Scientific Journals
Maritime University of Szczecin

Zeszyty Naukowe
Akademia Morska w Szczecinie

2009, 17(89) pp. 77–79

2009, 17(89) s. 77–79

Модель обслуживания системы при ограниченной информации о её надежности

Model obsługiwania systemu przy organiczonej informacji o jego niezawodności

Владимир Пухов

Kaliningradzki Państwowy Uniwersytet Techniczny, 236000 Kaliningrad, Sovietskij pr. 1, Rosja

Ключевые слова: надежность, план проверок, минимаксное значение критерия, техническое состояние системы

Резюме

Приведено теоретическое обоснование модели организации проверок системы с использованием принципа минимаксного значения выбранного критерия при наличиии минимальной информации о надежности этой системы.

Słowa kluczowe: niezawodność, plan obsługiwania, minimalna wartość kryterium, stan techniczny systemu

Abstrakt

W artykule podano teoretyczną zasadę modelu organizacji sprawdzenia systemu z wykorzystaniem zasady minimalnej wartości wybranego kryterium przy minimalnej informacji o niezawodności tego systemu.

Введение

В работе [1, 2] рассмотрены вопросы организации проверок системы при полном отсутствии информации о ее надежности, однако не менее значимой является и разработка модели проверок при наличии некоторой (минимальной) информации (под минимальной информацией о надежности системы понимается знание хотя бы одной точки функции распределения времени между отказами). Такая модель проверок может быть рассмотрена как для случая заданного времени эксплуатации системы, так и для длительно эксплуатируемой системы, работоспособность которой может быть восстановлена полностью после ее отказа (с точки зрения математики это соответствует бесконечному времени эксплуатации системы). Как и ранее используем так называемый минимаксный принцип, когда выбирается такой план проверок, когда обеспечивается минимум предполагаемых максимальных средних потерь для системы в течение времени ее эксплуатации.

Теоретическое обоснование

Предположим, что эксплуатируется система, функция распределения времени безотказной работы f которой известна в одной точке и равна:

$$F(y) = P\{f < y\} = \pi$$

Для обнаружения отказа проводятся проверки в назначенные моменты времени:

$$x_k = \left(k = \overline{0, N}\right)$$

Будем считать, что отказ, появившийся в системе после предыдущей проверки, обнаруживается при очередной проверке с вероятностью, равной 1 (p = 1). Эксплуатация системы длится либо до момента обнаружения отказа, либо до некоторого назначенного момента T, если не был обнаружен отказ до этого момента. За проведение каждой проверки взимается плата C. Кроме того, при простое системы в неработоспособном состоянии за единицу времени теряется стоимость v, т.е. v – величина потерь (в единицу времени) от нахождения системы в состоянии отказа. Считаем, что если отказ появился в момент t, а был обнаружен в момент x $(x > t)$, то потери составляют $v\,(x - t)$. Задача состоит в определении моментов x_k, при которых минимизировались бы максимально возможные ожидаемые потери за указанный период эксплуатации $(0, T)$.

Обозначим через $G_X(x)$ функцию потерь при отказе в момент x. При принятом плане проверок:

$$X = (x_0 = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_m \le y \le x_{m+1} < \ldots < x_{m+n} < x_{m+n+1} = T)$$

эта функция потерь имеет вид:

$$G_X(x) = \begin{cases} (k+1)C + v(x_{k+1} - x) & \text{при } x_k \le x < x_{k+1},\ k = \overline{0, m+n} \\ (m+n)C + \upsilon(T - x) & \text{при } x_{m+n} \le x < T \\ (m+n)C & \text{при } x \ge T = x_{m+n+1} \end{cases} \quad (1)$$

Ожидаемые потери есть линейный функционал:

$$I(F) = \int_0^\infty G_x(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

Обозначим через $m\,(1, y, \pi)$ множество функций распределения, которые в заданной точке у принимают заданное значение π. Тогда нужно определить план X^*, при котором достигается :

$$\min_X \max_{F \in m(1,y,\pi)} I(F)$$

Значение $I(F^*)$, где F^* – наихудшая функция распределения, при которой достигается максимум $I(F)$, можно найти по уравнению:

$$\begin{aligned} I(F^*) &= \max_{F \in m(1,y,\pi)} I(F) = \\ &= \pi \max_{1 \le k \le m} G_x(x_k) + (1-\pi) \max_{x = y, x_{m+1} \ldots x_{m+n}} G_x(x) \end{aligned} \quad (2)$$

т.е. при фиксированном плане X можно определить наихудшую функцию распределения $F^*(x)$.

Выберем теперь план X^*, который минимизирует наихудшие потери. Зафиксируем сначала моменты и количество проверок до y, т.е. величины $m, x_1, \ldots, x_m$ фиксированы, и определим оптимальные моменты $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ и величину $n \ge 0$. Из определения функции потерь $G_x(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} Hn &= \sum_{s=1}^{n} Gx(x_{m+s}) + Gx(y) = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left[(m+s+1)C + v(x_{m+s+1} - x_{m+s})\right] - \\ &\quad - C + (m+1)C + v(x_{m+1} - y) = \\ &= v(T-y) + C\{m(n+1) + n(n/2 + 3/2)\} \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что Hn не зависит от моментов x_{m+s}, а зависит от количества проверок n после момента y. Таким образом, чтобы минимизировать $\max Gx(x)$ в равенстве (2) по всем возможным $x = y,\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ при фиксированных $m, n, x_1, \ldots, x_m$, нужно решить только одну задачу: определить точку $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ на гиперплоскости $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \text{const} = H(z_i \ge 0)$, в которой достигает минимума функция $f\,(z_1, \ldots, z_n) = \max z_i$. Нетрудно заметить, что искомая точка определяется равенством:

$$z_i^* = H/n, i = \overline{1, n}$$

Сделав ряд преобразований, приходим к выводу, что при фиксированных $m, n, x_1, \ldots, x_m$ значения $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ нужно выбрать из условия:

$$G_x(y) = G_x(x_{m+1}) = \ldots = G_x(x_{m+n}) = \frac{H_n}{n+1}$$

Тогда значения x_{m+s} при $s = \overline{1, n}$ определяются из уравнения:

$$x_{m+s} = y + s\left[\frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2\upsilon}\left(\frac{n(n+3)}{n+1} - s - 1\right)\right]$$

а число проверок из условий:

$$n(n-1) < \frac{2\upsilon}{C}(T-y)$$

или

$$n(n+1) \le \frac{2\upsilon}{C}(T-y) - 2$$

Оптимальное m выбирают таким, чтобы минимизировать величину:

$$\pi\left[\frac{C}{2}(m+1) + \frac{\upsilon}{m}y\right] + (1-\pi)\left[\frac{\upsilon\,(T-y)}{n+1}\right] + C\left(m + \frac{n\,(n+3)}{2\,(n+1)}\right) = A_m$$

Исследуя поведение разности $A_{m+1} - A_m$, получаем, что нужно взять минимальное целое положительное m, для которого:

$$m(m+1) > \frac{2\pi\upsilon y}{(2-\pi)C'}$$

или максимальное целое положительное m, для которого:

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi\upsilon y}{(2-\pi)C'}$$

т.е.

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi\upsilon y}{(2-\pi)C} < m(m+1)$$

Таким образом, вышеизложенные рассуждения дают следующий алгоритм построения оптимальных планов при условиях $y = x_m$.

1. Определяем $n = N = \max(0, \min(\tilde{n}, n^*))$, где n^* – наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству:

$$n(n-1) < \frac{2\upsilon}{C}(T-y)$$

$\tilde{n}$ – наибольшее целое, удовлетворяющее условию:

$$n(n+1) \leq \frac{2\upsilon}{C}(T-y) - 2$$

2. Определяем m как наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству:

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi\upsilon y}{(2-\pi)C}$$

3. Находим:

$$x_j = j\left(\frac{y}{m} + \frac{C}{2\upsilon}(m-j)\right) \text{ при } 0 \leq j \leq m$$

4. Определяем:

$$x_{m+j} = y + j\left[\frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2\upsilon}\left(\frac{n+3}{n+1}n - j - 1\right)\right]$$

$$\text{при } j = \overline{1,n}$$

5. Вычисляем минимаксные потери:

$$\pi\left[\frac{C(m+1)}{2} + \frac{\upsilon y}{m}\right] +$$

$$+(1-\pi)\left[\frac{\upsilon(T-y)}{n+1} + C\left(m + \frac{n(n+3)}{2(n+1)}\right)\right]$$

Выводы

Даже при наличии минимальной информации о надежности системы можно установить такой план проверок её состояния, который позволяет обеспечить минимум предполагаемых максимальных средних потерь для рассматриваемого периода эксплуатации этой системы.

Литература

1. Пухов В.В.: Минимаксный подход при определении состояния системы при отсутствии информации о её надежности. Обслуживание машин и судовых устройств //Сб. науч. тр. N 77, Щецин, Польша, 2005, 413–418.
2. Павленко М.И.: Сравнение моделей технического обслуживания систем по неполным данным// Сб. «Основные вопросы теории и практики надежности» М., 1975.

Recenzent:
prof. dr hab. inż. Oleh Klyus
Akademia Morska w Szczecinie