$, będziemy rozumieli wynik $\frac{L(P_q)}{M(P_q)}(\gamma c)$.

Przykład 3. Nietrudno sprawdzić, że dla elementu wykładniczego (5) nie istnieje dwustronne przekształcenie $\mathcal{Z}$ [10]. Istnieje natomiast abstrakcyjna transformata Laplace'a-Carsona. Istotnie, zauważmy najpierw, że w modelu nabla zagadnienie

$$Sx = \lambda x, \quad s_{k_0} x = 0$$

ma tylko rozwiązanie zerowe, co jest równoważne implikacji

$$[\ (I - \lambda T_{k_0})x = 0\ ] \Longrightarrow [\ x = 0\ ].$$

Możemy zatem rozważać półgrupę $\pi_{T_{k_0}}(L^0)$ zawierającą injekcję $I - \lambda T_{k_0}$ i rozwiązać zagadnienie (6) w przestrzeni wyników $\Xi(L^0, \pi_{T_{k_0}}(L^0))$. Mianowicie z (6) otrzymujemy $x - c = \lambda T_{k_0} x$, czyli

$$x = \frac{c}{I - \lambda T_{k_0}}.$$

Ostatecznie operator $\frac{P_{k_0}}{P_{k_0}-\lambda}$[7] jest transformatą Laplace'a-Carsona elementu wykładniczego $\{\exp_\lambda(k)c\}$, tzn.

$$\{(1-\lambda)^{k_0-k}c\} = \frac{P_{k_0}}{P_{k_0}-\lambda}c. \tag{16}$$

▲

CIĄG HORADAMA JAKO ELEMENT PRZESTRZENI WYNIKÓW

Rozważmy ponownie ∇-model rachunku operatorów opisany w przykładzie 1. Równaniu (9) odpowiada kombinacja liniowa

$$M(S) := a_n S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0 I,$$

której współczynniki określone są wzorami (10).

Równanie różnicowe (7) z warunkami początkowymi (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Istotnie, pozostałe wartości ciągu $\{h^{(n)}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ możemy jednoznacznie określić na podstawie następujących zależności rekurencyjnych

$$h^{(n)}(k)=b_1h^{(n)}(k-1) + b_2h^{(n)}(k-2) + \cdots + b_nh^{(n)}(k-n) \text{ dla } k > 0 \tag{17}$$

oraz

$$h^{(n)}(k-n)=\frac{1}{b_n}\big[h^{(n)}(k)-[b_1h^{(n)}(k-1)+\cdots+b_{n-1}h^{(n)}(k-n+1)]\big] \text{ dla } k \leqslant 0. \tag{18}$$

Z (17) i (18) wynika w szczególności, że równanie (7) z jednorodnymi warunkami początkowymi

$$h^{(n)}(-i) = 0, \quad i \in \overline{0, n-1} \tag{19}$$

ma tylko rozwiązanie zerowe. Warunki (19) indukują jednorodne warunki graniczne

$$s_0 S^i h = 0, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{20}$$

To z kolei, na podstawie (9) oznacza, że prawdziwa jest implikacja

$$[\ M(S)h = 0, s_0S^ih = 0, i \in \overline{0,n-1}\ ] \Longrightarrow [\ h = 0\ ]. \tag{21}$$

---

[7] Jeżeli V jest operacją A (lub operatorem μ) i $\alpha \in \mathbb{C}$, to będziemy pisali umownie $V+\alpha$ oraz $\alpha - V$ zamiast $V + \alpha I$ oraz $\alpha I - V$.

Ze wzoru Taylora (14), dla $m \leqslant n$ mamy

$$T_0^n S^m h = T_0^{n-m}(T_0^m S^m h) = T_0^{n-m} h - \sum_{i=0}^{m-1} T_0^{n-m+i} s_0 S^i h,$$

skąd, po uwzględnieniu (20), otrzymujemy $T_0^n S^m h = T_0^{n-m} h, m \in \overline{0,n}$. Korzystając z tej własności, nietrudno sprawdzić, że implikacje (21) oraz

$$[\ M^*(T_0)h = 0\ ] \Longrightarrow [\ h = 0\ ],$$

gdzie

$$M^*(T_0) := a_n I + a_{n-1} T_0 + \cdots + a_1 T_0^{n-1} + a_0 T_0^n,$$

są równoważne.

Możemy zatem równanie różnicowe (9) z warunkami granicznymi (11) rozwiązać w przestrzeni wyników $\Xi(L^0, \pi_{T_0}(L^0))$, gdzie $\pi_{T_0}(L^0)$ jest półgrupą zawierającą endomorfizm $M^*(T_0) = T_0^n M(P_0)$. Mianowicie korzystając z (9) i (15), otrzymujemy

$$\begin{gathered} a_n(P_0^n h - P_0^n c_0 - P_0^{n-1} c_1 - \cdots - P_0 c_{n-1}) \\ + a_{n-1}(P_0^{n-1} h - P_0^{n-1} c_0 - P_0^{n-2} c_1 - \cdots - P_0 c_{n-2}) + \cdots + a_1(P_0 h - P_0 c_0) + a_0 h = 0, \end{gathered}$$

czyli

$$M(P_0)h = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(P_0) c_i,$$

gdzie

$$M_i(P_0) := \sum_{j=i+1}^{n} a_j P_0^{j-i}, \quad i \in \overline{0, n-1}.$$

Ostatecznie

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i(P_0)}{M(P_0)} c_i \tag{22}$$

jest ciągiem Horadama zanurzonym w przestrzeni wyników $\Xi(L^0, \pi_{T_0}(L^0))$.

W szczególności, jeżeli

$$h^{(n)}(0) = 0, h^{(n)}(-1) = 0, \ldots, h^{(n)}(-n+2) = 0, h^{(n)}(-n+1) = 1, \tag{23}$$

to

$$M(P_0)h = a_n P_0\{(-1)^{n-1}\},$$

skąd

$$h = \frac{a_n P_0}{M(P_0)}\{(-1)^{n-1}\}. \tag{24}$$

Przedstawiając wynik (22) jako element przestrzeni $C(\mathbb{Z})$, otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia (9), (11) w przestrzeni ciągów $C(\mathbb{Z})$.

Przykład 4. Z (13) i (24) wynika, że ciąg Horadama $h = \{h^{(3)}(k)\}$ będący rozwiązaniem zagadnienia (12) ma następujące przedstawienie w przestrzeni wyników

$$h = \frac{3P_0}{3P_0^3 - 11P_0^2 + 14P_0 - 5}\{1\}.$$

Stosując rozkład $I/M(P_0)$ na ułamki proste, otrzymujemy

$$h = \big(A_1\frac{P_0}{P_0-\lambda_1} + A_2\frac{P_0}{P_0-\lambda_2} + A_3\frac{P_0}{P_0-\lambda_3}\big)\{1\},$$

gdzie

$$A_1 = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}, A_2 = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}, A_3 = \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{11}{9} - \frac{5}{9}\sqrt[3]{\frac{2}{D}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{D}{2}},\\
\lambda_2 &= \frac{11}{9} - \frac{1}{18}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{D}{2}} + \frac{5}{9}(1-i\sqrt{3})\frac{1}{\sqrt[3]{4D}},\\
\lambda_3 &= \frac{11}{9} - \frac{1}{18}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{D}{2}} + \frac{5}{9}(1+i\sqrt{3})\frac{1}{\sqrt[3]{4D}},\\
D &= -281 + 27\sqrt{109}.
\end{aligned}$$

Korzystając z (16), otrzymujemy ostatecznie

$$h^{(3)}(k) = A_1(1-\lambda_1)^{-k} + A_2(1-\lambda_2)^{-k} + A_3(1-\lambda_3)^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Zastosowanie programu *Mathematica* pozwala wyznaczać dowolne wyrazy ciągu (25). Na przykład $h^{(3)}(-25) = \frac{1216360675}{94143178827}$ oraz $h^{(3)}(30) = 129517012251$. Poniższa tabela zawiera liczby Horadama (25) dla $k \in \overline{-10, 12}$.

k	$\dots$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h^{(3)}(k)$	$\dots$	$\frac{1936}{6561}$	$-\frac{875}{2187}$	$\frac{130}{729}$	$\frac{64}{243}$	$-\frac{47}{81}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\dots$
$h^{(3)}(k)$	3	3	9	24	51	126	300	705	1683	3993	9474	22509	$\dots$

▲

ANALOGON WZORU BINETA

Niech

$$M(P_0) = a_n(P_0 - \lambda_1)(P_0 - \lambda_2)\dots(P_0 - \lambda_n) =: a_n W(P_0).$$

Rozważmy przypadek najogólniejszy, gdy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są różnymi liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi. Stosując do funkcji wymiernych operator Heaviside'a

$$\frac{M_i(P_0)}{M(P_0)}, \quad i \in \overline{0, n-1}$$

pierwsze twierdzenie Heaviside'a (tw. 21 [3]) i korzystając z postaci (16) elementu wykładniczego, otrzymujemy

$$\frac{M_i(P_0)}{M(P_0)} c_i = \left\{ \left[\frac{M_i(0)}{M(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{M_i(\lambda_j)}{\lambda_j M'(\lambda_j)} (1-\lambda_j)^{-k} \right] c_i \right\}, \quad i \in \overline{0, n-1},$$

gdzie $M'(\lambda_j) = dM(\lambda_j)/dP_0$.

Ostatecznie na podstawie (22), otrzymujemy ogólną postać liczb Horadama n-tego rzędu

$$h^{(n)}(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{M_i(0)}{M(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{M_i(\lambda_j)}{\lambda_j M'(\lambda_j)} (1-\lambda_j)^{-k} \right] c_i, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

W szczególności, mamy stąd

$$h^{(n)}(k) = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{W'(\lambda_j)} (1-\lambda_j)^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

gdy zachodzą warunki początkowe (23). Wzór (26) jest odpowiednikiem wzoru Bineta na ogólny wyraz ciągu Fibonacciego. Zauważmy, że (25) jest szczególnym przypadkiem wzoru (27).

Przykład 5. Ciąg dwustronny $\{\mathfrak{b}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ będący rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathfrak{b}(k+3) = 2\mathfrak{b}(k+2) - 4\mathfrak{b}(k+1) + 4\mathfrak{b}(k) \\ \mathfrak{b}(0) = \mathfrak{b}(1) = 0, \mathfrak{b}(2) = 1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \tag{28}$$

nazywamy *ciągiem Berstela* [4, 6].

Liczby Berstela $\mathfrak{b}(k)$ możemy potraktować jako uogólnione liczby Horadama trzeciego rzędu $h^{(3)}(k)$. W tym celu należy zagadnienie (28) przedstawić w postaci (7), (8). Mamy wówczas

$$\begin{cases} h^{(3)}(k) = 2h^{(3)}(k-1) - 4h^{(3)}(k-2) + 4h^{(3)}(k-3) \\ h^{(3)}(0) = 0, h^{(3)}(-1) = h^{(3)}(-2) = \frac{1}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

W ∇-modelu zagadnienie (29) przyjmuje postać

$$4S^3h - 8S^2h + 6Sh - h = 0, \quad c_0 = 0, c_1 = c_2 = -\frac{1}{4}. \tag{30}$$

Poniżej przedstawiono kod programu *Mathematica 7* obliczającego kolejne wyrazy ciągu Horadama (30) według wzoru (26):

```
a[0] = -1; a[1] = 6; a[2] = -8; a[3] = 4;
c[0] = 0; c[1] = -1/4; c[2] = -1/4;
M[i_, p_] := Sum[a[j] p^(j - i), {j, i + 1, 3}];
M[p_] := a[3] p^3 + a[2] p^2 + a[1] p + a[0];
char = Solve[M[p] == 0, p];
root = p /. char;
l[j_] := root[[j]];
h[k_] := FullSimplify[Sum[M[i, 0]/M[0]
+ Sum[(M[i, l[j]] (1 - l[j])^(-k))/(l[j] M'[l[j]]), {j, 3}] c[i], {i, 0, 2}]];
Table[h[k], {k, -50, 52}]
```

W szczególności otrzymujemy $\mathfrak{b}(0) = \mathfrak{b}(1) = \mathfrak{b}(4) = \mathfrak{b}(6) = \mathfrak{b}(13) = \mathfrak{b}(52) = 0$ oraz $\mathfrak{b}(51) = -884763262976$ (por. 4]). Załączona tabela zawiera wyrazy ciągu $\{h^{(3)}(k)\} \equiv \{\mathfrak{b}(k)\}$ dla wybranych liczb całkowitych k.

k	-50	-43	-36	-29	-26	-19	-14	-6
$h^{(3)}(k)$	$\frac{10609}{17179869184}$	$\frac{4063}{1073741824}$	$\frac{389}{16777216}$	$\frac{149}{1048576}$	$\frac{81}{262144}$	$\frac{31}{16384}$	$\frac{7}{1024}$	$\frac{1}{16}$

k	8	17	27	34	46	50
$h^{(3)}(k)$	16	3072	-393216	29360128	-50465865728	-201863462912

▲

BIBLIOGRAFIA

[1] Bittner R., *On certain axiomatics for the operational calculus*, 'Bull. Acad. Polon. Sci.', 1959, Cl. III, 7 (1), pp. 1–9.

[2] Bittner R., *Algebraic and analytic properties of solutions of abstract differential equations*, 'Dissertationes Math.', 41, Warszawa 1964.

[3] Bittner R., *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.

[4] Everest G., van der Poorten A., Shparlinski I., Ward T., *Recurrence sequences*, 'Mathematical Surveys and Monographs', 104, American Mathematical Society, 2003.

[5] Horadam A. F., *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*, 'Fibonacci Quart.', 1965, 3, pp. 161–176.

[6] Mignotte M., Tzanakis N., *Arithmetical study of a certain ternary recurrence sequence and related questions*, 'Mathematics and Computation', 1993, 61, 204, pp. 901–913.

[7] Miles E. P., *Generalized Fibonacci numbers and associated matrices*, 'Amer. Math. Monthly', 1960, 67, pp. 745–752.

[8] Wysocki H., *The result derivative. Distributive results*, 'Acta Mathematica Hungarica', 1989, 53 (3–4), pp. 289–307.

[9] Wysocki H., *Model nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera dla różnicy wstecznej*, „Zeszyty Naukowe" AMW, 2010, nr 2, s. .

[10] Wysocki H., Rozwiązanie liniowego równania różnicowego w przestrzeni wyników generowanej przez ciągi dwustronne, *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej,* ??, 2010, s. 37–48.

GENERALIZED HORADAM NUMBERS AND THE BACKWARD DIFFERENCES CALCULUS

ABSTRACT

The paper introduces the notion of a two-sided sequence $\{h^{(n)}(k)\}$ of n^{th}-order Horadam numbers. Using of the non-classical Bittner operational calculus discrete model based on the backward difference $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$, the general term of $\{h^{(n)}(k)\}$ has been derived. The term is a parallel of Binet's formula for the Fibonacci sequence.

Keywords:

operational calculus, derivative, integrals, limit conditions, backward difference, Fibonacci numbers, Horadam numbers.

Recenzent prof. dr hab. Franciszek Grabski