ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LI NR 1 (180) 2010

Janusz Kolenda
Akademia Marynarki Wojennej

O WYZNACZANIU WARSTWIC BEZPIECZEŃSTWA ZMĘCZENIOWEGO ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH PRZY JEDNOOSIOWYCH OBCIĄŻENIACH STOCHASTYCZNYCH

STRESZCZENIE

Praca dotyczy bezpieczeństwa zmęczeniowego maszyn i konstrukcji poddanych działaniu naprężeń nieprzekraczających granicy zmęczenia materiału. Rozpatrywane są jednoosiowe stacjonarne naprężenia stochastyczne, które zamodelowano ekwiwalentnym procesem Gaussa. Warunek równoważności przyjęto na podstawie teorii systemów transformujących energię. Założono znajomość wartości średniej i gęstości widmowej mocy naprężenia rzeczywistego. Wyznaczono wartość oczekiwaną względnego marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego, która może służyć do wizualizacji poziomu bezpieczeństwa zmęczeniowego elementów konstrukcyjnych za pomocą warstwic.

Słowa kluczowe:
naprężenie stochastyczne, naprężenie ekwiwalentne, margines bezpieczeństwa zmęczeniowego, warstwice bezpieczeństwa zmęczeniowego.

WSTĘP

Powszechną praktyką stosowaną w trakcie projektowania elementów konstrukcyjnych poddanych wieloosiowym obciążeniom statycznym jest numeryczna analiza wytrzymałości w oparciu o wybraną hipotezę wytężenia materiału. Wartości uzyskanego w jej wyniku naprężenia zredukowanego (ekwiwalentnego złożonemu stanowi naprężenia), naniesione na geometrię analizowanego elementu w postaci barwnych warstwic, ułatwiają ocenę poprawności projektu z uwzględnieniem przewidywanych obciążeń eksploatacyjnych.

W przypadku obciążeń dynamicznych zadaniem projektanta jest oszacowanie odporności udarowej i/lub wytrzymałości zmęczeniowej. Analiza wytrzymałości zmęczeniowej polega na wyliczeniu przewidywanego naprężenia i porównaniu go z granicą zmęczenia lub z naprężeniem dopuszczalnym dla założonego okresu eksploatacji (jeśli przekroczona jest granica zmęczenia) [5, 6]. Przy obciążeniach wieloosiowych również i tu niezbędne jest zastosowanie odpowiedniego kryterium i wyznaczenie naprężenia ekwiwalentnego. To samo dotyczy obciążeń stochastycznych, przy czym obliczenia prowadzone są bądź w dziedzinie czasu, bądź w dziedzinie częstości. Aktualny stan wiedzy z zakresu metod częstotliwościowych scharakteryzowano w pracy [11], podkreślając ich dużą efektywność i obszar zastosowań. W pracy tej nie wspomniano o metodzie opartej na teorii systemów transformujących energię [2], która również prowadzi do stosunkowo prostych zależności [7, 8]. Celem niniejszego artykułu jest ukazanie przydatności tej metody do analizy wytrzymałości zmęczeniowej, w szczególności do wyznaczania warstwic bezpieczeństwa zmęczeniowego elementów konstrukcyjnych przy jednoosiowych obciążeniach stochastycznych.

MARGINES BEZPIECZEŃSTWA ZMĘCZENIOWEGO

Jeśli w projektowanym elemencie dopuszczalne jest przekroczenie granicy zmęczenia przez naprężenie ekwiwalentne, analizie wytrzymałości zmęczeniowej może towarzyszyć sporządzanie warstwic (map) uszkodzeń zmęczeniowych wewnątrz materiału [1]. Możliwość prezentacji stopnia uszkodzenia zmęczeniowego elementów konstrukcyjnych w sposób graficzny może być bardzo przydatna w procesie projektowania. Dlatego też wśród dostępnych programów komputerowych pojawiło się wiele rozwiązań pozwalających na wykonanie niezbędnych obliczeń oraz wizualizację ich wyników [4, 3, 10]. Są to między innymi ANSYS (z modułem do analizy zmęczeniowej), WinLIFE i FEMFAT.

Warstwice uszkodzeń zmęczeniowych dotyczą konstrukcji o ograniczonej trwałości zmęczeniowej. Biorąc pod uwagę, że większość dynamicznie obciążonych konstrukcji jest projektowana przy założeniu teoretycznie nieograniczonej trwałości zmęczeniowej (tj. poniżej granicy zmęczenia), w pracy [9] do wizualizacji poziomu bezpieczeństwa zmęczeniowego w takich przypadkach zaproponowano nanoszenie warstwic odpowiadających wartościom współczynnika bezpieczeństwa zmęczeniowego. Ograniczono się przy tym do obciążeń okresowych. Niniejszy artykuł również dotyczy nieograniczonej trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych, lecz przy obciążeniach stochastycznych. Dla ilustracji wyników obliczeń proponuje się tu warstwice marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego. Uwzględniono przy tym możliwość występowania dodatkowych obciążeń stałych.

Margines bezpieczeństwa zmęczeniowego może być zdefiniowany w ujęciu deterministycznym na przykładzie jednoosiowego harmonicznego naprężenia normalnego [8]

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t + \alpha). \tag{1}$$

Jego amplituda σ_a i wartość średnia σ_m są określone dwoma kolejnymi ekstremami jako

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}). \tag{2}$$

Maksymalna dopuszczalna amplituda naprężenia, przy której trwałość zmęczeniowa jest teoretycznie nieograniczona, wynosi [6]

$$B = Z_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_m}{R_e}\right) \tag{3}$$

dla materiałów elastoplastycznych oraz

$$B = Z_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) \tag{4}$$

dla materiałów kruchych.

Z_{-1} to granica zmęczenia przy cyklu wahadłowym (tj. przy $\sigma_m = 0$), równa Z_{go} przy zginaniu i Z_{rc} przy rozciąganiu-ściskaniu, a R_e i R_m to granica plastyczności i wytrzymałość na rozciąganie. W przypadku jednoosiowego naprężenia stycznego należy w (3) zamiast Z_{-1} i R_e podstawić $Z_{so}=Z_{go}/\sqrt{3}$ i $R_{es}=R_e/\sqrt{3}$ (dla stali).

Wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego

$$f = \frac{B}{\sigma_a} \tag{5}$$

i cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa dla materiałów elastoplastycznych

$$f_d = \frac{Z_{-1}}{\sigma_a}, \quad f_s = \frac{R_e}{\sigma_m}, \tag{6}$$

otrzymuje się

$$f = f_d\left(1 - f_s^{-1}\right). \tag{7}$$

Pozwala to zdefiniować marginesy bezpieczeństwa

$$M = B - \sigma_a, \quad M_d = Z_{-1} - \sigma_a, \quad M_s = R_e - \sigma_m \tag{8}$$

i bezwymiarowe marginesy bezpieczeństwa

$$m = \frac{M}{\sigma_a} = f - 1, \quad m_d = \frac{M_d}{\sigma_a} = f_d - 1, \quad m_s = \frac{M_s}{\sigma_m} = f_s - 1 \tag{9}$$

oraz względny margines bezpieczeństwa zmęczeniowego [8]

$$\mu = \frac{M}{B} = \frac{m}{f} = 1 - f^{-1}. \tag{10}$$

Mając na celu wyznaczenie warstwic poziomu bezpieczeństwa zmęczeniowego elementu konstrukcyjnego przy obciążeniu stochastycznym, w niniejszym artykule proponuje się, aby poziom ten był reprezentowany przez wartość oczekiwaną względnego marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego.

WARTOŚĆ OCZEKIWANA WZGLĘDNEGO MARGINESU BEZPIECZEŃSTWA

W przypadku jednoosiowego naprężenia stochastycznego $\tilde{\sigma}_x(t)$ spotykamy się z różnymi formami jego zapisu w dziedzinie czasu, a w szczególności

$$\tilde{\sigma}_x(t) = \sigma_x \sin(\omega t + \alpha); \tag{11}$$

$$\tilde{\sigma}_x(t) = \sigma_{mx} + \sigma_x \sin(\omega t + \alpha); \tag{12}$$

$$\tilde{\sigma}_x(t) = \sigma_x(t); \tag{13}$$

$$\tilde{\sigma}_x(t) = \sigma_{mx} + \sigma_x(t), \tag{14}$$

gdzie:

σ_x — amplituda naprężenia (zmienna losowa);
σ_{mx} — wartość średnia naprężenia (stała);
α — kąt fazowy naprężenia (zmienna losowa);
ω — częstość kołowa naprężenia (stała);
$\sigma_x(t)$ — proces stochastyczny (o zerowej wartości średniej).

Poniżej przyjęto, że $\sigma_x(t)$ jest procesem stacjonarnym (w szerszym sensie).

Wartość oczekiwana względnego marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego przy naprężeniu (11) wynosi

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{1}{Z_{-1}} E\{\sigma_x\}, \tag{15}$$

gdzie $E\{\cdot\}$ oznacza wartość oczekiwaną.

Występowanie dodatkowego naprężenia średniego w (12) prowadzi do wzoru

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{1}{Z_{-1}} E\{\sigma_x\}\left(1 - \frac{\sigma_{mx}}{R_e}\right)^{-1}. \tag{16}$$

<u>Przykład</u>

Na pryzmatyczny pręt działa osiowa siła wywołująca naprężenie

$$\tilde{\sigma}_x(t) = \sigma_{mx} + \sigma_x \sin \omega t ,$$

gdzie σ_x jest zmienną losową o wartości oczekiwanej $E\{\sigma_x\} = 60\,\mathrm{MPa}$. Naprężenie średnie, granica zmęczenia i granica plastyczności materiału pręta wynoszą

$$\sigma_{mx} = 70\,\mathrm{MPa}\,,\quad Z_{rc} = 150\,\mathrm{MPa}\,,\quad R_e = 260\,\mathrm{MPa}\,.$$

Wyznaczyć $E\{\mu\}$.

<u>Rozwiązanie</u>

Zgodnie z (16)

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{1}{Z_{rc}} E\{\sigma_x\}\left(1 - \frac{\sigma_{mx}}{R_e}\right)^{-1}.$$

Stąd

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{\frac{60}{150}}{1 - \frac{70}{260}} = 0{,}45\,.$$

Wniosek

Wzór (16) prowadzi do prostych obliczeń, co sugeruje celowość zastąpienia naprężenia (14) naprężeniem ekwiwalentnym $\tilde{\sigma}_e(t)$ o postaci

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_e(t) &= \sigma_{me} + a\sin(\omega_e t + \varphi) = \\ &= \sigma_{me} + a_1 \exp(j\omega_e t) + a_{-1}\exp(-j\omega_e t)\end{aligned} \tag{17}$$

i obliczenia wartości oczekiwanej względnego marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego ze wzoru

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{1}{Z_{-1}} E\{a\}\left(1 - \frac{\sigma_{me}}{R_e}\right)^{-1} \tag{18}$$

po uprzednim wyznaczeniu $E\{a\}$ i σ_{me}. Przez σ_{me} oznaczono wartość średnią naprężenia ekwiwalentnego, a i φ to zmienne losowe reprezentujące amplitudę i fazę naprężenia ekwiwalentnego, natomiast ω_e jest jego stałą częstością, przy czym

$$a_1 = \frac{a}{2j}\exp(j\varphi), \quad a_{-1} = a_1^*;$$

$$E\{a_1\} = E\{a_{-1}\} = E\{a_1^* a_{-1}\} = E\{a_{-1}^* a_1\} = 0\,,$$

gdzie:

j — jedność urojona;

$(\cdot)^*$ — wielkość zespolona sprzężona.

EKWIWALENTNE NAPRĘŻENIE STOCHASTYCZNE

Z porównania (14) i (17) wynika

$$\sigma_{me} = \sigma_{mx}\,, \tag{19}$$

co pozwala zamiast (14) i (17) rozpatrywać procesy (13) i

$$\tilde{\sigma}_e(t) = a\sin(\omega_e t + \varphi) = a_1 \exp(j\omega_e t) + a_{-1}\exp(-j\omega_e t)\,. \tag{20}$$

W dalszej części artykułu założono, że $\widetilde{\sigma}_e(t)$ jest procesem Gaussa spełniającym warunek

$$K_{\widetilde{\sigma}_e}(\tau) = K_{\widetilde{\sigma}_x}(\tau), \tag{21}$$

gdzie:

$K_{\widetilde{\sigma}_e}(\tau)$ — funkcja autokorelacji procesu (20);

$K_{\widetilde{\sigma}_x}(\tau)$ — funkcja autokorelacji procesu (13);

τ — odstęp czasu.

Warunek (21) prowadzi dla $\widetilde{\sigma}_x(t) = \sigma_x(t)$ do relacji

$$\begin{aligned} E\{[a_1^* \exp(-j\omega_e t_1) + a_{-1}^* \exp(j\omega_e t_1)][a_1 \exp(j\omega_e t_2) + a_{-1} \exp(-j\omega_e t_2)]\} = \\ = E\{\sigma_x^*(t_1)\sigma_x(t_2)\} \end{aligned}, \tag{22}$$

z której wynika

$$\frac{1}{4} E\{a^2\}[\exp(j\omega_e \tau) + \exp(-j\omega_e \tau)] = K_{\sigma_x}(\tau), \tag{23}$$

gdzie:

$E\{a^2\}$ — wartość średniokwadratowa amplitudy naprężenia ekwiwalentnego;

$\tau = t_2 - t_1$;

$K_{\sigma_x}(\tau) = E\{\sigma_x^*(t_1)\sigma_x(t_2)\}$ — funkcja autokorelacji procesu $\sigma_x(t)$.

Gęstość widmowa mocy $S_{\sigma_x}(\omega)$ procesu $\sigma_x(t)$ określona jest wzorem

$$S_{\sigma_x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\sigma_x}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau . \tag{24}$$

Stąd otrzymuje się po podstawieniu (23)

$$\frac{1}{4} E\{a^2\}[\delta(\omega - \omega_e) + \delta(\omega + \omega_e)] = S_{\sigma_x}(\omega), \tag{25}$$

gdzie δ jest funkcją delta Diraca.

Na tym etapie rozważań skorzystamy z teorii systemów transformujących energię [4], zgodnie z którą dwa stany naprężenia mogą być traktowane jako równoważne w sensie trwałości zmęczeniowej materiału, jeśli porcje energii rozproszone w całym okresie eksploatacji wewnątrz i na zewnątrz materiału na jednostkę jego objętości w obu tych stanach są odpowiednio jednakowe. Odpowiednikiem tej tezy w dziedzinie częstości jest [7, 8]:
Dwa stany naprężenia mogą być traktowane jako równoważne w sensie trwałości zmęczeniowej materiału, jeśli w całym zakresie częstości moc zużyta wewnątrz materiału i moc tracona na zewnątrz materiału na jednostkę jego objętości w obu tych stanach są odpowiednio jednakowe.

W rozpatrywanym przypadku moc tracona na zewnątrz materiału jest proporcjonalna do całki z gęstości widmowej mocy procesu $\sigma_x(t)$ w aktualnym zakresie częstości. Stąd wynika jeden z warunków równoważności procesów $\sigma_x(t)$ i $\sigma_e(t)$ (zapisany z uwzględnieniem (25))

$$\frac{1}{4}E\{a^2\}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_e)+\delta(\omega+\omega_e)\right]d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\sigma_x}(\omega)d\omega\,. \tag{26}$$

Zatem

$$E\{a^2\}=2\int_{-\infty}^{\infty}S_{\sigma_x}(\omega)d\omega\,. \tag{27}$$

Zważywszy, że amplituda a procesu (20) jako wąskopasmowego procesu Gaussa ma rozkład Rayleigha [13], jej momenty statystyczne wynoszą [12]

$$E\{a^k\}=2^{k/2}\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)s_e^k\,,\quad k=1,2,\ldots, \tag{28}$$

gdzie:
Γ — funkcja gamma;
s_e — odchylenie standardowe amplitudy a.

Stąd

$$E\{a\}=(0,5\pi)^{1/2}s_e\,; \tag{29}$$

$$E\{a^2\}=2s_e^2\,. \tag{30}$$

Porównując prawe strony wyrażeń (27) i (30), otrzymuje się

$$s_e = \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma_x}(\omega) d\omega \right]^{1/2} . \tag{31}$$

Z powyższego wynika, że do rozwiązania postawionego zadania niezbędna jest znajomość wartości średniej naprężenia $\widetilde{\sigma}_x(t)$ i gęstości widmowej mocy procesu $\sigma_x(t)$, gdyż poszukiwana wartość oczekiwana względnego marginesu bezpieczeństwa zmęczeniowego (18) określona jest wzorem

$$E\{\mu\} = 1 - \frac{1}{Z_{-1}} \left[0{,}5\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma_x}(\omega) d\omega \right]^{1/2} \left(1 - \frac{\sigma_{mx}}{R_e} \right)^{-1} . \tag{32}$$

UWAGI KOŃCOWE

Naprężenie ekwiwalentne (17) jest w pełni określone, jeśli znana jest jego wartość średnia σ_{me}, odchylenie standardowe s_e amplitudy tego naprężenia i jego częstość ω_e. Rozwiązanie sformułowanego w niniejszym artykule zadania wymaga znajomości σ_{me} i s_e, czemu służą wzory (19) i (31). Z kolei znajomość ω_e jest niezbędna do wyznaczenia warstwic uszkodzeń zmęczeniowych, kumulujących się w materiale w trakcie eksploatacji pod obciążeniem wywołującym naprężenie przekraczające granicę zmęczenia. Jeden ze sposobów obliczenia ω_e, również oparty na teorii systemów transformujących energię, przedstawiono w [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] Browell R., *Calculating and displaying fatigue results*, ANSYS, Inc., 2006.

[2] Cempel C., *Theory of energy transformation systems and their application in diagnostics of operating systems*, ‘Applied Math. and Computer Sciences’, 1993, 2.

[3] COMSOL Multiphysics, Structural mechanics module users guide, Version 3.3, COMSOL AB, Stockholm 2006.

[4] Kocabicak U., Firat M., *A simple approach for multiaxial fatigue damage prediction based on FEM post-processing*, ‘Materials and Design’, 2004, Vol. 25.

[5] Kocańda S., *Zmęczeniowe pękanie metali*, WNT, Warszawa 1985.

[6] Kocańda S., Szala J., *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, PWN, Warszawa 1997.

[7] Kolenda J., *Spectral criterion of infinite fatigue life of beams under combined random loads*, 'Polish Maritime Research', 2002, 2.

[8] Kolenda J., *On fatigue safety of metallic elements under static and dynamic loads*, Wyd. Politechniki Gdańskiej, 2004.

[9] Kolenda J., *O wyznaczaniu warstwic bezpieczeństwa zmęczeniowego elementów przy obciążeniach okresowych*, „Zeszyty Naukowe” AMW, 2009, nr 3.

[10] MATLAB user guide, Release 14 with Service Pack 2, Version V, The MathWorks, Inc., 2005.

[11] Niesłony A., *Wyznaczanie warstwic uszkodzeń zmęczeniowych metodą spektralną*, „Studia i Monografie”, Politechnika Opolska, 2008.

[12] Pacut A., *Prawdopodobieństwo. Teoria. Probabilistyczne modelowanie w technice*, PWN, Warszawa 1985.

[13] Preumont A., *Vibrations aléatoires et analyse spectrale. Lausanne*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990, CH-1015.

ON DETERMINATION OF MAPS OF FATIGUE SAFETY FOR STRUCTURAL ELEMENTS UNDER UNIAXIAL STOCHASTIC LOADS

ABSTRACT

The paper deals with fatigue safety of machines and structures subjected to stresses not exceeding the fatigue limit of the material. Uniaxial stationary stochastic stresses modeled by an equivalent Gaussian process are considered. The equivalence condition is based on the theory of energy transformation systems. It is assumed that the mean value and the power spectral density of the actual stress is known. The expected value of the relative fatigue safety margin is determined. It can be used for visualization of fatigue safety level of structural elements on maps.

Keywords:

stochastic stress, equivalent stress, margin of fatigue safety, maps of fatigue safety.

Recenzent dr hab. inż. Janusz Kozak