ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LI NR 2 (181) 2010

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej

MODEL NIEKLASYCZNEGO RACHUNKU OPERATORÓW BITTNERA DLA RÓŻNICY WSTECZNEJ

STRESZCZENIE

W pracy skonstruowano ∇-model rachunku operatorów Bittnera dla różnicy wstecznej $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$ w przestrzeni ciągów dwustronnych, w którym wyprowadzono postać wzoru Taylora. Dokonano uogólnienia ∇-modelu, rozważając operację $\nabla_b u(k) = u(k) - b(k)u(k-1)$.

Słowa kluczowe:
rachunek operatorów, pochodna, pierwotna, warunek graniczny, różnica wsteczna, wzór Taylora.

PODSTAWY RACHUNKU OPERATORÓW

Rachunkiem operatorów Bittnera [3–5] nazywamy zespół

$$CO(L^0, L^1, S, T_q, s_q, Q), \tag{1}$$

gdzie L^0 i L^1 są przestrzeniami liniowymi (nad tym samym ciałem skalarów Γ[1]) takimi, że $L^1 \subset L^0$. Operacja liniowa $S : L^1 \longrightarrow L^0$ (co zapisujemy $S \in \mathcal{L}(L^1, L^0)$), nazywana *pochodną* (abstrakcyjną), jest surjekcją. Ponadto Q jest zbiorem wskaźników q dla operacji $T_q \in \mathcal{L}(L^0, L^1)$ takich, że $ST_q w = w, w \in L^0$, zwanych *pierwotnymi* i dla operacji $s_q \in \mathcal{L}(L^1, L^1)$ takich, że $s_q u = u - T_q S u, u \in L^1$, zwanych *warunkami granicznymi*. Jądro operacji S, tzn. $\operatorname{Ker} S$ nazywamy zbiorem *stałych* dla pochodnej S.

[1] Będziemy zakładali, że L^0 i L^1 są przestrzeniami rzeczywistymi, tzn. $\Gamma := \mathbb{R}$.

Łatwo sprawdzić, że warunki graniczne $s_q, q \in Q$ są rzutami L^1 na podprzestrzeń $\operatorname{Ker} S$.

Przez indukcję określa się ciąg przestrzeni $L^n, n \in \mathbb{N}$ [2] w taki sposób, że

$$L^n := \{u \in L^{n-1} : Su \in L^{n-1}\}.$$

Wówczas

$$\ldots \subset L^n \subset L^{n-1} \subset \ldots \subset L^1 \subset L^0$$

oraz

$$S^n(L^{m+n}) = L^m,$$

gdzie

$$\mathcal{L}(L^n, L^0) \ni S^n := \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n-\text{razy}}, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

W pracy wykorzystane zostaną następujące twierdzenia pomocnicze:

Lemat 1. (Tw. 3. [5]). *Abstrakcyjne równanie różniczkowe*

$$Su = v, \quad v \in L^0, u \in L^1$$

z warunkiem granicznym

$$s_q u = u_{0,q}, \quad u_{0,q} \in \operatorname{Ker} S$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$u = u_{0,q} + T_q v. \tag{2}$$

Lemat 2. (Tw. 4. [5]). *Przy danej pochodnej $S \in \mathcal{L}(L^1, L^0)$ rzut $s_q \in \mathcal{L}(L^1, \operatorname{Ker} S)$ wyznacza pierwotną $T_q \in \mathcal{L}(L^0, L^1)$ z warunku*

$$u = T_q v \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad Su = v, s_q u = 0.$$

Ponadto rzut s_q jest warunkiem granicznym przy pierwotnej T_q.

Lemat 3. (Tw. 6. [5]). *Dla $u \in L^n$ zachodzi następujący wzór Taylora*

$$u = s_q u + T_q s_q S u + T_q^2 s_q S^2 u + \cdots + T_q^{n-1} s_q S^{n-1} u + T_q^n S^n u, \quad q \in Q. \tag{3}$$

Elementy

$$W_{n-1,q} u := s_q u + T_q s_q S u + T_q^2 s_q S^2 u + \cdots + T_q^{n-1} s_q S^{n-1} u, \quad R_{n,q} u := T_q^n S^n u$$

[2] $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.

nazywamy odpowiednio *wielomianem* i *resztą Taylora* dla elementu u w punkcie q. Mamy oczywiście $W_{n-1,q}u \in \operatorname{Ker} S^n, R_{n,q}u \in L^n$.
Z (3) otrzymujemy

$$u - T_q^n S^n u = s_q u + T_q s_q S u + T_q^2 s_q S^2 u + \cdots + T_q^{n-1} s_q S^{n-1} u,$$

skąd wynika, że pochodnej $\widehat{S} := S^n$ odpowiadają pierwotne $\widehat{T}_q := T_q^n$ i warunki graniczne $\widehat{s}_q := \sum_{\ell=0}^{n-1} T_q^\ell s_q S^\ell$, gdzie $q \in Q$ oraz $T_q^0 := id_{L^0}, S^0 := id_{L^1}$ są operacjami identycznościowymi.

Po zdefiniowaniu obiektów (1) mówimy o *reprezentacji* lub *modelu* rachunku operatorów.

∇-MODEL

Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Jest oczywiste, że zbiór $C(\mathbb{Z})$ nieskończonych dwustronnych ciągów rzeczywistych $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów i mnożenia ciągów przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

Twierdzenie 1. *Zespół* (1), *gdzie* $u = \{u(k)\} \in L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z}), q \equiv k_0 \in Q := \mathbb{Z}$ *oraz*

$$Su \equiv \nabla u := \{u(k) - u(k-1)\}, \tag{4}$$

$$T_{k_0} u := \begin{cases} -\sum\limits_{i=k+1}^{k_0} u(i) & \text{dla} \quad k < k_0 \\ \qquad 0 & \text{dla} \quad k = k_0 \\ \sum\limits_{i=k_0+1}^{k} u(i) & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

$$s_{k_0} u := \{u(k_0)\} \tag{6}$$

tworzy dyskretny ∇*-model rachunku operatorów Bittnera z pochodną jako różnicą wsteczną* ∇[3].

[3] Z uwagi na definicję pierwotnych T_{k_0}, będziemy zakładali, że $\sum_{i=k_0+1}^{k_0} u(i) := 0$.

D o w ó d . Nietrudno sprawdzić, że operacje (4)–(6) są liniowe. Niech $\{v(k)\} := T_{k_0}\{u(k)\}$. Zatem $\nabla\{v(k)\} = \{v(k) - v(k-1)\}$ i dla $k = k_0$ mamy

$$[\nabla v(k)]_{k=k_0} = v(k_0) - v(k_0 - 1) = 0 + \sum_{i=k_0}^{k_0} u(i) = u(k_0).$$

Dla $k < k_0$ mamy

$$\nabla\{v(k)\} = \{-\sum_{i=k+1}^{k_0} u(i) + \sum_{i=k}^{k_0} u(i)\} = \{u(k)\}.$$

Z kolei dla $k > k_0$ otrzymujemy

$$\nabla\{v(k)\} = \{\sum_{i=k_0+1}^{k} u(i) - \sum_{i=k_0+1}^{k-1} u(i)\} = \{u(k)\}.$$

Zatem aksjomat $ST_{k_0}\{u(k)\} = \{u(k)\}$ jest spełniony.
Jeżeli $k < k_0$, to

$$\begin{aligned} T_{k_0}\nabla\{u(k)\} &= \{-\sum_{i=k+1}^{k_0} u(i) + \sum_{i=k+1}^{k_0} u(i-1)\} \\ &= \{-\sum_{i=k+1}^{k_0} u(i) + \sum_{i=k}^{k_0-1} u(i)\} \\ &= \{u(k) - u(k_0)\} = \{u(k)\} - s_{k_0}\{u(k)\}. \end{aligned}$$

Podobnie dla $k > k_0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} T_{k_0}\nabla\{u(k)\} &= \{\sum_{i=k_0+1}^{k} u(i) - \sum_{i=k_0+1}^{k} u(i-1)\} \\ &= \{\sum_{i=k_0+1}^{k} u(i) - \sum_{i=k_0}^{k-1} u(i)\} \\ &= \{u(k) - u(k_0)\} = \{u(k)\} - s_{k_0}\{u(k)\}. \end{aligned}$$

Z definicji operacji T_{k_0} mamy również $T_{k_0}\nabla u(k) = 0$ dla $k = k_0$. Zatem aksjomat $T_{k_0}S\{u(k)\} = \{u(k)\} - s_{k_0}\{u(k)\}$ jest także spełniony. ■

Niech

$$x^{\underline{m}} := \prod_{i=0}^{m-1}(x - i), \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, \quad x^{\underline{0}} := 1, \tag{7}$$

$$x^{\overline{m}} := \prod_{i=0}^{m-1}(x+i), \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, \quad x^{\overline{0}} := 1. \tag{8}$$

Symbole (7), (8) nazywamy odpowiednio *potęgą zstępującą* oraz *potęgą wstępującą* (*symbolami Pochhammera*) [6, 8].

Twierdzenie 2. (Dyskretna postać wzoru Cauchy'ego).

$$T_{k_0}^{\ell}\{u(k)\} := \begin{cases} (-1)^{\ell} \sum\limits_{i=k+1}^{k_0} \dfrac{(i-k-1)^{\underline{\ell-1}}}{(\ell-1)!} u(i) & \text{dla} \quad k \leqslant k_0 \\ \\ \sum\limits_{i=k_0+1}^{k} \dfrac{(k-i+1)^{\overline{\ell-1}}}{(\ell-1)!} u(i) & \text{dla} \quad k \geqslant k_0 \end{cases}, \tag{9}$$

$$\ell \in \mathbb{N}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}).$$

D o w ó d wzoru (9) przeprowadzimy przez indukcję względem ℓ. Rozważymy przypadek $k \leqslant k_0$. Dowód dla $k \geqslant k_0$ przebiega podobnie.
Z definicji pierwotnej T_{k_0} dla $k \leqslant k_0$ mamy

$$T_{k_0}\{u(k)\} = \{-\sum_{i=k+1}^{k_0} u(i)\},$$

czyli wzór (9) dla $\ell = 1$.

Niech

$$\{v_{\ell+1}(k)\} := \big\{(-1)^{\ell+1} \sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(i-k-1)^{\underline{\ell}}}{\ell!} u(i)\big\}.$$

Mamy zatem $s_{k_0}\{v_{\ell+1}(k)\} = \{0\}$. Ponadto, uwzględniając własność potęgi zstępującej

$$\nabla x^{\underline{m}} = x^{\underline{m}} - (x-1)^{\underline{m}} = m(x-1)^{\underline{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} S\{v_{\ell+1}(k)\} &= \{v_{\ell+1}(k) - v_{\ell+1}(k-1)\} \\ &= \big\{(-1)^{\ell+1} \sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(i-k-1)^{\underline{\ell}}}{\ell!} u(i) - (-1)^{\ell+1} \sum_{i=k}^{k_0} \frac{(i-k)^{\underline{\ell}}}{\ell!} u(i)\big\} \\ &= \big\{(-1)^{\ell} \sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(i-k)^{\underline{\ell}} - (i-k-1)^{\underline{\ell}}}{\ell!} u(i)\big\} \\ &\overset{(10)}{=} \big\{(-1)^{\ell} \sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(i-k-1)^{\underline{\ell-1}}}{(\ell-1)!} u(i)\big\} = \{v_{\ell}(k)\}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$S\{v_{\ell+1}(k)\} = \{v_\ell(k)\} \quad \text{oraz} \quad s_{k_0}\{v_{\ell+1}(k)\} = \{0\}.$$

Z (2) wynika, że rozwiązanie tego zagadnienia ma postać

$$\{v_{\ell+1}(k)\} = T_{k_0}\{v_\ell(k)\}.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego, mamy zatem

$$\{v_{\ell+1}(k)\} = T_{k_0}\{v_\ell(k)\} = T_{k_0}[T_{k_0}^{\ell}\{u(k)\}] = T_{k_0}^{\ell+1}\{u(k)\}. \quad \blacksquare$$

Ponieważ

$$(-x)^{\overline{m}} = (-1)^m x^{\underline{m}}, \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0,$$

co wynika z (7) i (8), dyskretną postać (9) wzoru Cauchy'ego możemy przedstawić w postaci korzystającej tylko z jednego symbolu Pochhammera. W ten sposób otrzymujemy następujący

Wniosek 1.

$$T_{k_0}^{\ell}\{u(k)\} = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(k-i+1)^{\overline{\ell-1}}}{(\ell-1)!}u(i) & \text{dla} \quad k \leqslant k_0 \\ \displaystyle\sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{(k-i+1)^{\overline{\ell-1}}}{(\ell-1)!}u(i) & \text{dla} \quad k \geqslant k_0 \end{cases}, \tag{11}$$

$$\ell \in \mathbb{N}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}).$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{Ker} S = \{\ \{c\}_{k\in\mathbb{Z}} : \quad c \in \mathbb{R}\ \}.$$

Wniosek 2. *Dla dowolnego* $c \in \mathbb{R}$ *mamy*

$$T_{k_0}^{\ell}\{c\} = \frac{(k-k_0)^{\overline{\ell}}}{\ell!}c, \quad k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

D o w ó d . Podobnie jak poprzednio rozważymy tylko przypadek $k \leqslant k_0$. Korzystając z następującej własności potęgi wstępującej

$$\nabla x^{\overline{m}} = m x^{\overline{m-1}}, \ \text{skąd} \ \ x^{\overline{m}} = \tfrac{1}{m+1}\nabla x^{\overline{m+1}}, \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},$$

dla $k_1 < k_2$, gdzie $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k_1}^{k_2} j^{\overline{m}} &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=k_1}^{k_2} \nabla j^{\overline{m+1}} = \frac{1}{m+1}\sum_{j=k_1}^{k_2}[\, j^{\overline{m+1}} - (j-1)^{\overline{m+1}}\,] \\
&= \frac{1}{m+1}[(k_1^{\overline{m+1}} - (k_1-1)^{\overline{m+1}}) + ((k_1+1)^{\overline{m+1}} - k_1^{\overline{m+1}}) \\
&+ ((k_1+2)^{\overline{m+1}} - (k_1+1)^{\overline{m+1}}) + \cdots + ((k_2^{\overline{m+1}} - (k_2-1)^{\overline{m+1}})] \\
&= \frac{1}{m+1}[\, k_2^{\overline{m+1}} - (k_1-1)^{\overline{m+1}}\,]. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Wykorzystując wniosek 1 oraz wzór (13), ostatecznie uzyskujemy

$$
\begin{aligned}
T_{k_0}^{\ell}\{c\} &= \{-\sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(k-i+1)^{\overline{\ell-1}}}{(\ell-1)!}c\} = \{-\sum_{j=k-k_0+1}^{0} \frac{j^{\overline{\ell-1}}}{(\ell-1)!}c\} \\
&\overset{(13)}{=} \{\frac{1}{\ell}\cdot\frac{(k-k_0)^{\overline{\ell}} - 0^{\overline{\ell}}}{(\ell-1)!}c\} = \{\frac{(k-k_0)^{\overline{\ell}}}{\ell!}c\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uwaga. Ponieważ $T_{k_0}^{0}$ jest operacją identycznościową, zatem wzór (12) zachodzi również dla $\ell = 0$.

Na podstawie lematu 3., (11) oraz (12) otrzymujemy (por. [1, 9])

Wniosek 3. (Dyskretny wzór Taylora dla różnicy wstecznej ∇). *Jeżeli* $\{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}), k_0 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\{u(k)\} = W_{n-1,k_0}\{u(k)\} + R_{n,k_0}\{u(k)\},$$

gdzie

$$W_{n-1,k_0}u(k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(k-k_0)^{\overline{\ell}}}{\ell!}[\nabla^{\ell}u(i)]_{i=k_0},$$

$$
R_{n,k_0}u(k) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(k-i+1)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}\nabla^{n}u(i) & \text{dla} \quad k \leqslant k_0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{(k-i+1)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}\nabla^{n}u(i) & \text{dla} \quad k \geqslant k_0 \end{cases}
$$

oraz

$$\nabla^{\ell}u(k) = \sum_{i=0}^{\ell}(-1)^{i}\tbinom{\ell}{i}u(k-i), \quad k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Wniosek 4. *Zespół* $(L^0, L^1, \widehat{S}, \widehat{T}_q, \widehat{s}_q, Q)$, *gdzie* $L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z}), q \equiv k_0 \in Q := \mathbb{Z}$ *oraz*

$$\widehat{S}\{u(k)\} = \nabla^n\{u(k)\},$$

$$\widehat{T}_{k_0}\{u(k)\} = \begin{cases} -\sum_{i=k+1}^{k_0} \frac{(k-i+1)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} u(i) & \text{dla} \quad k \leqslant k_0 \\ \sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{(k-i+1)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} u(i) & \text{dla} \quad k \geqslant k_0 \end{cases},$$

$$\widehat{s}_{k_0}\{u(k)\} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(k-k_0)^{\overline{\ell}}}{\ell!}[\nabla^\ell u(i)]_{i=k_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{N},$$

tworzy dyskretny ∇^n*-model rachunku operatorów Bittnera*.

∇_b-MODEL

Uogólnieniem pochodnej (4) jest operacja

$$S_b\{u(k)\} \equiv \nabla_b\{u(k)\} := \{u(k) - b(k)u(k-1)\},^4 \tag{14}$$

gdzie $b = \{b(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ jest ciągiem danym takim, że

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \neq 0.$$

Operację (14) będziemy nazywali *różnicą wsteczną przy podstawie* b.

Do konstrukcji modelu rachunku operatorów związanego z pochodną (14) wykorzystamy ideę rozwiązywania równania $u(k+1) - b(k)u(k) = v(k)$ opisaną w pracy [7].

Niech $L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z})$. Nietrudno sprawdzić, że ciągi $\{c(k)\} \in \operatorname{Ker} S_b$ mają postać:

[4] W pracy tej mnożenie ciągów oznacza zwykłe mnożenie po współrzędnych.

$$c(k) = \begin{cases} \dfrac{C}{\prod\limits_{i=k+1}^{0} b(i)} & \text{dla} \quad k < 0 \\ C & \text{dla} \quad k = 0 \\ C \prod\limits_{i=1}^{k} b(i) & \text{dla} \quad k > 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Niech $\{e(k)\}$ będzie ciągiem $\{c(k)\}$ dla $C = 1$. W związku z tym przyjmijmy również, że $\prod_{i=1}^{0} b(i) := 1$.

Rozważmy równanie różnicowe

$$S_b\{u(k)\} \equiv \nabla_b u(k) = \{v(k)\},$$

tzn.

$$u(k) - b(k)u(k-1) = v(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Mamy stąd

$$\frac{u(k)}{e(k)} - \frac{b(k)u(k-1)}{e(k)} = \frac{v(k)}{e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

czyli

$$\frac{u(k)}{e(k)} - \frac{u(k-1)}{e(k-1)} = \frac{v(k)}{e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$y(k) - y(k-1) = w(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

gdzie

$$y(k) := \frac{u(k)}{e(k)}, \quad w(k) := \frac{v(k)}{e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Równanie (16) możemy przedstawić w postaci

$$S\{y(k)\} \equiv \nabla\{y(k)\} = \{w(k)\}. \tag{18}$$

Z lematu 1. wynika, że rozwiązaniem równania (18) jest ciąg

$$\{y(k)\} = s_{k_0}\{y(k)\} + T_{k_0}\{w(k)\}.$$

Z (17) otrzymujemy $u(k) = e(k)y(k), k \in \mathbb{Z}$. Ostatecznie

$$\{u(k)\} = \{e(k)\}s_{k_0}\{\frac{u(k)}{e(k)}\} + \{e(k)\}T_{k_0}\{\frac{v(k)}{e(k)}\} \tag{19}$$

jest rozwiązaniem równania (15).

Niech

$$s_{b,k_0}\{u(k)\} := \{e(k)\}s_{k_0}\Big\{\frac{u(k)}{e(k)}\Big\}, \quad k_0 \in Q := \mathbb{Z}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}). \tag{20}$$

Korzystając z definicji (6) warunków granicznych s_{k_0}, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_b s_{b,k_0} u(k) &= S_b[e(k)s_{k_0}\Big[\frac{u(k)}{e(k)}\Big]] = S_b[e(k)\frac{u(k_0)}{e(k_0)}] \\ &= [e(k) - b(k)e(k-1)]\frac{u(k_0)}{e(k_0)} = 0 \cdot \frac{u(k_0)}{e(k_0)} = 0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zatem $s_{b,k_0} \in \mathcal{L}(L^1, \operatorname{Ker} S_b)$. Ponadto

$$\begin{aligned} s^2_{b,k_0} u(k) &= s_{b,k_0}[e(k)s_{k_0}\Big[\frac{u(k)}{e(k)}\Big]] = e(k)s_{k_0}\Big[\frac{e(k)s_{k_0}\big[\frac{u(k)}{e(k)}\big]}{e(k)}\Big] \\ &= e(k)s_{k_0}\Big[\frac{u(k)}{e(k)}\Big] = s_{b,k_0}u(k), \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ponieważ $s^2_{k_0} = s_{k_0}$. Ostatecznie s_{b,k_0} jest rzutem L^1 na $\operatorname{Ker} S_b$ dla każdego $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Z lematu 2. wynika, że rzut s_{b,k_0} wyznacza *pierwotną* T_{b,k_0} ze wzoru (19). Mianowicie

$$T_{b,k_0}\{u(k)\} := \{e(k)\}T_{k_0}\Big\{\frac{u(k)}{e(k)}\Big\}, \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}). \tag{21}$$

Ponadto s_{b,k_0} jest *warunkiem granicznym* odpowiadającym pierwotnej (21). W ten sposób otrzymujemy

Wniosek 5. *Zespół* (14), (20), (21) *tworzy dyskretny* ∇_b*-model rachunku operatorów Bittnera*

$$CO(C(\mathbb{Z}), C(\mathbb{Z}), S_b, T_{b,k_0}, s_{b,k_0}, \mathbb{Z}).$$

Przykład. Wyznaczymy rozwiązanie równania

$$p(k)u(k) + r(k)u(k-1) = v(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

spełniające warunek początkowy

$$u(k_0) = u_0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}, u_0 \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

gdzie $\{p(k)\}, \{r(k)\}, \{v(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ są ciągami danymi oraz

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{Z}} p(k), r(k) \neq 0.$$

Równanie (22) możemy przedstawić w postaci

$$p(k)[u(k) - b(k)u(k-1)] = v(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

gdzie

$$b(k) := \frac{-r(k)}{p(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$p(k)S_b u(k) = v(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd wnioskujemy, że równanie (22) jest równoważne równaniu

$$S_b\{u(k)\} = \{w(k)\}, \tag{24}$$

gdzie $w(k) := v(k)/p(k), k \in \mathbb{Z}$.

Zauważmy również, że warunek początkowy (23) jest równoważny warunkowi granicznemu

$$s_{b,k_0}\{u(k)\} = \{\frac{e(k)}{e(k_0)}u_0\}. \tag{25}$$

Na podstawie lematu 1. wnioskujemy, że zagadnienie (24), (25) ma jednoznaczne rozwiązanie

$$u(k) = s_{b,k_0}u(k) + T_{b,k_0}w(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na przykład rozwiązaniem zagadnienia (22), (23), gdzie $u(0) = 1, p(k) = 1$, $r(k) = 2^{|k|}$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz

$$v(k) = \begin{cases} 2^{k(k+3)/2} \cdot k & \text{dla} \quad k \geqslant 0 \\ 2^{-k(k+1)/2} \cdot k^2 & \text{dla} \quad k < 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

jest ciąg

$$u(k) = \begin{cases} 2^{k(k+1)/2} \cdot \dfrac{7(-1)^k + (1+3k)2^{k+1}}{9} & \text{dla} \quad k \geqslant 0 \\ 2^{-k(k+1)/2} \cdot \dfrac{2(-1)^k + k(k+1)}{2} & \text{dla} \quad k < 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

▲

BIBLIOGRAFIA

[1] Agarwal R. P., *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications*, Marcel Dekker, New York 2000.

[2] Anderson D. R., *Taylor polynomials for nabla dynamic equations on time scales*, 'PanAmerican Math. J.', 2002, 12 (4), pp. 17–27.

[3] Bittner R., *On certain axiomatics for the operational calculus*, 'Bull. Acad. Polon. Sci.', 1959, Cl. III, 7 (1), pp. 1–9.

[4] Bittner R., *Algebraic and Analytic Properties of Solutions of Abstract Differential Equations*, 'Dissertationes Math.', 41, PWN, Warszawa 1964.

[5] Bittner R., *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.

[6] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, New York 1988.

[7] Levy H., Lessman F., *Finite Difference Equations*, Pitman and Sons, London 1959.

[8] Roman S., *The Umbral Calculus*, Academic Press, Orlando, FL 1984.

[9] Wysocki H., *Taylor's formula for the forward difference via operational calculus*, 'Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica', 2010, 47 (1), pp. 46–53 (first published online 4 July, 2009, DOI: 10.1556/SScMath.2009.1111).

BITTNER NON-CLASSICAL OPERATIONAL CALCULUS MODEL FOR THE BACKWARD DIFFERENCE

ABSTRACT

In this paper there is constructed the ∇-model of the Bittner operational calculus for the backward difference $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$ in the space of two-sided sequences, in which a form of the Taylor's formula is determined. Considering the operation of $\nabla_b u(k) = u(k) - b(k)u(k-1)$, the ∇-model is generalized.

Keywords:

operational calculus, derivative, integral, limit condition, backward difference, Taylor's formula.

Recenzent prof. dr hab. Franciszek Grabski