

**Janusz Kolenda**  
**Akademia Marynarki Wojennej**

## **O WYZNACZANIU WARSTWIC BEZPIECZEŃSTWA ZMĘCZENIOWEGO ELEMENTÓW PRZY OBCIĄŻENIACH OKRESOWYCH**

### **STRESZCZENIE**

Praca dotyczy bezpieczeństwa maszyn i konstrukcji w zakresie nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. W celu wyznaczenia warstw bezpieczeństwa zmęczeniowego elementów konstrukcyjnych poddanych złożonym obciążeniom dogodnie jest zamodelować oryginalne naprężenie w wybranych punktach elementu przez proste naprężenie zredukowane, równoważne oryginalnemu w odniesieniu do wytrzymałości zmęczeniowej, i wyliczyć współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego w tych punktach. W niniejszym artykule wykorzystano w tym celu wytrzymałościową hipotezę uśrednionej energii odkształcenia postaciowego. Rozpatrywane są jednoosiowe i wieloosiowe naprężenia okresowe. Określono gradient bezpieczeństwa zmęczeniowego, co ułatwia rysowanie warstw bezpieczeństwa zmęczeniowego.

Słowa kluczowe:

złożony stan naprężenia, naprężenie zredukowane, współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego.

### **WSTĘP**

Uszkodzenia konstrukcji mogą być wynikiem przeciążenia, zmęczenia, zużycia, pełzania lub utraty stateczności. Statystycznie wiadomo, że zdecydowana większość uszkodzeń przypisywana jest zmęczeniu (według [3] ponad 90%), dlatego też znajduje się ono w kręgu uwagi projektantów.

Z reguły wyróżnia się dwa podejścia do projektowania antyzmęczeniowego: bezpieczne, tj. poniżej granicy zmęczenia, oraz tolerujące eksploatację w zakresie powyżej granicy zmęczenia w ograniczonym czasie (krótszym niż czas, w którym akumulacja uszkodzeń zmęczeniowych w materiale osiągnie maksymalnie dopuszczalny

poziom). Oba te podejścia wymagają wszechstronnej analizy przewidywanych warunków eksploatacji i starannych obliczeń naprężeń w wybranych elementach konstrukcji. Służą temu odpowiednie programy obliczeniowe opracowywane i rozwijane przez wyspecjalizowane firmy i ośrodki naukowe (np. [1, 2, 4, 8]). Dodatkowym narzędziem dla łatwiejszej oceny zagrożenia zmęczeniowego przez projektanta i/lub użytkownika mogą być warstwy stopnia akumulacji uszkodzenia zmęczeniowego materiału [9] nanoszone na rysunki elementów narażonych na pęknięcie zmęczeniowe (tj. przewidzianych do eksploatacji powyżej granicy zmęczenia).

W niniejszym artykule zaproponowano, aby w przypadku projektowania konstrukcji przewidzianych do pracy w zakresie teoretycznie nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej (tj. poniżej granicy zmęczenia) posługiwać się warstwami poziomu bezpieczeństwa zmęczeniowego. Podobnie jak warstwy uszkodzenia zmęczeniowego warstwy bezpieczeństwa zmęczeniowego mogłyby się stać przydatne do wizualizacji zagrożenia zmęczeniowego bardziej obciążonych i/lub ważniejszych z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji elementów. Wymagałoby to znajomości procedur wyznaczania współczynnika bezpieczeństwa zmęczeniowego dla znanego (z obliczeń numerycznych) stanu naprężenia w wybranych punktach elementu. Procedury takie są rozpatrywane między innymi w pracy [5]. Niektóre z nich wykorzystano poniżej. Ograniczono się przy tym do przedstawienia formuł obliczeniowych współczynnika bezpieczeństwa zmęczeniowego przy jedno- i wieloosiowych obciążeniach okresowych.

### JEDNOOSIOWE NAPRĘŻENIE HARMONICZNE

W przypadku symetrycznego rozciągania-ściskania prowadzącego do naprężenia normalnego  $\sigma(t)$  o amplitudzie  $\sigma_a$  i częstotliwości kołowej  $\omega$

$$\sigma(t) = \sigma_a \sin \omega t \quad (1)$$

współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego definiuje się wzorem

$$f = \frac{Z_{rc}}{\sigma_a}, \quad (2)$$

gdzie  $Z_{rc}$  — granica zmęczenia przy wahadłowym rozciąganiu-ściskaniu dla danego materiału.

Niniejsza praca nie dotyczy takich materiałów i/lub warunków eksploatacyjnych, gdzie nieograniczona wytrzymałość zmęczeniowa nie występuje (np. konstrukcje pracujące w środowisku morskim).

W jednoosiowym stanie asymetrycznego naprężenia harmonicznego

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t \quad (3)$$

jego wartość średnia  $\sigma_m$  i amplituda  $\sigma_a$  są wyznaczane na podstawie następujących po sobie ekstremów  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  jako

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \quad , \quad \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (4)$$

W celu uwzględnienia wpływu naprężenia średniego na wartość współczynnika bezpieczeństwa zmęczeniowego liczy się go ze wzoru

$$f = \frac{B}{\sigma_a}. \quad (5)$$

Dla materiałów ciągliwych

$$B = Z_{rc} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_e} \right) \quad (\text{Soderberg}) \quad (6a)$$

lub

$$B = Z_{rc} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_e} \right)^4 \right] \quad (\text{Bagci}), \quad (6b)$$

gdzie  $R_e$  — granica plastyczności.

Dla materiałów kruchych

$$B = Z_{rc} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right) \quad (\text{Goodman}) \quad (6c)$$

lub

$$B = Z_{rc} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right] \quad (\text{Gerber}), \quad (6d)$$

gdzie  $R_m$  — wytrzymałość na rozciąganie.

W przypadku cyklicznego zginania zastępuje się  $Z_{rc}$  w (2) i (6) przez granicę zmęczenia przy wahadłowym zginaniu,  $Z_{go}$ . W przypadku jednoosiowego asymetrycznego skręcania, w wyniku którego występuje naprężenie styczne  $\tau(t)$  o wartości średniej  $\tau_m$  i amplitudzie  $\tau_a$

$$\tau(t) = \tau_m + \tau_a \sin \omega t \quad (7)$$

wzór (5) jest zastępowany przez

$$f = \frac{B_s}{\tau_a}, \quad (8)$$

gdzie  $B_s$  powstaje z  $B$  (6) w wyniku następujących zmian:

$$\sigma_m \rightarrow \tau_m;$$

$$Z_{rc} \rightarrow Z_{so} \text{ — granica zmęczenia przy wahadłowym skręcaniu;}$$

$$R_e \rightarrow R_e / \sqrt{3}, \quad R_m \rightarrow R_m / \sqrt{3} \text{ (dla stali).}$$

### JEDNOOSIOWE NAPRĘŻENIE OKRESOWE

Rozważmy przypadek, w którym naprężenie normalne

$$\sigma(t) = \sigma(t + T_0) \quad (9)$$

dane jest w postaci szeregu Fouriera

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_p \sin(p\omega_0 t + \alpha_p), \quad (10)$$

gdzie:  $T_0$  — okres naprężenia;

$\alpha_p$  — kat fazowy  $p$ -tego składnika szeregu;

$\sigma_m$  — naprężenie średnie;

$\sigma_p$  — amplituda  $p$ -tego składnika;

$\omega_0 = 2\pi / T_0$  — podstawowa częstość kołowa naprężenia.

Aby obliczyć współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego, w tym przypadku można wyznaczyć naprężenie zredukowane

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_m + \sigma_e \sin \omega_e t \quad (11)$$

równoważne naprężeniu oryginalnemu w odniesieniu do wytrzymałości zmęczeniowej. W tym celu należy zastosować odpowiednie kryterium, którym często jest zaadaptowane kryterium wytrzymałości statycznej [7]. Zważywszy, że dla materiałów ciągliwych szeroko stosowana jest hipoteza energii odkształcenia postaciowego Hubera von Misesa-Hencky'ego (H-M-H), w pracy [5] została wykorzystana uśredniona energia odkształcenia postaciowego przy naprężeniach (10) i (11). W wyniku ich porównania otrzymano

$$\sigma_e = \left( \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_p^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

We wzorach typu (5) i (8) nie występuje częstość naprężenia, dlatego w niniejszej pracy pominięto zagadnienie wyznaczania częstości kołowej naprężenia zredukowanego  $\omega_e$ .

Zgodnie z powyższym współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego wynosi:

$$f = \frac{B}{\sigma_e}. \quad (13)$$

Dla jednoosiowego skręcania powodującego naprężenie

$$\tau(t) = \tau_m + \sum_{p=1}^{\infty} \tau_p \sin(p\omega_0 t + \beta_p) \quad (14)$$

naprężenie zredukowane i współczynnik bezpieczeństwa można wyznaczyć analogicznie.

### WIELOOSIOWE NAPRĘŻENIE O SYNCHRONICZNYCH SKŁADOWYCH

W przypadku złożonego obciążenia dynamicznego, w którym równocześnie występują zmienne siły i momenty rozciągające, zginające i skręcające, istniejące kryteria wieloosiowego zmęczenia mogą wykazywać znaczny rozrzut [6]. Wynika

to między innymi z faktu, że liniowe kryteria ignorują rolę energii w procesie zmęczenia, a nieliniowe zniekształcają widma naprężeń. Jedynie zgodne w fazie naprężenia o zerowych wartościach średnich i stałych kierunkach głównych mogą być analizowane za pomocą konwencjonalnych hipotez wytężenia [10].

Biorąc pod uwagę, że synchroniczne naprężenia o zgodnych w fazie składowych

$$\sigma_i(t) = \sigma_{mi} + \sigma_{ai} \sin \omega t; \quad i = x, y, z, xy, yz, zx \quad (15)$$

oraz o niezgodnych w fazie składowych

$$\sigma_i(t) = \sigma_{mi} + \sigma_{ai} \sin(\omega t + \alpha_i); \quad i = x, y, \dots, zx \quad (16)$$

mogą być analizowane za pomocą hipotezy H-M-H gdy

$$(a) \quad \sigma_{mi} = 0, \quad \sigma_{ai} \neq 0$$

oraz gdy

$$(b) \quad \sigma_{mi} \neq 0, \quad \sigma_{ai} = 0,$$

hipotezę tę zmodyfikowano tak, aby objęła ona również przypadki gdy

$$(c) \quad \sigma_{mi} \neq 0, \sigma_{ai} \neq 0; \quad i = x, y, \dots, zx \quad (17)$$

i umożliwiła wyznaczenie naprężenia zredukowanego w postaci

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_{me} + \sigma_e \sin \omega t. \quad (18)$$

Zmodyfikowana hipoteza H-M-H, zwana hipotezą uśrednionej energii odkształcenia postaciowego, brzmi [5]:

Naprężenie zredukowane jest równoważne w sensie wytężenia materiału poddanego działaniu statycznych i dynamicznych obciążeń danemu naprężeniu wieloosiowemu jeśli:

- 1) niezależne od czasu składniki energii odkształcenia postaciowego na jednostkę objętości w obu tych stanach naprężenia są jednakowe,
- 2) naprężenie zredukowane i składowe naprężenia wieloosiowego zawierają człony o takich samych częstościach,
- 3) średnie całkowite chwilowych wartości energii odkształcenia postaciowego na jednostkę objętości w obu tych stanach naprężenia są jednakowe.

W wyniku jej zastosowania do naprężeń (15) i (16) otrzymano [5]:

$$\sigma_{me} = \left[ \sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2 + \sigma_{mz}^2 - \sigma_{mx}\sigma_{my} - \sigma_{my}\sigma_{mz} - \sigma_{mz}\sigma_{mx} + \right. \\ \left. + 3(\sigma_{mxy}^2 + \sigma_{myz}^2 + \sigma_{mzx}^2) \right]^{1/2} \quad (19)$$

$$\sigma_e = \left[ \sigma_{ax}^2 + \sigma_{ay}^2 + \sigma_{az}^2 - \sigma_{ax}\sigma_{ay} - \sigma_{ay}\sigma_{az} - \sigma_{az}\sigma_{ax} + \right. \\ \left. + 3(\sigma_{axy}^2 + \sigma_{ayz}^2 + \sigma_{azx}^2) \right]^{1/2} \quad (20)$$

$$\sigma_e = \left[ \sigma_{ax}^2 + \sigma_{ay}^2 + \sigma_{az}^2 - \sigma_{ax}\sigma_{ay} \cos(\alpha_x - \alpha_y) - \sigma_{ay}\sigma_{az} \cos(\alpha_y - \alpha_z) - \right. \\ \left. - \sigma_{az}\sigma_{ax} \cos(\alpha_z - \alpha_x) + 3(\sigma_{axy}^2 + \sigma_{ayz}^2 + \sigma_{azx}^2) \right]^{1/2} \quad (21)$$

Zatem

$$f = \frac{B_e}{\sigma_e} \quad (22)$$

gdzie  $B_e$  powstaje przez wstawienie  $\sigma_{me}$  do (6) na miejsce  $\sigma_m$ .

### WIELOOSIOWE NAPRĘŻENIE OKRESOWE

Niech  $T_0$  oznacza wspólny okres kartezyjskich składowych

$$\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t), \sigma_{xy}(t), \sigma_{yz}(t), \sigma_{zx}(t)$$

naprężenia w analizowanym punkcie konstrukcji zadanych w postaci szeregów Fouriera

$$\sigma_i(t) = \sigma_{mi} + \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_{pi} \sin(\rho\omega_0 t + \alpha_{pi}); \quad i = x, y, \dots, zx, \quad (23)$$

gdzie:  $\alpha_{pi}, \sigma_{pi}$  — kąt fazowy i amplituda  $p$ -tego członu  $i$ -tej składowej naprężenia;

$\omega_0 = 2\pi / T_0$  — podstawowa częstość kołowa naprężenia.

Zgodnie z przedstawioną powyżej koncepcją naprężenia zredukowanego można w odniesieniu do naprężenia o składowych (23) zastosować następującą dwuetapową procedurę [5]:

1) wyznaczenie okresowego zredukowanego naprężenia jednoosiowego

$$\sigma_{eq}^{(1)}(t) = \sigma_{me} + \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_{pe} \sin \rho \omega_0 t; \quad (24)$$

2) wyznaczenie harmonicznego zredukowanego naprężenia jednoosiowego

$$\sigma_{eq}^{(2)}(t) = \sigma_{me} + \sigma_e \sin \omega_e t. \quad (25)$$

Otrzymuje się wówczas zależność (19) na  $\sigma_{me}$  oraz

$$\sigma_{pe} = \left[ \sigma_{px}^2 + \sigma_{py}^2 + \sigma_{pz}^2 - \sigma_{px} \sigma_{py} \cos(\alpha_{px} - \alpha_{py}) - \sigma_{py} \sigma_{pz} \cos(\alpha_{py} - \alpha_{pz}) - \sigma_{pz} \sigma_{px} \cos(\alpha_{pz} - \alpha_{px}) + 3(\sigma_{pxy}^2 + \sigma_{pyz}^2 + \sigma_{pzx}^2) \right]^{1/2}; \quad (26)$$

$$\sigma_e = \left( \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_{pe}^2 \right)^{1/2}; \quad (27)$$

$$f = \frac{B_e}{\sigma_e}. \quad (28)$$

### PRZYKŁAD

Porównaj współczynnik bezpieczeństwa w punktach  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  elementu konstrukcji, w których występują naprężenia normalne  $(\sigma)_h$  zmieniające się w sposób skokowy jak na rysunku 1. zgodnie ze wzorem

$$(\sigma)_h(t) = \sigma_m + \beta_h \sigma_a \left[ H(t) - 2H\left(t - \frac{\pi}{\omega_0}\right) + 2H\left(t - 2\frac{\pi}{\omega_0}\right) - \dots \right]; \quad h = 1, 2, 3,$$

gdzie:  $H$  — funkcja Heaviside'a;

$$\beta_1 = 0,8, \quad \beta_2 = 1,0, \quad \beta_3 = 1,2.$$

#### Rozwiązanie

Naprężenia  $(\sigma)_h$  można rozłożyć w szeregi Fouriera

$$(\sigma)_h(t) = \sigma_m + \frac{4}{\pi} \beta_h \sigma_a \left( \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7} \sin 7\omega_0 t + \dots \right).$$



Ograniczając się do czterech pierwszych harmonicznych, można na podstawie wzoru (12) wyznaczyć naprężenia zredukowane

$$(\sigma_{eq})_h(t) = \sigma_m + (\sigma_e)_h \sin \omega_e t \quad ; \quad h = 1, 2, 3$$

o amplitudach

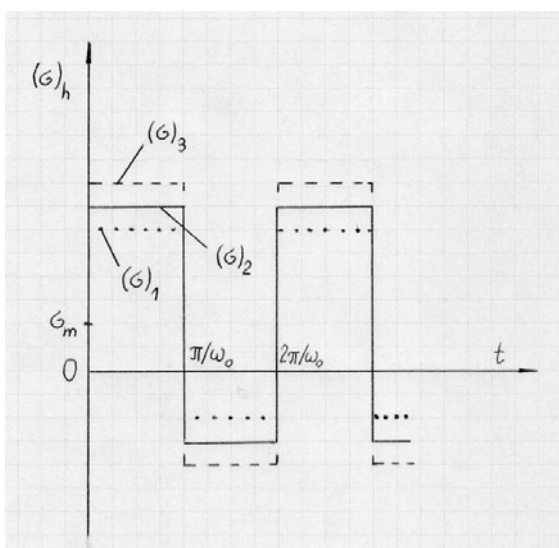
$$(\sigma_e)_h = 1,378 \beta_h \sigma_a \quad ; \quad h = 1, 2, 3.$$

Współczynnik bezpieczeństwa w tych punktach wynosi

$$(f)_h = \frac{B}{(\sigma_e)_h} \quad ; \quad h = 1, 2, 3.$$

Stąd

$$(f)_1 : (f)_2 : (f)_3 = \frac{1}{0,8} : 1 : \frac{1}{1,2}$$



Rys. 1. Przebieg naprężeń  $(\sigma)_h$  w funkcji czasu

### UWAGI KOŃCOWE

1. Dla wybranych punktów  $P_j$  i  $P_k$  elementu konstrukcji można wyliczyć gradient bezpieczeństwa zmęczeniowego

$$g_{jk}(f) = \frac{(f)_k - (f)_j}{\Delta_{jk}}, \quad (29)$$

gdzie:  $(f)_j, (f)_k$  — współczynnik bezpieczeństwa zmęczeniowego w punktach  $P_j$  i  $P_k$ ;  
 $\Delta_{jk}$  — odległość między punktami  $P_j$  i  $P_k$ .

2. Gradientowi  $g_{jk}(f)$  odpowiada gradient zredukowanego naprężenia średniego

$$g_{jk}(\sigma_{me}) = \frac{(\sigma_{me})_k - (\sigma_{me})_j}{\Delta_{jk}} \quad (30)$$

oraz gradient amplitudy naprężenia zredukowanego

$$g_{jk}(\sigma_e) = \frac{(\sigma_e)_k - (\sigma_e)_j}{\Delta_{jk}}. \quad (31)$$

3. Przy zerowym gradiencie naprężenia średniego gradient bezpieczeństwa zmęczeniowego jest wprost proporcjonalny do gradientu amplitudy naprężenia ze znakiem przeciwnym.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Browell R., *Calculating and Displaying Fatigue Results*, ANSYS, Inc., 2006.
- [2] Dobrociński S., *Metody numeryczne w obliczeniach inżynierskich*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 2009.
- [3] Freudenthal A. M., *Fatigue mechanisms, fatigue performance and structural integrity*, Proc. of the Air Force Conference on Fatigue and Fracture of the Aircraft Structures and Materials, Wood et al. ed., AFFDL TR, 1970.
- [4] Kocabicak U., Firat M., *A simple approach for multiaxial fatigue damage prediction based on FEM post-processing*, „Materials and Design”, 2004, Vol. 25.
- [5] Kolenda J., *On fatigue safety of metallic elements under static and dynamic loads*, wyd. II poprawione i rozszerzone, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 2006.
- [6] Łagoda T., Macha E., *Estimated and experimental fatigue lives of 30 CrNiMo8 steel under in- and out-of-phase combined bending and torsion with variable amplitudes*, „Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.”, 1994, Vol. 11.

- [7] Macha E., Sonsino C. M., *Energy criteria of multiaxial fatigue failure*, „Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.”, 1999, Vol. 22.
- [8] MSC/FATIGUE: User’s Guide, Version 2001, MSC Software Corporation, 2002.
- [9] Niesłony A., *Wyznaczanie warstw uszkodzeń zmęczeniowych metodą spektralną*, „Studia i Monografie”, Politechnika Opolska, 2008.
- [10] Sonsino C. M., *Multiaxial fatigue of welded joints under in-phase and out-of-phase local strains and stresses*, „Int. J. Fatigue”, 1995, 1.

## **ON THE DETERMINATION OF MAPS OF FATIGUE SAFETY UNDER PERIODIC LOADS**

### **ABSTRACT**

The paper deals with fatigue ‘safe life’ of elements in machines and structures. In order to determine the maps of fatigue safety under complex loading conditions it is convenient to model the original stress in selected points of the elements by a simple reduced stress, equivalent to the original one in terms of fatigue performance, and to calculate the coefficient of fatigue safety in these points. For this purpose in the present paper the average-distortion-energy strength hypothesis is applied. Uniaxial and multiaxial periodic stresses are considered. Gradient of fatigue safety is defined which facilitates drawing maps of fatigue safety.

Keywords:

complex stress conditio, reduced stress, coefficient of fatigue safety.

Recenzent prof. dr hab. inż. Stanisław Dobrociński