ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK XLVII NR 2 (165) 2006

Krzysztof Ficoń
Akademia Marynarki Wojennej

WYZNACZANIE WIELOETAPOWEJ STRATEGII RYNKOWEJ ZA POMOCĄ METOD PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

STRESZCZENIE

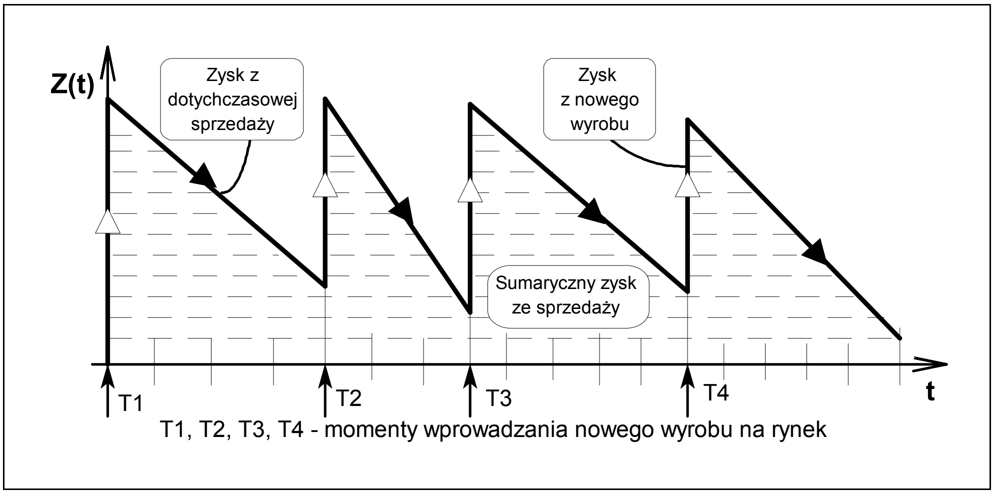
W artykule zaprezentowano sposób wykorzystania metod programowania dynamicznego do wieloetapowej optymalizacji strategii produkcji i sprzedaży wyrobów na rynkach zbytu. Standardy i wysoka konkurencyjność gospodarki rynkowej powodują, że rynkowy czas życia produktu jest relatywnie krótki, a w miarę upływającego czasu zyski ze sprzedaży podlegają sukcesywnym redukcjom. W tej sytuacji zachodzi konieczność wypracowania optymalnej strategii produkcji i sprzedaży, która w dostatecznie długim czasie będzie gwarantowała maksymalne zyski. Na poszczególnych etapach planistycznych należy podejmować więc decyzje, czy kontynuować produkcję i sprzedaż wyrobów starych, których zyski ze sprzedaży maleją, czy też wprowadzić na rynek nowy wyrób podnoszący poziom zysków na maksymalny poziom. Do rozwiązania tego klasycznego problemu decyzji wieloetapowych wykorzystano aparat i metody programowania dynamicznego.

SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACYJNEGO

Rozpatrzmy wieloetapową strategię produkcji i sprzedaży pewnego wyrobu rynkowego w określonym horyzoncie prognostycznym, której celem jest maksymalizacja łącznego zysku ze sprzedaży wyrobu w tym czasie. W określonych cyklach podejmujemy decyzje biznesowe odnośnie strategii dalszej produkcji i sprzedaży. Repertuar decyzji jest zbiorem dwustanowym, a polegają one na wyborze kontynuacji produkcji dotychczasowego wyrobu albo wprowadzenia na rynek konkurencyjnego produktu nowej generacji [7], [13].

W systemie gospodarki rynkowej produkcja jednego modelu produktu w miarę upływającego czasu staje się coraz mniej opłacalna, gdyż w obliczu konkurencji każdy wyrób ulega dość intensywnemu starzeniu moralnemu. Sukcesywnie spada więc jego sprzedaż. Można cyklicznie obniżać cenę, ale tego rodzaju zabieg powoduje, że osiągamy coraz mniejsze zyski. Alternatywą jest podjęcie produkcji nowego, bardziej konkurencyjnego wyrobu i wprowadzenie go do sprzedaży w miejsce poprzedniego. Decyzja ta pociąga za sobą określone nakłady i koszty, które muszą być zbilansowane w całej strategii prowadzonej działalności produkcyjnej [4], [5], [9], [16].

Problemem decyzyjnym jest zatem wybór momentu zaprzestania sprzedaży wyrobu starego i wprowadzenia do sprzedaży nowego produktu, tak aby łączny zysk w dostatecznie długim czasie był maksymalny. Aktualnie sprzedawany produkt przynosi coraz bardziej malejące zyski, a wprowadzenie nowego to dodatkowe koszty i utrata zysków ze sprzedaży produktu starego (rys. 1.).



Rys. 1. Ekonomiczny mechanizm wprowadzania nowego wyrobu do sprzedaży rynkowej

W praktycznych przypadkach biznesowych problem ten należy do kategorii strategicznych problemów firmy i dlatego powinien być rozwiązany w sposób optymalny za pomocą ścisłego rachunku ekonomicznego. Do tego celu mogą być wykorzystane m.in. analityczne metody oparte na programowaniu dynamicznym, predysponowanym szczególnie do rozwiązywania złożonych, wieloetapowych problemów decyzyjnych [1], [2], [13].

Repertuar decyzji biznesowych jest zbiorem dwustanowym:

- produkcja i sprzedaż starego wyrobu przy malejących zyskach;
- wprowadzenie i sprzedaż nowego wyrobu przy dodatkowych kosztach.

Decyzje podejmowane są w pewnych cyklicznych okresach planistycznych (bilansowych), a kryterium decyzyjnym jest łączny zysk ze sprzedaży w dostatecznie długim horyzoncie planistycznym.

ZAŁOŻENIA PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wieloetapowe metody programowania dynamicznego należą do klasy metod tzw. programowania matematycznego mieszczącego się w nurcie badań operacyjnych[1]. Zgodnie z ideą programowania matematycznego formalnym celem programowania dynamicznego jest optymalizacja określonej funkcji kryterium przy jednoczesnym spełnieniu różnych warunków brzegowych i ograniczeń. W zależności od postaci tej funkcji, kryterium i charakteru ograniczeń programowanie matematyczne dzieli się na różne klasy, np. liniowe, nieliniowe, deterministyczne, dyskretne, stochastyczne, dynamiczne, całkowitoliczbowe, rozmyte i inne [2], [3], [8], [10].

Szczególną pozycję w tej grupie zajmuje programowanie dynamiczne, które umożliwia rozwiązywanie bardzo obszernej gamy problemów praktycznych, głównie wieloetapowych, należących do klasy wieloetapowych procesów decyzyjnych, w których jedną ze zmiennych jest najczęściej czynnik czasowy (choć niekoniecznie). Programowanie dynamiczne określane jest jako matematyczna teoria wieloetapowych procesów decyzyjnych. Metoda optymalizacji wykorzystująca tę teorię sprowadza się do sekwencyjnego podejmowania decyzji w odpowiedniej kolejności. Muszą być ustalone kryteria, według których jest określane optymalne następstwo decyzji, dlatego cały tryb postępowania nosi nazwę optymalizacji wieloetapowej. Kolejne decyzje muszą stanowić optymalną strategię względem stanu będącego wynikiem pierwszej z podjętych decyzji, bez względu na to, jaki jest stan początkowy. Strategia optymalna może być wyznaczana zarówno przy użyciu metod deterministycznych, jak i metod stochastycznych. Z reguły procedury analityczne związane z realizacją metod programowania dynamicznego mają charakter dyskretny, a podstawę ich wykonywania stanowią metody numeryczne. Charakterystyczną cechą programowania dynamicznego jest to, że proces wyznaczania rozwiązań szerokiej klasy zagadnień optymalizacyjnych jest wieloetapowym procesem decyzyjnym, niezależnie od charakteru pierwotnie sformułowanego zadania.

---

[1] Optymalizacja wieloetapowa nazywana jest w literaturze programowaniem dynamicznym. Nazwa ta wywodzi się stąd, że pierwsze zastosowania tych metod miały miejsce w automatyce do optymalizacji układów dynamicznych.

Optymalizację wieloetapową można stosować tylko w tych zadaniach, w których proces rozwiązywania sprowadza się do procesu markowowskiego. Proces markowowski ma tę właściwość, że po podjęciu określonej liczby decyzji, np. k wynik podjęcia n decyzji, przy czym $k < n$, zależy on tylko od stanu procesu bezpośrednio po podjęciu k-tej decyzji oraz od ciągu decyzji podjętych później. Innymi słowy, dalszy przebieg procesu nie zależy od jego historii, lecz tylko od stanu procesu w danej chwili. Koncepcja bardzo uniwersalnych metod programowania dynamicznego oparta jest na tzw. zasadzie optymalności Bellmana, która orzeka, że „polityka optymalna ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji pozostałe decyzje muszą stanowić politykę optymalną ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji" [1, s. 21].

Najogólniej pod pojęciem metod programowania dynamicznego należy rozumieć metody poszukiwania ekstremum funkcji jednej lub wielu zmiennych za pomocą zależności rekurencyjnych, gdy obliczenia analityczne przeplatają się z procesami podejmowania decyzji w trakcie kolejnych stadiów (etapów, cykli) decyzyjnych. Najbardziej charakterystycznym terminem dla programowania dynamicznego jest pojęcie stadium procesu decyzyjnego, które bynajmniej nie musi dotyczyć wyłącznie zmiennej czasowej. Zgodnie z potrzebami praktycznymi badań operacyjnych najczęściej ciągła zmienna czasowa jest transformowana do postaci funkcji nieciągłej, skokowej, o stałych wartościach w poszczególnych przedziałach, która jest utożsamiana z pewnymi okresami decyzyjnymi, np. cyklami planistyczno-bilansowymi [1], [12], [15].

Zmienne występujące w zadaniach optymalizacji wieloetapowej dzielimy na dwie klasy: zmienne stanu i zmienne decyzyjne (niezależne). Zmienne decyzyjne są przedmiotem wyboru, a zmienne stanu reprezentują warunki podejmowania decyzji na początku każdego etapu i jednocześnie skutki ich podjęcia na końcu etapu (stadium). Podstawowe równanie funkcyjne programowania dynamicznego ma postać:

$$F(x) = \underset{y \in Y}{\mathit{ekstr}} \; [H(x,y,F(G(x,y)))], \tag{1}$$

gdzie: F – funkcja kryterium;
H – przestrzeń strategii dopuszczalnych;
G – ograniczenia i warunki brzegowe;
$x_i \in X$ – zmienne stanu;
$y_j \in Y$ – zmienne decyzyjne.

Zadania programowania dynamicznego rozwiązuje się z reguły za pomocą metod numerycznych, rzadziej analitycznych. Większość problemów praktycznych nie jest bowiem formułowana w postaci funkcji analitycznych, ale w formie numerycznej jako statystyki, tabele, wykresy, ciągi, szeregi. Aproksymacja funkcji numerycznych za pomocą funkcji analitycznych wnosi często zbyt duże uproszczenia, co wpływa na optymalność funkcji kryterium.

Zasadnicza różnica między tak popularnymi metodami programowania liniowego czy nieliniowego a programowaniem dynamicznym polega na tym, że w pierwszym przypadku rozwiązywany problem należy ściśle dostosować do wymagań konkretnych metod, np. metody simplex, natomiast w przypadku programowania dynamicznego odwrotnie – metody numeryczne programowania dynamicznego adaptuje się do konkretnych potrzeb rozwiązywanego zadania optymalizacyjnego. Ze względu na złożoność i odrębność poszczególnych problemów optymalizacyjnych ich rozwiązanie metodami programowania dynamicznego jest relatywnie trudniejsze i bardziej skomplikowane. Brak jest uniwersalnego wzorca i precyzyjnego algorytmu jak w przypadku metody simplex. Dlatego popularność metod programowania dynamicznego jest znacznie mniejsza niż innych, zwłaszcza tych, które doczekały się odpowiednich aplikacji komputerowych.

Nie dziwi fakt, że dla metod programowania dynamicznego brakuje odpowiedniej aplikacji komputerowej, gdyż jej stworzenie jest praktycznie niemożliwe. Pewne typowe klasy zadań optymalizacyjnych mają jedynie ogólne schematy logiczne i odpowiadające im formuły numeryczne. Przykładem takiej standardowej procedury na gruncie programowania dynamicznego jest techniczny problem remontu bądź wymiany urządzenia w trakcie procesu eksploatacji użytkowej czy związane z praktyką biznesową optymalne sterowanie dostawami zaopatrzeniowymi do magazynów.

W zadaniach rozwiązywanych metodami programowania dynamicznego badany proces (zjawisko) dzielimy na poszczególne etapy (stadia). Każde stadium charakteryzuje pewien stan badanego problemu, procesu. Jako stadium może być przyjęty pewien odcinek czasu albo stan techniczny systemu, okres bilansowy firmy itp. W ramach przyjętego stadium wartości zmiennych niezależnych i zależnych są stałe, a zmiany następują jedynie w trakcie występowania kolejnych stadiów. Liczbę oraz gęstość stadiów można dowolnie zmieniać lub zagęszczać w pobliżu ekstremum funkcji kryterium. Ze względów obliczeniowych liczbę stadiów liczy się od końca procesu, zmniejszając licznik w miarę zbliżania się do jego początku. W każdym stadium proces znajduje się w określonym stanie, który może być opisany za pomocą wielu zmiennych. Istotną zmienną jest wartość funkcji kryterium, która jest przedmiotem maksymalizacji lub minimalizacji. Sposób przechodzenia między poszczególnymi stadiami reguluje system pewnych równań rekurencyjnych. Liczbę stadiów dobiera się indywidualnie, do każdego optymalizowanego problemu oddzielnie i najogólniej obrazuje ona pewną zamkniętą koncepcję (cykl), np. prowadzenia działalności gospodarczej.

W obliczeniach numerycznych związanych ze stosowaniem metod programowania dynamicznego stosuje się dwie podstawowe strategie aproksymacji rozwiązań etapowych – aproksymację w przestrzeni funkcji i aproksymację w przestrzeni strategii. Pierwsza polega na tym, że poszukuje się na bieżąco optymalnych decyzji dla wciąż rosnącej liczby stadiów, aby znaleźć rozwiązanie optymalne dla całego procesu N-stadiowego. Druga rozpatruje kompleksowo cały proces N-stadiowy, w którym po każdym cyklu decyzyjnym ulepsza się początkowo przyjętą strategię.

Z uwagi na fakt, że metody programowania dynamicznego najszybciej można przedstawić na podstawie konkretnych zadań optymalizacyjnych, mechanizm jego funkcjonowania zostanie zobrazowany na praktycznym przykładzie biznesowej strategii wymiany produktu na rynku sprzedaży.

WIELOETAPOWA OPTYMALIZACJA SPRZEDAŻY RYNKOWEJ

Rozpatrzmy firmę wytwarzającą pewien produkt, którego sprzedaż rynkowa przynosi określone zyski. Niestety, względy konkurencyjności powodują relatywne starzenie się moralne tego wyrobu, co oznacza sukcesywny spadek zysków ze sprzedaży. W dostatecznie długim horyzoncie czasowym rzeczywisty zysk ze sprzedaży może spaść nawet poniżej poziomu rentowności produkcji i sprzedaży, co oznacza konieczność wycofania tego produktu i wprowadzenia na rynek nowego, bardziej konkurencyjnego wyrobu. Niech hipotetyczny dochód ze sprzedaży ilustruje poniższa tabela [7], [9], [14], [16].

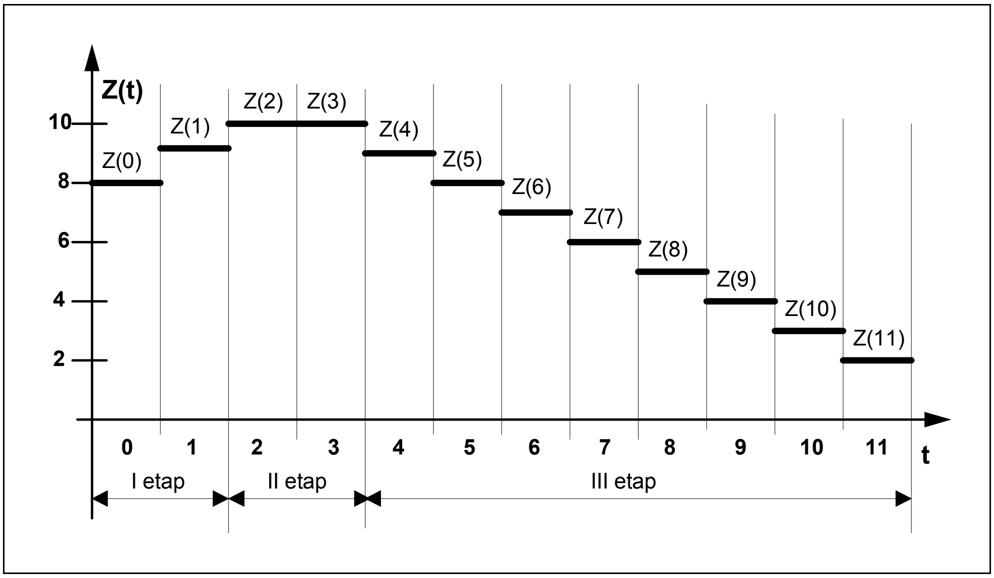
Tabela 1. Dochód ze sprzedaży jako funkcja rynkowego cyklu życia wyrobu

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Z(t)	**8**	**9**	**10**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

gdzie: t – umowne jednostki czasowe, np. miesiące, kwartały, lata;
Z(t) – prognozowany zysk ze sprzedaży jednostki danego wyrobu w poszczególnych okresach.

Zwraca uwagę specyficzne 3-etapowe kształtowanie się zysku Z(t) w poszczególnych okresach sprzedaży:

I etap: $t \in (0,1) \Rightarrow Z(1) > Z(2)$;
II etap: $t \in (2,3) \Rightarrow Z(3) = Z(4)$;
III etap: $t \in (4,5, \ldots 11) \Rightarrow Z(5) > Z(6) > \ldots > Z(12)$.



Rys. 2. Kształtowanie się zysku ze sprzedaży w funkcji rynkowego cyklu życia produktu (wg tabeli 1.)

W I etapie następuje sukcesywny wzrost zysku od wartości Z(0) do Z(1), co wynika z mechanizmów gospodarki rynkowej wejścia na rynek nowego produktu i związanych z tym kosztów promocji, marketingu i zdobywania klientów. II etap to stabilny okres największych zysków utrzymujących się na maksymalnym poziomie Z(2) = Z(3) = max, oznaczający największą sprzedaż i największe zyski. Kolejny, III etap rynkowego życia produktu to okres sukcesywnych spadków zysków w miarę upływającego czasu. W tym okresie należy podjąć decyzję o wprowadzeniu na rynek nowego produktu celem podtrzymania odpowiedniej kondycji finansowej przedsiębiorstwa. Wycofanie starego, coraz mniej rentownego produktu wiąże się z utratą aktualnych zysków, a ponadto pociąga dodatkowe koszty uruchomienia produkcji (sprzedaży) nowego wyrobu. Koszty wprowadzenia na rynek nowego produktu oznaczymy symbolem K, obrazują dodatkowe, jednorazowe nakłady poniesione przez firmę w wyniku skierowania do sprzedaży tego wyrobu.

Zgodnie z ideą programowania dynamicznego proces podejmowania decyzji realizowany jest w formule tzw. stadiów, które w tym przypadku oznaczać będą np. bilansowe okresy kontrolne. W każdym stadium (S) musimy podjąć jedną z dwóch dopuszczalnych decyzji:

$$D(S) = \begin{cases} D_S(0) & -\text{sprzedaż\_starego\_produktu} \\ D_S(1) & -\text{wprowadzenie\_nowego\_produktu} \end{cases}$$

1. $D_S(0)$ – w przypadku pozostawienia na rynku dotychczasowego produktu zysk będzie równy zyskowi danego stadium powiększonemu o sumaryczny zysk, jaki pozostał do końca prognozowanego okresu sprzedaży.
2. $D_S(1)$ – w przypadku wprowadzenia na rynek nowego produktu zysk będzie równy różnicy między dochodem ze sprzedaży w danym okresie a kosztami wprowadzenia wyrobu na rynek.

Formalny zapis tych zasad obrazuje następujące wyrażenie rekurencyjne, będące podstawowym wzorem wieloetapowego procesu podejmowania decyzji w konwencji programowania dynamicznego [1], [7], [11]:

$$X_S(t) = \max \begin{cases} Z(t) + X_S(t+1) \\ Z(0) + X_{S-1}(1) - K \end{cases}, \qquad (2)$$

gdzie: $Xs\ (t)$ – sumaryczny zysk ze sprzedaży w S-tym stadium procesu decyzyjnego w okresie t;

$Z(t)$ – normatywny bieżący zysk ze sprzedaży produktu w okresie t;

$Z(0)$ – normatywny zysk ze sprzedaży nowego produktu w początkowym okresie wejścia na rynek;

K – stałe jednorazowe koszty wprowadzenia nowego produktu na rynek.

W pierwszym, początkowym stadium decyzyjnym (S=1), w którym rozpoczynamy rynkową sprzedaż nowego produktu, zgodnie z wyrażeniem (2), zysk $X_1(t)$ będzie wyznaczany ze wzoru:

$$X_S(t) = \max \begin{cases} Z(t) \\ X(0) - K \end{cases}. \qquad (3)$$

Formuła (3) wynika z faktu, że zysk $X_{S-1}(t)$ dla pierwszego stadium S = 1 zapisany jako $X_0(t)$ jest równy zeru dla wszystkich wartości zmiennej t. Nie może być bowiem w przyszłości żadnego zysku, jeśli do końca procesu decyzyjnego nie pozostało już żadne stadium.

Należy podkreślić, że wyrażenia (2) i (3) nie mają uniwersalnego charakteru i nie pretendują do ogólnych formuł programowania dynamicznego, a zostały wyprowadzone wyłącznie na użytek rozważanego w pracy konkretnego problemu biznesowego.

Numeryczny schemat obliczeniowy algorytmu wyznaczania optymalnej strategii wymiany produktu rynkowego metodą programowania dynamicznego przedstawia poniższa ramka.

Schemat algorytmu wyznaczania optymalnej strategii wymiany produktu rynkowego według metody programowania dynamicznego

0°	Ustaw:	$i \equiv -1, \;\; j \equiv 0$	
1°	Podstaw:	$s \equiv j + 1$	
2°	Podstaw:	$t \equiv i + 1$	
3°	Podstaw:	$\underline{Z}(t) \mapsto Z(t)$	
4°	Podstaw:	$\underline{X}_{s-1}(t+1) \mapsto X_{s-1}(t+1)$	
5°	Oblicz:	$Y1 = Z(t) + X_{s-1}(t+1)$	
6°	Podstaw:	$\underline{Z}(0) \mapsto Z(0)$	
7°	Podstaw:	$\underline{X}_{S-1}(1) \mapsto X_{S-1}(1)$	
8°	Oblicz:	$Y2 = Z(0) + X_{S-1}(1) - K$	
9°	Wybierz:	$Y = \max \{Y1, Y2\}$	
10°	Jeśli:	$Y = Y1$	Pozostaw !
11°	Jeśli:	$Y = Y2$	Wymień !
12°	Jeśli:	$i = T$	Skok 2°
13°	Jeśli:	$S = \overline{S}$	**Koniec**
14°	Jeśli:	$j = S$	Skok 1°

Algorytm ten był podstawą opracowania stosownej aplikacji komputerowej, która posłużyła do prowadzenia szczegółowych badań analitycznych z zakresu optymalizacji strategii produkcji i sprzedaży rynkowej.

ANALIZA I INTERPRETACJA WYNIKÓW OBLICZENIOWYCH

Procedurę budowania optymalnej strategii decyzyjnej w przytoczonym przykładzie, zgodnie z wyrażeniem (3), rozpoczniemy od obliczenia zysku $X_S(t)$ dla stadium ostatniego, czyli według zasad programowania dynamicznego dla S = 1, a dla kolejnych t = 0,1,2,...11 będzie ona wyglądała następująco:

$$X_1(0) = \max \begin{Bmatrix} Z(0) \\ X(0) - K \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 - 10 = -2 \end{Bmatrix} = 8;$$

$$X_1(11) = \max \begin{Bmatrix} Z(11) \\ Z(0) - K \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 2 \\ 8 - 10 = -2 \end{Bmatrix} = 2.$$

Przeprowadzone obliczenia wskazują na konieczność utrzymania w sprzedaży dotychczasowego wyrobu przez kolejne okresy ostatniego stadium decyzyjnego (S = 1). Dla wszystkich wartości $t \in \{0,1,...11\}$ nawet gasnąca sprzedaż starego wyrobu jest ekonomicznie bardziej opłacalna niż promowanie nowego wyrobu – oczywiście ze względu na koszty wprowadzenia K = 10. Wszystkie rezultaty obliczeń postulują utrzymanie dotychczasowego produktu na rynku.

Przykładowe obliczenia wartości funkcji zysku $X_2(t)$ ($t \in 0,1,2,...11$) dla procesu dwustadiowego i więcej będą prowadzone według następującego schematu:

$$X_2(0) = \max \begin{Bmatrix} Z(0) + X_1(1) \\ X(0) + X_1(1) - K \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 8 + 9 = 17 \\ 8 + 9 - 10 = 7 \end{Bmatrix} = 17.$$

Zgodnie z zasadą równań rekurencyjnych uprzednio obliczone w poprzednim stadium wartości funkcji zysku $X_1(t)$ są obecnie wykorzystywane w stadium drugim S = 2. Postulat utrzymania w sprzedaży dotychczasowego produktu jest zachowany aż do chwili t = 10. Po raz pierwszy w naszej strategii występuje postulat wprowadzenia na rynek nowego produktu, ponieważ 7 > 5:

$$X_2(10) = \max \begin{Bmatrix} Z(10) + X_1(11) \\ X(0) + X_1(1) - K \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 3 + 2 = 5 \\ 8 + 9 - 10 = 7 \end{Bmatrix} = 7.$$

Wartości spodziewanej funkcji zysku dla wszystkich wyodrębnionych stadiów S = {1,2,3, ...} i kolejnych chwil t = {0,1,2} zestawione zostały w tabeli 2. Kolumny tej tabeli odpowiadają sekwencyjnym interwałom czasowym, w których wartość sprzedaży jest stała. Wiersze to poszczególne stadia procesu decyzyjnego związane z binarną decyzją – utrzymać dotychczasowy produkt na rynku, czy wprowadzić nowy produkt. Przykładowo, w tabeli zostało wyodrębnionych 16 stadiów. Podczas każdego z nich podejmowana jest decyzja o zachowaniu obecnego produktu na rynku lub wymianie na nowy produkt. Liczba stadiów decyzyjnych może być dowolna i zależy np. od prognozowanej długości „rynkowego życia" produktu. Poszczególne elementy $X_S(t)$ tej tabeli określają optymalną wielkość zysku w S-tym stadium, jaką przyniesienie stosowanie strategii o współrzędnych $S \in \overline{S}$ oraz $t \in T = \{0,1,2,...,11\}$. Im dłużej kontynuujemy naszą działalność gospodarczą, tym większy będzie sumaryczny zysk z jej tytułu, co doskonale ilustrują rosnące wartości funkcji zysku $X_S(t)$ w poszczególnych stadiach tego procesu dla rosnących $S \in \overline{S}$ oraz $t \in T$.

Tabela 2. Procedura wyznaczania optymalnej strategii produkcji / sprzedaży wyrobów rynkowych metodą programowania dynamicznego (wariant W1 – koszty wprowadzenia nowego wyrobu K = 10)

t	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
$X_1(t)$	8	9	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2
$X_2(t)$	17	19	20	19	17	15	13	11	9	7	7*	
$X_3(t)$	27	29	29	27	24	21	18	17*				
$X_4(t)$	37	38	37	34	30	27*						
$X_5(t)$	46	46	44	40	36	36*						
$X_6(t)$	54	53	50	46	45	44*						
$X_7(t)$	61	59	56	55	53	52	51*					
$X_8(t)$	67	65	65	63	61	59	58	57*				
$X_9(t)$	73	74	73	71	68	66	64	63	63*			
$X_{10}(t)$	82	82	81	78	75	72	72*					
$X_{11}(t)$	90	90	88	85	81	80	80*					
$X_{12}(t)$	98	97	95	90	89	88	88*					
$X_{13}(t)$	106	106	105	100	98	96	96*					
$X_{14}(t)$	114	114	110	108	106	104	104*					
$X_{15}(t)$	122	119	118	116	113	112	112*					
$X_{16}(t)$	127	127	126	123	121	120	119	118	117	117*		
$X_S(t)$*	– optymalny moment wymiany produktu na nowy											

Na podstawie tabeli 2. zbadamy wybrane szczegółowe przypadki podejmowania decyzji przy różnych warunkach wyjściowych dla pewnych charakterystycznych sytuacji biznesowych, utożsamianych na gruncie programowania dynamicznego z kolejnymi stadiami tej działalności.

Dla przykładu przeanalizujemy strategię postępowania (stare / nowe) w 10. stadium decyzyjnym. Jak wynika z tabeli 3., optymalna strategia dla biznesu 10-stadiowego przewiduje wymianę produktu na rynku w 5. stadium decyzyjnym, a takie postępowanie gwarantuje łączny zysk $X_{10}(0) = 82$:

$$S = 10: \quad < X_{10}(0), X_9(1), X_8(2), X_7(3), X_6(4), X_5(5) > \Rightarrow \text{wymiana produktu}$$

Tabela 3. Optymalna strategia biznesowa dla 10 stadiów decyzyjnych

t	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
$X_1(t)$	8	9	10	10	9_5	8	7	6	5	4	3	2
$X_2(t)$	17	19	20	19_5	17	15	13	11	9	7	7*	
$X_3(t)$	27	29	29_5	27	24	21	18	17*				
$X_4(t)$	37	38_5	37	34	30	27*						
$X_5(t)$	46_5	46	44	40	36	36_{10}*						
$X_6(t)$	54	53	50	46	45_{10}	44*						
$X_7(t)$	61	59	56	55_{10}	53	52	51*					
$X_8(t)$	67	65	65_{10}	63	61	59	58	57*				
$X_9(t)$	73	74_{10}	73	71	68	66	64	63	63*			
$X_{10}(t)$	82_{10}	82	81	78	75	72	72*					

Jeśli horyzont planistyczny wynosi 5 stadiów (tabela 3.), optymalna strategia postępowania nie przewiduje wprowadzania nowego produktu na rynek i przynosi zysk $X_{10}(0) = 46$:

$$S = 5: \quad < X_5(0), X_4(1), X_3(2), X_2(3), X_1(4) > \Rightarrow \text{bez konieczności wymiany}$$

Jak wynika z tabeli 4., charakterystycznym przypadkiem jest strategia dla stadium S = 8, która przy zysku $X_8(0) = 67$ nie wymaga jeszcze wprowadzania nowego produktu.

Tabela 4. Optymalna strategia biznesowa dla 8 stadiów decyzyjnych

t	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
$X_1(t)$	8	9	10	10	9	8	7	6_8	5	4	3	2
$X_2(t)$	17	19	20	19	17	15	13_8	11	9	7	7*	
$X_3(t)$	27	29	29	27	24	21_8	18	17*				
$X_4(t)$	37	38	37	34	30_8	27*						
$X_5(t)$	46	46	44	40_8	36	36*						
$X_6(t)$	54	53	50_8	46	45	44*						
$X_7(t)$	61	59_8	56	55	53	52	51*					
$X_8(t)$	67_8	65	65	63	61	59	58	57*				

Przedłużenie horyzontu planistycznego o jedno stadium S = 9 (tabela 5.) powoduje już konieczność wymiany produktu w stadium S = 4, gdyż takie postępowanie gwarantuje większy zysk $X_9(0) = 73$, niż gdyby wymiana taka nie została przeprowadzona $X(9) = 72$.

$$(X_9(0) = \xrightarrow{\text{wymiana S=4}} 73) \quad > \quad (X(9) = \xrightarrow{\text{bez wymiany}} 72)$$

Tabela 5. Optymalna strategia biznesowa dla 9 stadiów decyzyjnych

X(t)	*8*	*17*	*27*	*37*	*46*	*54*	*61*	*67*	***72***	*76*	*79*	*81*
T	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
$X_1(t)$	8	9	10	10	9	8	7	6	5_9	4	3	2
$X_2(t)$	17	19	20	19	17	15	13	11_9	9	7	7*	
$X_3(t)$	27	29	29	27	24	21	18_9	17*				
$X_4(t)$	37	38	37	34	30	27_9*						
$X_5(t)$	46	46	44	40	36_9	36*						
$X_6(t)$	54	53	50	46_9	45	44*						
$X_7(t)$	61	59	56_9	55	53	52	51*					
$X_8(t)$	67	65_9	65	63	61	59	58	57*				
$X_9(t)$	73_9	74	73	71	68	66	64	63	63*			

Rozwiązania za pomocą metod programowania dynamicznego mają z reguły bardzo konkretną interpretację merytoryczną. Poświadczeniem tej tezy jest kolejny wariant badawczy, w którym koszty inwestycji związanych z wprowadzeniem nowego produktu na rynek zostały zmniejszone o połowę i wynoszą K = 5. Intuicyjnie należy wnioskować, że okres wprowadzenia nowych produktów również powinien się skrócić. Wyznaczone metodą programowania dynamicznego optymalne strategie postępowania dla założeń jak w tabeli 1. i K = 5 zostały zawarte w tabeli 6.

Tabela 6. Procedura wyznaczania optymalnej strategii produkcji / sprzedaży wyrobów rynkowych metodą programowania dynamicznego (wariant W2 – koszty wprowadzenia nowego wyrobu K = 5)

T	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
$X_1(t)$	8	9	10	10	9	8_{6}	7	6	5	4	3	3*
$X_2(t)$	17	19	20	19	17_{6}	15	13	12*				
$X_3(t)$	27	29	29	27_{6}	24	22*						
$X_4(t)$	37	38	37_{6}	34	32*							
$X_5(t)$	46	46_{6}	44	42	41*							
$X_6(t)$	54_{6}	53	52	51	51_{10}	49*						
$X_7(t)$	61	61	61	61_{10}	58	57	56*					
$X_8(t)$	69	70	71_{10}	68	66	64*						
$X_9(t)$	78	80_{10}	78	76	73	73*						
$X_{10}(t)$	88_{10}	87	86	84	83_{14}*							
$X_{11}(t)$	95	95	94	93_{14}	92	91	90*					
$X_{12}(t)$	103	103	103_{14}	102	100	98*						
$X_{13}(t)$	111	112_{14}	112	110	107	106*						
$X_{14}(t)$	120_{14}	121	120	117	115*							
$X_{15}(t)$	129	129	127	125	124*							

Przykładowa optymalna strategia wprowadzania nowego produktu na rynek dla K = 5, przy założeniu, że proces decyzyjny obejmuje łącznie 14 stadiów

(S = 14), przynosząca sumaryczny zysk $X_{14}(0) = 120$, sugeruje dwie wymiany produktu na nowy: w stadium S = 10 i S = 6. Identyczna strategia wymiany występuje w przypadku, gdy koszty K = 10, a różnica dotyczy mniejszego poziomu zysków i krótszych terminów wymian.

Jak wynika z analiz tabeli 2. i tabeli 6., redukcja kosztów wprowadzania nowego produktu na rynek do poziomu K = 5 w stosunku do poprzedniego wariantu K = 10 spowodowała następujące konsekwencje:

1. Zwiększył się poziom zysku niemal na wszystkich etapach decyzyjnych, począwszy do wartości progowej dla S = 5.
2. Skróceniu uległ czas między poszczególnymi decyzjami biznesowymi – wprowadzać / nie wprowadzać nowy produkt na rynek.

Tendencje te występują bardzo wyraźnie podczas analizy odpowiednich strategii zawartych w tabelach 2. i 6. Fakt ów potwierdza dużą użyteczność metod programowania dynamicznego do analiz m.in. zjawisk ekonomicznych w różnych aspektach czasowych, kosztowych i biznesowych.

Zaprezentowany przykład liczbowy oparty został na bardzo zdeterminowanym modelu, w którym znane były zyski w poszczególnych interwałach czasowych, a koszty wprowadzania nowego wyrobu były stałe, pomimo zastosowania nowych technologii i innych, bardziej konkurencyjnych rozwiązań. Rynkowy cykl życia każdej nowej generacji produktów był także identyczny dla wszystkich stadiów w badanym horyzoncie biznesowym. Metodyka obliczeń według zasad programowania dynamicznego dopuszcza możliwość zmiany tych parametrów w kolejnych stadiach w ramach założonego horyzontu planistycznego. Wymaga to jednak bieżących korekt modelu w poszczególnych stadiach decyzyjnych (cyklach obliczeniowych). Praktycznie każdy nowy etap decyzyjny może bazować na zmodyfikowanych założeniach modelowych, a aktualne dane liczbowe należy jedynie uwzględnić w trakcie kolejnych rekurencji.

* * * * *

Metody programowania dynamicznego pomimo dużej uniwersalności i relatywnie bogatej teorii implikują szereg trudności przy próbach ich efektywnej implementacji. Podstawowa trudność stosowania metod programowania dynamicznego polega na tym, że nie ma ogólnych zasad postępowania przy numerycznym rozwiązywaniu zadań praktycznych, które byłyby słuszne dla każdego przypadku szczegółowego. Znane są w literaturze typowe klasy zadań, takie jak na przykład alokacja zasobów, optymalizacja trajektorii, sterowanie systemami, optymalizacja projektów czasowo-przestrzennych i inne, dla których zostały wypracowane efektywne procedury oraz algorytmy obliczeniowe podatne na komputerowe aplikacje. Bardziej szczegółowe przypadki wymagają opracowania odrębnych modeli i przygotowania niezbędnych procedur obliczeniowych, z reguły w formie odpowiednich równań rekurencyjnych. Relatywnie mała popularność metod programowania dynamicznego wynika głównie z braku uniwersalnej procedury adekwatnej dla szerokiej klasy zadań praktycznych. Nie bez znaczenia są też pewne bariery teoretyczne – modelowania i praktyczne – programowania, występujące przy próbach algorytmizacji i komputeryzacji numerycznych procedur obliczeniowych.

Jednocześnie należy podkreślić, iż żadne rozwiązanie konkretnego zagadnienia nie jest operacją stereotypową. Korzystając z jednostkowych właściwości strukturalnych poszczególnych zagadnień, zawsze można rozwiązać je w sposób indywidualny, minimalizując jednocześnie zaangażowane zasoby (materiałowe, finansowe, czasowe) lub maksymalizując oczekiwane korzyści i zyski. Elastyczna teoria i wysoce zindywidualizowane metody programowania dynamicznego są z natury predysponowane do rozwiązywania szczególnych przypadków optymalizacyjnych z różnych dziedzin, dla różnych klas modeli i rozmaitych problemów. W niektórych przypadkach praktycznych wobec bezradności i niskiej efektywności innych sformalizowanych metod programowania matematycznego tylko wieloetapowe metody programowania dynamicznego stają się alternatywną drogą prowadzącą do znalezienia rozwiązania optymalnego.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bellman R. E., Dreyfus S. E., *Programowanie dynamiczne*, PWE, Warszawa 1967.

[2] Błażewicz J., Cellary W., Słomiński R., Węglarz J., *Badania operacyjne dla informatyków*, WNT, Warszawa 1983.

[3] Bubnicki Z., *Podstawy informatycznych systemów zarządzania*, Wyd. PW, Wrocław 1993.

[4] Ficoń K., *Elementy mikroekonomiki*, BEL Studio, Warszawa 2003.

[5] Gates B., *Biznes szybki jak myśl*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2001.

[6] Grabski F., *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji,* PAN – IBS, Warszawa 2002.

[7] Griffin R. W., *Podstawy zarządzania organizacjami*, PWN, Warszawa 2000.

[8] Krawczyk S., *Badania operacyjne dla menedżerów*, Wyd. AE, Wrocław 1996.

[9] Nowak E., *Decyzyjne rachunki kosztów*, PWE, Warszawa 1994.

[10] *Programowanie matematyczne. Zbiór zadań*, red. S. Krawczyk, PWE, Warszawa 1980.

[11] Radzikowski W., *Programowanie liniowe i nieliniowe*, PWE, Warszawa 1981.

[12] Seidler J., Badach A., Molisz W., *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*, WNT, Warszawa 1988.

[13] Thomas M. J., *Podręcznik marketingu*, PWN, Warszawa 1999.

[14] Vollmuth H. J., *Controlling. Analizy operacyjne. Analizy strategiczne*, Placet, Warszawa 1995.

[15] Wentcel E., *Elementy programowania dynamicznego*, PWN, Warszawa 1986.

[16] Zimniewicz K., *Współczesne koncepcje i metody zarządzania*, PWE, Warszawa 2000.

ABSTRACT

The paper presents the way how to use dynamic programming methods for multistage optimization of production and sales of goods. Standards and high competitiveness of market economies cause a product's life to be relatively short, and as the time passes profits on its sales get smaller. This requires developing optimal production and sales strategy which would ensure

maximum profits in a reasonably long period of time. Therefore, at each planning stage, decisions have to be made whether to continue to produce and sell the old products, on which profits are getting smaller, or to launch a new product elevating profits to the maximal level. The instrumentation and methods for dynamic programming were used to solve this classic problem of multi-stage decisions.

Recenzent prof. dr hab. Franciszek Grabski