ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LI NR 3 (182) 2010

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej

ROZWIĄZANIE LINIOWEGO RÓWNANIA RÓŻNICOWEGO W PRZESTRZENI WYNIKÓW GENEROWANEJ PRZEZ CIĄGI DWUSTRONNE

STRESZCZENIE

W pracy rozważa się zagadnienie początkowe dla liniowego równania różnicowego o stałych współczynnikach określonego w przestrzeni ciągów dwustronnych $C(\mathbb{Z})$. Problem ten przedstawiono w ujęciu nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera. Wykorzystując model nabla tego rachunku z pochodną rozumianą jako różnica wsteczna, rozpatrywane zagadnienie rozwiązano w tzw. przestrzeni wyników. Wyniki powstają przez dzielenie elementów przestrzeni $C(\mathbb{Z})$ przez injekcyjne endomorfizmy tej przestrzeni. Przedstawione rozważania dają początek nabla-rachunkowi, który może być konkurencyjny w stosunku do rachunku opartego na dwustronnym przekształceniu $\mathcal{Z}$.

Słowa kluczowe:
ciągi dwustronne, równanie różnicowe, rachunek operatorów, model nabla, wyniki i operatory, element wykładniczy.

RÓWNANIE RÓŻNICOWE

Rozważmy liniowe równanie różnicowe rzędu n o stałych współczynnikach

$$b_0x(k) + b_1x(k-1) + \cdots + b_nx(k-n) = f(k), \tag{1}$$

gdzie $b_0, b_1, \ldots, b_n$ są danymi liczbami rzeczywistymi, takimi że $b_0, b_n \neq 0$, $\{x(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ jest ciągiem nieznanym, $\{f(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ jest ciągiem danym, natomiast $C(\mathbb{Z})$ jest liniową przestrzenią rzeczywistą ciągów rzeczywistych dwustronnych, tzn. $k \in \mathbb{Z}$[1].

[1] $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Równanie różnicowe (1) z warunkami początkowymi

$$x(k_0 - n + 1) = x^0_{k_0-n+1}, x(k_0 - n + 2) = x^0_{k_0-n+2}, \dots,$$
$$x(k_0 - 1) = x^0_{k_0-1}, x(k_0) = x^0_{k_0}, \quad (2)$$

gdzie $k_0 \in \mathbb{Z}$ oraz $x^0_{k_0-n+1}, x^0_{k_0-n+2}, \dots, x^0_{k_0} \in \mathbb{R}$ są z góry ustalonymi wartościami początkowymi, ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Istotnie, pozostałe wartości ciągu $\{x(k)\}$ możemy jednoznacznie określić na podstawie następujących zależności rekurencyjnych

$$x(k) = \frac{1}{b_0}\big[f(k) - [b_1 x(k-1) + \dots + b_n x(k-n)]\big] \quad \text{dla} \quad k > k_0 \quad (3)$$

oraz

$$x(k-n) = \frac{1}{b_n}\big[f(k) - [b_0 x(k) + \dots + b_{n-1} x(k-n+1)]\big] \quad \text{dla} \quad k \leqslant k_0. \quad (4)$$

W pracy tej wyznaczymy rozwiązanie zagadnienia (1), (2) w tzw. *przestrzeni wyników*, stosując *rachunek operatorów Bittnera*.

PODSTAWY RACHUNKU OPERATORÓW

Rachunkiem operatorów Bittnera [1, 2] nazywamy zespół

$$CO(L^0, L^1, S, T_q, s_q, Q), \quad (5)$$

gdzie L^0 i L^1 są przestrzeniami liniowymi (nad tym samym ciałem skalarów Γ[2]), takimi że $L^1 \subset L^0$. Operacja liniowa $S : L^1 \longrightarrow L^0$ (co zapisujemy $S \in \mathcal{L}(L^1, L^0)$), nazywana *pochodną* (abstrakcyjną), jest surjekcją. Ponadto Q jest zbiorem wskaźników q dla operacji $T_q \in \mathcal{L}(L^0, L^1)$, takich że $ST_q f = f$, $f \in L^0$, zwanych *pierwotnymi*, i dla operacji $s_q \in \mathcal{L}(L^1, L^1)$, takich że $s_q x = x - T_q S x$, $x \in L^1$, zwanych *warunkami granicznymi*. Jądro operacji S, tzn. $\operatorname{Ker} S$, nazywamy zbiorem *stałych* dla pochodnej S.

Łatwo sprawdzić, że warunki graniczne $s_q, q \in Q$ są rzutami L^1 na podprzestrzeń $\operatorname{Ker} S$.

Przez indukcję określa się ciąg przestrzeni $L^n, n \in \mathbb{N}$ [3] w taki sposób, że

$$L^n := \{x \in L^{n-1} : Sx \in L^{n-1}\}.$$

[2] W pracy tej będziemy zakładali, że L^0 i L^1 są przestrzeniami rzeczywistymi, tzn. $\Gamma := \mathbb{R}$.
[3] $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Wówczas

$$\ldots \subset L^n \subset L^{n-1} \subset \ldots \subset L^1 \subset L^0$$

oraz

$$S^n(L^{m+n}) = L^m,$$

gdzie

$$\mathcal{L}(L^n, L^0) \ni S^n := \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n-\text{razy}}, \quad m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli zdefiniujemy obiekty (5), to mówimy o *reprezentacji* lub *modelu* rachunku operatorów.

Z równaniem różnicowym (1) związany jest model nabla, w którym pochodna S jest różnicą wsteczną ∇.

MODEL NABLA

W pracy [9] wykazano, że zespół (5), gdzie $x = \{x(k)\} \in L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z})$, $q \equiv k_0 \in Q := \mathbb{Z}$ oraz

$$Sx \equiv \nabla x := \{x(k) - x(k-1)\}, \tag{6}$$

$$T_{k_0}x := \begin{cases} -\sum\limits_{i=k+1}^{k_0} x(i) & \text{dla} \quad k < k_0 \\ \qquad 0 & \text{dla} \quad k = k_0 \\ \sum\limits_{i=k_0+1}^{k} x(i) & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

$$s_{k_0}x := \{x(k_0)\} \tag{8}$$

tworzy dyskretny ∇-model rachunku operatorów Bittnera z pochodną jako różnicą wsteczną ∇.

RÓWNANIE RÓŻNICOWE W MODELU NABLA

Stosując model nabla, wyrazimy równanie (1) za pomocą różnicy wstecznej $S \equiv \nabla$.

Twierdzenie 1. *Równanie różnicowe* (1) *można sprowadzić do postaci*

$$a_n S^n x + a_{n-1} S^{n-1} x + \cdots + a_1 S x + a_0 x = f, \tag{9}$$

gdzie $f = \{f(k)\} \in L^0 = C(\mathbb{Z}), x = \{x(k)\} \in L^n = C(\mathbb{Z})$ *oraz*

$$a_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} b_i, \quad j \in \overline{0,n} := \{0,1,\ldots,n\}. \tag{10}$$

D o w ó d . Musimy pokazać, że

$$\sum_{j=0}^{n} b_j x(k-j) = \sum_{j=0}^{n} a_j S^j x(k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k). \tag{11}$$

Wzór (11) wykażemy przez indukcję względem $n \in \mathbb{N}_0$. Dla $n = 0$ równość (11) jest oczywista. Niech B będzie operacją przesunięcia wstecz

$$Bx(k) := x(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mamy stąd $Bx = (I-S)x$[4] oraz

$$x(k-m) = B^m x(k) = (I-S)^m x(k) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} S^j x(k), \ k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Wobec tego, na podstawie założenia indukcyjnego i (12), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} b_j x(k-j) &= \sum_{j=0}^{n} b_j x(k-j) + b_{n+1} x(k-n-1) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k) + b_{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} S^j x(k) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j} b_{n+1} S^j x(k) \\
&\quad + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} b_{n+1} S^{n+1} x(k) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \Big[\sum_{i=j}^{n} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k) + (-1)^j \binom{n+1}{j} b_{n+1} S^j x(k)\Big] \\
&\quad + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} b_{n+1} S^{n+1} x(k) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n+1} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k) + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} b_{n+1} S^{n+1} x(k) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=j}^{n+1} (-1)^j \binom{i}{j} b_i S^j x(k). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

[4] I jest operacją identycznościową określoną na $L^0 = L^1 = C(\mathbb{Z})$.

Przykład 1. Dwustronny ciąg Fibonacciego

k	$\dots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\dots$
$x(k)$	$\dots$	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	$\dots$

jest jednoznacznie określony za pomocą równania rekurencyjnego

$$x(k) - x(k-1) - x(k-2) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

i warunków początkowych

$$x(-1) = 1, x(0) = 0. \tag{14}$$

Mamy tutaj $b_0 = 1, b_1 = b_2 = -1$. Stosując wzór (10), otrzymujemy $a_0 = b_0 + b_1 + b_2 = -1, a_1 = b_1 + 2b_2 = 3, a_2 = b_2 = -1$. Wobec tego w modelu nabla równanie (13) przyjmuje postać

$$-S^2 x + 3Sx - x = 0 \Longleftrightarrow S^2 x - 3Sx + x = 0, \tag{15}$$

gdzie $x = \{x(k)\}$ jest ciągiem Fibonacciego. ▲

Ponieważ

$$S^i x = (I - B)^i x = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} B^j x = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} x(k-j), \tag{16}$$

zatem warunki początkowe (2) dla równania (1) wyznaczają następujące warunki graniczne

$$s_{k_0} S^i x = \{\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} x^0_{k_0 - j}\} =: c_i \in \operatorname{Ker} S, \quad i \in \overline{0, n-1} \tag{17}$$

dla równania (9).

Przykład 2. Stosując (17), stwierdzamy, że warunkom początkowym (14) (określonym dla $k_0 = 0$) odpowiadają następujące warunki graniczne $c_0 = \{0\}, c_1 = \{-1\}$. Są to ciągi stałe należące do $\operatorname{Ker} S$. Jest to przestrzeń izomorficzna z $\mathbb{R}$, ponieważ każdemu ciągowi stałemu odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista określająca jego wyraz ogólny. Możemy zatem umownie napisać, że $c_0 = 0, c_1 = -1$. ▲

Przy danych warunkach granicznych c_i, na podstawie (17) można jednoznacznie określić warunki początkowe $x^0_{k_0 - i}$. W tym celu wystarczy skorzystać ze wspomnianego izomorfizmu, otrzymując układ równań liniowych

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} x^0_{k_0 - j} = c_i, \quad i \in \overline{0, n-1},$$

z którego $x^0_{k_0}, x^0_{k_0-1}, \ldots x^0_{k_0-n+1}$ obliczamy rekurencyjnie

$$\begin{cases} x^0_{k_0} = c_0 \\ x^0_{k_0-i} = (-1)^i \big(c_i - \sum\limits_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} x^0_{k_0-j}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}.$$

Wniosek 1. *Warunki początkowe* (2) *i graniczne* (17) *są równoważne.*

Zauważmy również, że każde równanie różnicowe

$$a_n S^n x + a_{n-1} S^{n-1} x + \cdots + a_1 S x + a_0 x = f$$

może być sprowadzone do postaci (1) bez konieczności obliczania iteracji S^i. W tym przypadku współczynniki $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$ wyznaczamy rekurencyjnie na podstawie (10), otrzymując

$$\begin{cases} b_n = (-1)^n a_n \\ b_{n-j} = (-1)^{n-j} a_{n-j} - \sum\limits_{i=n-j+1}^{n} \binom{i}{n-j} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}. \tag{18}$$

Przykład 3. Dla równania

$$S^3 x + 2S^2 x - 3Sx + 4x = f, \tag{19}$$

gdzie $a_3 = 1, a_2 = 2, a_1 = -3, a_0 = 4$, na podstawie (18) otrzymujemy $b_3 = -a_3 = -1$, $b_2 = a_2 - 3b_3 = 5, b_1 = -a_1 - 2b_2 - 3b_3 = -4, b_0 = a_0 - b_1 - b_2 - b_3 = 4$. Zatem (19) przyjmuje postać

$$4x(k) - 4x(k-1) + 5x(k-2) - x(k-3) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

gdzie $x = \{x(k)\}, f = \{f(k)\}$. ▲

Obok pochodnej, pierwotnych i warunków granicznych podstawowymi obiektami rachunku operatorów Bittnera są *wyniki* i *operatory* [1, 2], które wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia (9), (17).

WYNIKI I OPERATORY

Przy danej przestrzeni liniowej L (nad ciałem Γ) i przemiennej półgrupie multiplikatywnej $\pi(L)$ endomorfizmów i zarazem injekcji przestrzeni L staje się możliwe wprowadzenie uporządkowanych par

$$\xi := [f, U], \quad f \in L, \ U \in \pi(L)$$

i relacji równości

$$([f,U]=[g,V]) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (Vf=Ug), \quad f,g\in L,\ U,V\in\pi(L),$$

która jest typu równoważności.

Relacja ta dzieli zbiór wszystkich rozpatrywanych par na klasy abstrakcji, które nazywamy *wynikami*. Wynikiem nazywamy również dowolnego reprezentanta ξ danej klasy i używamy dla niego zapisu ułamkowego

$$\xi=\frac{f}{U}:=[f,U].$$

Zbiór wyników $\Xi(L,\pi(L))$ (oznaczany krótko przez $\Xi(L)$) z działaniami

$$\frac{f}{U}+\frac{g}{V}:=\frac{Vf+Ug}{UV}, \quad \gamma(\frac{f}{U}):=\frac{\gamma f}{U}, \quad f,g\in L,\ \gamma\in\Gamma,\ U,V\in\pi(L)$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem Γ.
Elementy przestrzeni L możemy traktować jako wyniki, bo odwzorowanie

$$f\longmapsto\frac{Uf}{U},\ f\in L,\ U\in\pi(L)$$

jest izomorfizmem.
W $\Xi(L)$ określa się ponadto działanie

$$R(\frac{f}{U}):=\frac{Rf}{U},$$

gdzie $f\in L,\ R\in\mathcal{L}(L,L),\ U\in\pi(L),\ UR=RU$.

Przykład 4. Niech będzie dana ustalona pierwotna T_q odpowiadająca pochodnej S. Dalej niech $\pi_{T_q}(L^0)$ będzie ustaloną półgrupą zawierającą operację T_q. Wówczas wyniki $e_c\in\Xi(L^0,\pi_{T_q}(L^0))$ postaci

$$e_c:=\frac{c}{T_q}$$

nie należą do przestrzeni L^0 dla każdego $c\in\operatorname{Ker}S\setminus\{0\}$ [2]. ▲

Z przykładu tego wynika, że $\Xi(L)\setminus L$ może być zbiorem niepustym.

Element $\xi\in L$ nazywamy *wynikiem regularnym*, natomiast element $\xi\in\Xi(L)\setminus L$ *wynikiem singularnym* [8].

Niech będzie dany endomorfizm $R\in\mathcal{L}(L,L)$ przemienny z operacjami należącymi do półgrupy $\pi(L)$. Operację liniową określoną wzorem

$$\mu\frac{f}{V}:=\frac{Rf}{UV}, \quad f\in L,\ U,V\in\pi(L)$$

nazywamy *operatorem* i oznaczamy symbolem $\mu:=\frac{R}{U}$.

Operator jest więc endomorfizmem przestrzeni wyników $\Xi(L)$. Operator $\mu_0 := \frac{UR}{U}$, gdzie $U \in \pi(L)$, utożsamiamy z endomorfizmem R. Łatwo sprawdzić, że suma operatorów, iloczyn operatora przez element z ciała Γ i złożenie operatorów jest operatorem. Ponadto dzielenie przez operator, którego licznik jest injekcją, w następujący sposób

$$\frac{\xi}{\mu} := \frac{U}{R}\xi$$

prowadzi również do operatora.

ABSTRAKCYJNE PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A-CARSONA

Dla elementu $x \in L^n$ zachodzi następujący wzór Taylora (tw. 6 [2])

$$x = c_0 + T_q c_1 + \cdots + T_q^{n-1} c_{n-1} + T_q^n S^n x, \tag{20}$$

gdzie

$$c_i = s_q S^i x, \quad i \in \overline{0, n-1}.$$

Mamy stąd (tw. 9 [2])

$$S^n x = P_q^n x - P_q^n c_0 - P_q^{n-1} c_1 - \cdots - P_q c_{n-1}, \tag{21}$$

gdzie

$$P_q^i = \frac{I}{T_q^i}, \quad i \in \overline{1, n}$$

jest i-tą iteracją *operatora Heaviside'a* P_q, natomiast $I := id_{L^0}$ jest operacją identycznościową określoną na L^0.

Wzór (21) odpowiada transformacie Laplace'a-Carsona n-tej pochodnej funkcji $x = \{x(t)\}$ [4]:

$$\mathcal{L_C}[x^{(n)}(t)] = p^n \mathcal{L_C}[x(t)] - p^n x(0^+) - p^{n-1} x'(0^+) - \cdots - p x^{(n-1)}(0^+),$$

gdzie

$$\mathcal{L_C}[x(t)] := p \int\limits_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

jest przekształceniem Laplace'a-Carsona i $p \in \mathbb{C}$[5].

[5] $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych.

W związku z tą analogią przedstawienie wyniku ξ jako funkcji operatora Heaviside'a w postaci $\xi = X(P_q)c$, gdzie $c \in \operatorname{Ker} S$, nazywamy *abstrakcyjnym przekształceniem Laplace'a-Carsona*. Natomiast operator $X(P_q)$ nazywamy *transformatą Laplace'a-Carsona* wyniku ξ. Jeżeli $X(P_q) := \frac{L(P_q)}{M(P_q)}$ oznacza funkcję wymierną operatora Heaviside'a, to przez $\gamma\frac{L(P_q)}{M(P_q)}c$ lub $\frac{\gamma L(P_q)}{M(P_q)}c$, gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$, będziemy rozumieli wynik $\frac{L(P_q)}{M(P_q)}(\gamma c)$.

Przykład 5. Wynikowi singularnemu e_c z przykładu 4. odpowiada transformata $E_c(P_q) = P_q$. ▲

Przykład 6. W modelu nabla ciąg

$$x = \{(1-\lambda)^{k_0-k}c\}, \quad \text{gdzie} \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \tag{22}$$

będący rozwiązaniem zagadnienia

$$\left\{\begin{array}{l} Sx = \lambda x \\ s_{k_0}x = c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x(k) - x(k-1) = 0 \\ x(k_0) = c \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

nazywamy *elementem wykładniczym* (*o wykładniku* λ)[6].

Rozwiązując równania różnicowe metodą operatorową, zwykle stosuje się przekształcenie Laurenta $\mathcal{Z}$. W przypadku, gdy dziedziną równania jest przestrzeń $C(\mathbb{Z})$, należałoby korzystać z przekształcenia dwustronnego

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} := \mathcal{Z}_-[x(k)] + \mathcal{Z}_+[x(k)],$$

gdzie

$$\mathcal{Z}_-[x(k)] := \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)z^{-k}, \quad \mathcal{Z}_+[x(k)] := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \tag{24}$$

i $z \in \mathbb{C}$.

Dla ciągu (22) szeregi (24) są zbieżne odpowiednio w obszarach

$$\mathbb{D}_- := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < |1-\lambda|^{-1}\}, \quad \mathbb{D}_+ := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| > |1-\lambda|^{-1}\}.$$

[6] W (23), zgodnie z umową, ciąg stały $\{c\}$ utożsamiamy z liczbą c.

Ponieważ $\mathbb{D}_- \cap \mathbb{D}_+ = \emptyset$, dwustronne przekształcenie $\mathcal{Z}$ dla elementu wykładniczego (22) nie istnieje. Istnieje natomiast abstrakcyjna transformata Laplace'a-Carsona. Zauważmy najpierw, że zagadnienie

$$Sx = \lambda x, \quad s_{k_0}x = 0$$

ma tylko rozwiązanie zerowe, co jest równoważne implikacji

$$[\ (I - \lambda T_{k_0})x = 0\ ] \Longrightarrow [\ x = 0\ ].$$

Możemy zatem rozważać półgrupę $\pi_{T_{k_0}}(L^0)$ zawierającą injekcję $I - \lambda T_{k_0}$ i rozwiązać zagadnienie (23) w przestrzeni wyników $\Xi(L^0, \pi_{T_{k_0}}(L^0))$. Mianowicie z (23) otrzymujemy $x - c = \lambda T_{k_0} x$, czyli

$$x = \frac{c}{I - \lambda T_{k_0}}.$$

Ostatecznie operator $\frac{P_{k_0}}{P_{k_0} - \lambda}$ [7] jest transformatą Laplace'a-Carsona elementu wykładniczego (22), tzn.

$$\{(1-\lambda)^{k_0 - k} c\} = \frac{P_{k_0}}{P_{k_0} - \lambda} c. \tag{25}$$

Ponieważ dla $\lambda \neq 0$, mamy

$$\frac{I}{P_{k_0} - \lambda} = \lambda^{-1} \left(\frac{P_{k_0}}{P_{k_0} - \lambda} - I \right),$$

zatem, na podstawie (25), otrzymujemy również

$$\left\{ \frac{(1-\lambda)^{k_0 - k} - 1}{\lambda} c \right\} = \frac{I}{P_{k_0} - \lambda} c. \qquad \blacktriangle \tag{26}$$

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA RÓŻNICOWEGO W PRZESTRZENI WYNIKÓW

Rozważmy ponownie model nabla rachunku operatorów (5). Ponadto niech

$$M(S) := a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0 I.$$

[7] Jeżeli V jest operacją A (lub operatorem μ) i $\alpha \in \mathbb{R}$, to będziemy pisali umownie $V + \alpha$ oraz $\alpha - V$ zamiast $V + \alpha I$ oraz $\alpha I - V$.

Z (3), (4) wynika, że jednorodne równanie różnicowe

$$b_0x(k) + b_1x(k-1) + \cdots + b_nx(k-n) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

z zerowymi warunkami początkowymi

$$x(k_0 - i) = 0, \quad i \in \overline{0, n-1} \tag{28}$$

ma tylko rozwiązanie zerowe $x = \{0\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Z (17) wynika, że warunki początkowe (28) generują jednorodne warunki graniczne

$$s_{k_0}S^ix = 0, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{29}$$

To z kolei na podstawie twierdzenia 1. oznacza, że prawdziwa jest implikacja

$$[\ M(S)x = 0, s_{k_0}S^ix = 0, i \in \overline{0, n-1}\ ] \Longrightarrow [\ x = 0\ ]. \tag{30}$$

Ze wzoru Taylora (20), dla $m \leqslant n$ mamy

$$T^n_{k_0}S^mx = T^{n-m}_{k_0}(T^m_{k_0}S^mx) = T^{n-m}_{k_0}x - \sum_{i=0}^{m-1} T^{n-m+i}_{k_0}s_{k_0}S^ix,$$

skąd, po uwzględnieniu (29), otrzymujemy $T^n_{k_0}S^mx = T^{n-m}_{k_0}x, m \in \overline{0, n}$. Korzystając z tej własności, nietrudno sprawdzić, że implikacje (30) oraz

$$[\ M^*(T_{k_0})x = 0\ ] \Longrightarrow [\ x = 0\ ],$$

gdzie

$$M^*(T_{k_0}) := a_nI + a_{n-1}T_{k_0} + \cdots + a_1T^{n-1}_{k_0} + a_0T^n_{k_0},$$

są równoważne.

Możemy zatem równanie różnicowe (9) z warunkami granicznymi (17) rozwiązać w przestrzeni wyników $\Xi(L^0, \pi_{T_{k_0}}(L^0))$, gdzie $\pi_{T_{k_0}}(L^0)$ jest półgrupą zawierającą endomorfizm $M^*(T_{k_0}) = T^n_{k_0}M(P_{k_0})$. Mianowicie, korzystając z (21), otrzymujemy

$$\begin{aligned}&a_n(P^n_{k_0}x - P^n_{k_0}c_0 - P^{n-1}_{k_0}c_1 - \cdots - P_{k_0}c_{n-1})\\ &+a_{n-1}(P^{n-1}_{k_0}x - P^{n-1}_{k_0}c_0 - P^{n-2}_{k_0}c_1 - \cdots - P_{k_0}c_{n-2}) + \cdots + a_1(P_{k_0}x - P_{k_0}c_0) + a_0x = f,\end{aligned}$$

czyli

$$M(P_{k_0})x = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(P_{k_0})c_i + f, \tag{31}$$

gdzie

$$M_i(P_{k_0}) := \sum_{j=i+1}^{n} a_j P_{k_0}^{j-i}, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{32}$$

Przyjmując, że $f = F(P_{k_0})c$, gdzie $c \in \operatorname{Ker} S$, z (31) otrzymujemy

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i(P_{k_0})}{M(P_{k_0})} c_i + \frac{F(P_{k_0})}{M(P_{k_0})} c. \tag{33}$$

Jeżeli wyniki

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i(P_{k_0})}{M(P_{k_0})} c_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i^*(T_{k_0})}{M^*(T_{k_0})} c_i, \quad \xi_2 = \frac{F(P_{k_0})}{M(P_{k_0})} c = \frac{T_{k_0}^n F^*(T_{k_0})}{M^*(T_{k_0})} c,$$

gdzie

$$M_i^*(T_{k_0}) := T_{k_0}^n M_i(P_{k_0}) = \sum_{j=i+1}^{n} a_j T_{k_0}^{n-j+i}, \quad F^*(T_{k_0}) = F(I/T_{k_0}),$$

są regularne, to wynik (33) jest rozwiązaniem zagadnienia (9), (17). Przedstawiając wyniki ξ_1, ξ_2 jako elementy przestrzeni $C(\mathbb{Z})$, otrzymujemy rozwiązanie tego zagadnienia w przestrzeni ciągów dwustronnych $C(\mathbb{Z})$.

Przykład 7. Zagadnienie określające w ∇-modelu jednoznacznie ciąg Fibonacciego ma postać

$$\begin{cases} S^2x - 3Sx + x = 0 \\ s_0x = c_0 = \{0\}, \quad s_0Sx = c_1 = \{-1\} \end{cases}$$

(patrz przykłady 1. i 2.).

Mamy zatem

$$(P_0^2 - 3P_0 + 1)x = P_0\{-1\},$$

czyli

$$x = \frac{P_0}{P_0^2 - 3P_0 + 1}\{-1\} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(P_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2})}\{1\} - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(P_0 - \frac{3+\sqrt{5}}{2})}\{1\}.$$

Na podstawie (26) mamy

$$x = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-k} - \left(1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-k} \right] \right\},$$

skąd po przekształceniach ostatecznie uzyskujemy

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Jest to zwarta postać wyrazu ogólnego ciągu Fibonacciego. Dla wskaźników całkowitych nieujemnych jest ona znana z literatury jako *wzór Bineta*. Z powyższych rozważań wynika, że ciąg (34) jest określony dla dowolnych liczb całkowitych (por. [3, 5]). Elementy $x(k)$ dla ujemnych k nazywamy *liczbami negaFibonacciego* [6]. Mamy przy tym $x(-k) = (-1)^{k+1}x(k), k \in \mathbb{Z}$. ▲

Przykład 8. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(S-\lambda)^{n+1}x = [(1-\lambda)-B]^{n+1}x &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(1-\lambda)^{n+1-i}B^i x \\ &= \{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(1-\lambda)^{n+1-i}x(k-i)\},\end{aligned}$$

gdzie $x = \{x(k)\}$.

Niech

$$x = \left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n}c\right\}, \tag{35}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

oraz

$$r^{\overline{n}} := \prod_{i=0}^{n-1}(r+i), \; r^{\overline{0}} := 1, \quad r \in \mathbb{R}$$

jest tzw. *potęgą wstępującą* lub *symbolem Pochhammera*.

W modelu nabla ciąg (35) nazywamy *jednomianem wykładniczym* (*stopnia* n *o wykładniku* λ). Pokażemy, że jest on rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases}(S-\lambda)^{n+1}x = 0 \\ s_{k_0}S^i x = 0, \; i \in \overline{0, n-1} \\ s_{k_0}S^n x = c\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(1-\lambda)^{n+1-i}x(k-i) = 0 \\ x(k_0-i) = 0, \; i \in \overline{0, n-1} \\ x(k_0-n) = (-1)^n c\end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W tym celu obliczymy najpierw $(S-\lambda)x$. Mamy więc

$$(S-\lambda)x=(S-\lambda)\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n}c\right\}$$
$$=\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n}c-\frac{(k-k_0-1)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right\}$$
$$-\lambda\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n}c\right\}=\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right.$$
$$\left.-\frac{(k-k_0-1)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right\}=\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n}}-(k-k_0-1)^{\overline{n}}}{n!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right\}$$
$$=\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right\}.$$

Skorzystaliśmy tutaj z własności $r^{\overline{n}}-(r-1)^{\overline{n}}=nr^{\overline{n-1}}$.
Zauważmy teraz, że

$$(S-\lambda)^{n+1}x=(S-\lambda)^n(S-\lambda)x=(S-\lambda)^n\left\{\frac{(k-k_0)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}(1-\lambda)^{k_0-k-n+1}c\right\}.$$

Ostatecznie, przez indukcję względem n, otrzymujemy

$$(S-\lambda)^{n+1}x=(S-\lambda)\{(1-\lambda)^{k_0-k}c\},$$

ale $(S-\lambda)\{(1-\lambda)^{k_0-k}c\}=\{0\}$, bo $\{(1-\lambda)^{k_0-k}c\}$ jest elementem wykładniczym (22).

Ponieważ

$$(k-k_0-i)^{\overline{n}}_{|k=k_0}=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad i\in\overline{0,n-1}\\ (-1)^n n! & \text{dla}\quad i=n\end{cases},$$

zatem warunki początkowe

$$x(k_0-i)=0,\ i\in\overline{0,n-1},\quad x(k_0-n)=(-1)^n c$$

są spełnione. Korzystając z (16), nietrudno również sprowadzić, że ciąg (35) spełnia warunki graniczne

$$s_{k_0}S^i x=\delta_i^n c,\quad i\in\overline{0,n},$$

gdzie δ_i^n jest symbolem Kroneckera.

Ponieważ

$$(S-\lambda)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}(-\lambda)^{n+1-i}S^i,$$

zatem

$$M(P_{k_0}) = (P_{k_0} - \lambda)^{n+1},$$

gdzie $a_{n+1} = 1$. Stosując wzór (32), mamy również

$$M_n(P_{k_0}) = \sum_{j=n+1}^{n+1} a_j P_{k_0}^{j-n} = P_{k_0}.$$

W związku z tym, na podstawie (33), uzyskujemy jednomian wykładniczy (35) w postaci wyniku regularnego jako funkcji operatora Heaviside'a

$$\left\{ \frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!} (1-\lambda)^{k_0-k-n} c \right\} = \frac{P_{k_0}}{(P_{k_0} - \lambda)^{n+1}} c. \tag{36}$$

W szczególności wynika stąd wzór (25) oraz

$$\left\{ \frac{(k-k_0)^{\overline{n}}}{n!} c \right\} = \frac{c}{P_{k_0}^n} = T_{k_0}^n c. \tag{37}$$

W [9] wzór (37) uzyskano, korzystając z definicji pierwotnej T_{k_0}. ▲

Przykład 9. W modelu nabla zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} 4x(k) - 4x(k-1) + x(k-2) = (k+3)(k+4) \\ x(-4) = x(-3) = 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{38}$$

przyjmuje postać

$$\begin{cases} S^2 x + 2Sx + x = f \\ s_{-3}x = c_0 = 1, s_{-3}Sx = c_1 = 0 \end{cases},$$

gdzie $x = \{x(k)\}, f = \{(k+3)(k+4)\}$.

Mamy stąd

$$(P_{-3}^2 + 2P_{-3} + 1)x = (P_{-3}^2 + 2P_{-3} + \frac{2}{P_{-3}^2})\{1\},$$

czyli

$$\begin{aligned} x &= \frac{P_{-3}^4 + 2P_{-3}^3 + 2}{P_{-3}^2(P_{-3}^2 + 2P_{-3} + 1)}\{1\} = P_{-3}\frac{P_{-3}^4 + 2P_{-3}^3 + 2}{P_{-3}^3(P_{-3}+1)^2}\{1\} \\ &= \frac{2}{P_{-3}^2}\{1\} - \frac{4}{P_{-3}}\{1\} + \{6\} - \frac{P_{-3}}{(P_{-3}+1)^2}\{1\} - \frac{5P_{-3}}{P_{-3}+1}\{1\}. \end{aligned}$$

Stosując (36), otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia (38) w przestrzeni ciągów dwustronnych $C(\mathbb{Z})$:

$$x(k) = (k+3)(k - 2^{-4-k}) - 5 \cdot 2^{-3-k} + 6, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad ▲$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Bittner R., *Algebraic and analytic properties of solutions of abstract differential equations*, 'Dissertationes Math.', 41, PWN, Warszawa 1964.

[2] Bittner R., *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.

[3] Dimovski I. H., Kiryakova V. S., *Discrete operational calculi for two-sided sequences*, 'The Fibonacci Quarterly', Proc. 5th Internat. Conf. on Fibonacci Numbers and Their Applications, 1993, 5, pp. 159–168.

[4] Ditkin V. A., Prudnikov A. P., *Integral transforms and operational calculus*, Pergamon, Oxford 1965.

[5] Fishburn P. C., Odlyzko A. M., Roberts F. S., *Two-sided generalized Fibonacci sequences*, 'The Fibonacci Quarterly', 1989, 27, pp. 352–361.

[6] Knuth D. E., *Negafibonacci numbers and the hyperbolic plane*, the 'Pi Mu Epsilon J. Sutherland Frame' memorial lecture at 'MathFest 2007' in San José, CA, 2007-08-04.

[7] Kudrewicz J., *Przekształcenie Z i równania różnicowe*, PWN, Warszawa 2000.

[8] Wysocki H., *The result derivative. Distributive results*, 'Acta Mathematica Hungarica', 1989, 53 (3–4), pp. 289–307.

[9] Wysocki H., *Model nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera dla różnicy wstecznej*, „Zeszyty Naukowe" AMW, 2010, nr 2, s. 37–48.

THE SOLUTION OF A LINEAR DIFFERENCE EQUATION IN THE SPACE OF RESULTS GENERATED BY TWO-SIDED SEQUENCES

ABSTRACT

The paper analyses the initial value problem for a linear difference equation with constant coefficients, defined in the space $C(\mathbb{Z})$ of two-sided sequences. The above problem has been presented using the non-classical Bittner operational calculus approach. Using the ∇-model of that calculus with its derivative understood as a backward difference, the issue in question has been solved in a so-called results' space. The results are obtained by dividing the elements of the $C(\mathbb{Z})$ space by the injective endomorphisms of that space. The described analysis gives rise to a nabla--calculus that can be considered competitive to the calculus based on the bilateral $\mathcal{Z}$-transform.

Keywords:

two-sided sequences, difference equation, operational calculus, nabla model, results and operators, exponential element.

Recenzent prof. dr hab. Franciszek Grabski