

Janusz Kolenda
Akademia Marynarki Wojennej

RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE MATERIAŁÓW LEPKOSPĘŻYSTYCH PODDANYCH OBCIĄŻENIOM ZŁOŻONYM

STRESZCZENIE

Praca przedstawia dwie wersje równań konstytutywnych materiałów lepkospężystych w ogólnym stanie naprężenia. Do ich wyprowadzenia wykorzystano model Kelvina-Voigta oraz model standardowy, które uogólniono na przestrzeń trójwymiarową. Zastosowano współczynniki umożliwiające uwzględnienie relaksacji odkształceń, relaksacji naprężeń i wpływu chwilowych (nierelaksujących) modułów sprężystości na deformacje materiału przy obciążeniach złożonych poniżej granicy plastyczności.

Słowa kluczowe:

materiał lepkospężysty, równania stanu, trójwymiarowy stan naprężenia.

WSTĘP

Odształcanie ciał jest procesem częściowo nieodwracalnym w sensie energetycznym, gdyż na skutek tłumienia wewnętrznego część energii zostaje rozproszona [1, 2, 4, 6]. Dekrement logarytmiczny tłumienia wewnętrznego zależy od rodzaju materiału, z którego zbudowane jest ciało, oraz od amplitudy i częstości drgań. Tylko dla bardzo małych odkształceń jednostkowych (rzędu 10^{-5}) można go uważać za stały.

Zależność dekrementu tłumienia od częstości jest niedostatecznie zbadana i bardzo złożona. Szczególnie istotny wpływ na poziom tłumienia wewnętrznego ma budowa materii. W przypadku metali nieuporządkowane atomy w siatce krystalicznej starają się zająć nowe położenia równowagi, co wiąże się z dysypacją energii. Na rozpraszanie energii mają również wpływ defekty struktury krystalicznej oraz wtrącenia obcych atomów w sieć krystaliczną. Ponadto na granicach ziaren metalu krystalicznego często występują poślizgi i mikropęknięcia zużywające energię.

Tłumienie wewnętrzne może być też związane ze zjawiskami makrotermosprężystości. Podczas obciążania metalu powstają lokalne różnice temperatur związane z rozproszeniem ciepła, przy czym przy wysokich częstościach proces jest adiabatyczny, a przy niskich – izotermiczny. Podobne różnice można zaobserwować między sąsiadującymi ziarnami i wówczas mówimy o mikrospężystości. W bardzo niskich temperaturach tłumienie może być związane z przepływem elektronów. Jeśli chodzi o metale, to mogą w nich mieć także miejsce drgania linii dyslokacji, które przy dużych naprężeniach prowadzą do zerwania zaczepień w punktach wewnętrznych i utworzenia nowych dyslokacji.

Złożoność tego typu procesów sprawia, że budowę ciała przyjmuje się jako jednorodne kontinuum, którego właściwości opisuje się uproszczonymi modelami reologicznymi. Modelem najbardziej elementarnym jest idealna sprężyna, dla której związek między naprężeniem i odkształceniem opisuje prawo Hooke'a

$$\sigma = E\varepsilon . \quad (1)$$

W równaniu (1) E jest modułem Younga, σ naprężeniem normalnym, a ε – wydłużeniem (lub skróceniem) jednostkowym. Ogólny stan naprężenia ciała idealnie sprężystego określa tensor

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} . \quad (2)$$

Zgodnie z twierdzeniem o równoważności naprężeń stycznych $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ i $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, tensor ten jest symetryczny. Znając tensor (2) i stosując zasadę superpozycji, można wyznaczyć skutki działania poszczególnych jego składowych. Dla idealnie sprężystego materiału izotropowego otrzymuje się w ten sposób uogólnione prawo Hooke'a [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} , \quad (3)$$

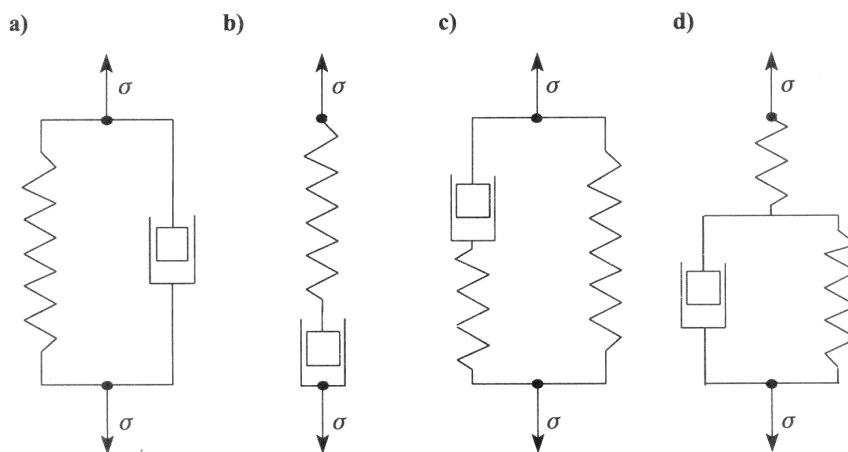
w którym G jest modułem odkształcenia postaciowego, γ są jednostkowymi odkształceniami poprzecznymi, a ν – współczynnikiem Poissona. Pomiędzy modułami E i G zachodzi zależność

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu). \quad (4)$$

Płaszczyzny, na których występują jedynie naprężenia normalne, nazywane są płaszczyznami głównymi, a kierunki do nich prostopadłe – kierunkami głównymi. Znajomość kierunków i naprężeń głównych pozwala na wyrażenie stanu naprężenia za pomocą trzech naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i stanu odkształcenia za pomocą głównych odkształceń jednostkowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Poniżej podano analogiczne relacje dla materiału lepkosprężystego oparte na dwóch reologicznych modelach i dwóch modelach standardowych.



Rys. 1. Podstawowe modele reologiczne: a) Kelvina-Voigta, b) Maxwella, c) i d) standardowe

Model Kelvina-Voigta jest utworzony przez równoległe połączenie sprężyny i tłumika wiskotycznego (rys. 1a). Równanie stanu tego modelu ma postać

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \left(\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \right), \quad (6)$$

gdzie η jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego przy rozciąganiu (ściskaniu). Odpowiednikiem równania (6) w przypadku deformacji skrętnych jest [2, 6]

$$\tau = G\gamma + \lambda\dot{\gamma}, \quad (7)$$

gdzie: τ – naprężenie styczne;

γ – jednostkowe odkształcenie poprzeczne zwane posunięciem;

λ – współczynnik tłumienia wiskotycznego przy skręcaniu.

Innym modelem materiałów lepkosprężystych jest model standardowy, utworzony przez idealną sprężynę połączoną równoległe z modelem Maxwella (idealna sprężyna połączona szeregowo z tłumikiem wiskotycznym), zdefiniowany równaniem [1]

$$\sigma + a\dot{\sigma} = l\varepsilon + m\dot{\varepsilon}, \quad (8)$$

gdzie a, l, m – stałe.

Zważywszy na oznaczenia przyjęte w równaniu (6), zastąpimy (8) równaniem

$$\sigma + a\dot{\sigma} = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (9)$$

i uzupełnimy rozważania o naprężenia styczne na podstawie równania

$$\tau + b\dot{\tau} = G\gamma + \lambda\dot{\gamma}, \quad (10)$$

gdzie b – stała.

RÓWNANIA KONSTITUTYWNE MATERIAŁU OKREŚLONEGO MODELEM KELVINA-VOIGTA

Przy rozciąganiu w kierunku osi x ciała zbudowanego z materiału lepkosprężystego zachodzi, zgodnie z modelem Kelvina-Voigta, równanie

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x. \quad (11)$$

Odształceniom jednostkowym ε_x towarzyszą odształcenia jednostkowe w kierunkach poprzecznych

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \quad , \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad , \quad (12)$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona materiału ciała. Przy założeniu, że ν nie zależy od prędkości odształceń, poziomu naprężeń, temperatury i innych czynników podlegających zmianom, można dla odształceń zmiennych w czasie napisać:

$$\varepsilon_y(t) = -\nu\varepsilon_x(t) \quad , \quad \varepsilon_z(t) = -\nu\varepsilon_x(t) \quad . \quad (13)$$

Przyjęcie stałej wartości ν oznacza, że prędkości odształceń jednostkowych spełniają związki

$$\dot{\varepsilon}_y(t) = -\nu\dot{\varepsilon}_x(t) \quad , \quad \dot{\varepsilon}_z(t) = -\nu\dot{\varepsilon}_x(t) \quad . \quad (14)$$

Podobnie przy rozciąganiu w kierunku osi y powstaje naprężenie

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \eta\dot{\varepsilon}_y \quad (15)$$

oraz odształcenia jednostkowe w kierunkach osi x i z

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y \quad , \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y \quad , \quad (16)$$

których prędkości wynoszą

$$\dot{\varepsilon}_x = -\nu\dot{\varepsilon}_y \quad , \quad \dot{\varepsilon}_z = -\nu\dot{\varepsilon}_y \quad . \quad (17)$$

W wyniku pomnożenia równania (15) przez $-\nu$ otrzymuje się

$$-\nu\sigma_y = -E\nu\varepsilon_y - \eta\nu\dot{\varepsilon}_y \quad , \quad (18)$$

czyli z uwzględnieniem (16) i (17)

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = -\nu\sigma_y \quad . \quad (19)$$

Jeśli rozciąganie ciała zachodzi w kierunku osi z , analogicznie do (19) zachodzi zależność

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = -\nu\sigma_z \quad . \quad (20)$$

Kojarząc równania (11), (19) i (20) zgodnie z zasadą superpozycji, otrzymuje się dla odkształceń jednostkowych w kierunku osi x relację

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z). \quad (21)$$

Podobne postępowanie w odniesieniu do odkształceń jednostkowych w kierunkach osi y i z prowadzi do relacji

$$\begin{aligned} E\varepsilon_y + \eta\dot{\varepsilon}_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\varepsilon_z + \eta\dot{\varepsilon}_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (22)$$

Ich uzupełnieniem są relacje dotyczące naprężeń stycznych i towarzyszących im posunięć

$$\begin{aligned} G\gamma_{xy} + \lambda\dot{\gamma}_{xy} &= \tau_{xy} \\ G\gamma_{yz} + \lambda\dot{\gamma}_{yz} &= \tau_{yz} \\ G\gamma_{zx} + \lambda\dot{\gamma}_{zx} &= \tau_{zx} \end{aligned} \quad (23)$$

Gdy kierunki osi x , y i z są zgodne z kierunkami osi głównych, należy zastąpić relacje (21) – (23) równaniami

$$\begin{aligned} E\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1 &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ E\varepsilon_2 + \eta\dot{\varepsilon}_2 &= \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \\ E\varepsilon_3 + \eta\dot{\varepsilon}_3 &= \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (24)$$

oraz

$$\begin{aligned} G\gamma_{12} + \lambda\dot{\gamma}_{12} &= 0 \\ G\gamma_{23} + \lambda\dot{\gamma}_{23} &= 0 \\ G\gamma_{31} + \lambda\dot{\gamma}_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Z równań (25) wynika, że w odróżnieniu od ciała idealnie sprężystego pomimo braku naprężeń stycznych na płaszczyznach głównych może wystąpić relaksacja posunięć w tych płaszczyznach (pełzanie w kierunkach równoległych do płaszczyzn głównych). Jeśli naprężenia styczne zanikły w chwili $t = 0$ przy warunkach początkowych

$$\gamma_{12}(0) = \gamma_{10} \quad , \quad \gamma_{23}(0) = \gamma_{20} \quad , \quad \gamma_{31}(0) = \gamma_{30} \quad , \quad (26)$$

to rozwiązania równań (25) przyjmują postać

$$\gamma_{12}(t) = Ae^{-rt} \quad , \quad \gamma_{23}(t) = Be^{-rt} \quad , \quad \gamma_{31}(t) = Ce^{-rt} \quad , \quad (27)$$

gdzie A, B, C i r są stałymi.

W wyniku podstawienia (27) do równań (25) otrzymuje się

$$r = \frac{G}{\lambda} \quad , \quad (28)$$

uwzględnienie zaś warunków początkowych daje

$$A = \gamma_{10} \quad , \quad B = \gamma_{20} \quad , \quad C = \gamma_{30} \quad . \quad (29)$$

Stąd

$$\gamma_{12}(t) = \gamma_{10}e^{-Gt/\lambda} \quad , \quad \gamma_{23}(t) = \gamma_{20}e^{-Gt/\lambda} \quad , \quad \gamma_{31}(t) = \gamma_{30}e^{-Gt/\lambda} \quad . \quad (30)$$

Zależności (30) można przedstawić w alternatywnej formie

$$e^{Gt/\lambda} = \frac{\gamma_{10}}{\gamma_{12}(t)} = \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{23}(t)} = \frac{\gamma_{30}}{\gamma_{31}(t)} \quad , \quad (31)$$

co pozwala wyznaczyć współczynnik tłumienia λ ze wzoru

$$\lambda = \frac{Gt}{\ln[\gamma_{10}/\gamma_{12}(t)]} = \frac{Gt}{\ln[\gamma_{20}/\gamma_{23}(t)]} = \frac{Gt}{\ln[\gamma_{30}/\gamma_{31}(t)]} \quad (32)$$

na podstawie wyników pomiaru wybranego posunięcia w chwilach 0 i t . Podobnie określić można współczynnik tłumienia η . Należy jednak zaznaczyć, że pomiędzy współczynnikami η i λ zachodzi zależność [5]

$$\frac{\eta}{\lambda} = 2(1 + \nu) \quad , \quad (33)$$

co oznacza, że

$$\frac{\eta}{\lambda} = \frac{E}{G} \quad . \quad (34)$$

Jedną z zalet przedstawionych równań jest ich prostota wynikająca z zastosowania modelu Kelvina-Voigta. Stanowi to równocześnie ich wadę, przejawiającą się w niemożności odwzorowania relaksacji naprężenia, rozróżnienia chwilowego

nierelaksującego modułu sprężystości (przy szybkim odkształceniu) i długotrwałego relaksującego modułu sprężystości (przy powolnym odkształceniu) [1, 7] itp. Usunięcie tych wad wymagałoby zastosowania modeli o większej liczbie stałych materiałowych. Jednym z nich jest model standardowy.

RÓWNANIA KONSTITUTYWNE MATERIAŁU OKREŚLONEGO MODELEM STANDARDOWYM

W celu uwzględnienia lepkosprężystych własności materiału ciała rozciąganego w kierunku osi x za pomocą modelu standardowego należy równanie (9) zastąpić przez

$$\sigma_x + a\dot{\sigma}_x = E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x. \quad (35)$$

Analogicznie przy rozciąganiu w kierunku osi y zachodzi równanie

$$\sigma_y + a\dot{\sigma}_y = E\varepsilon_y + \eta\dot{\varepsilon}_y, \quad (36)$$

czyli także równanie

$$-v\sigma_y - a\dot{\sigma}_y = -E\varepsilon_y - \eta\dot{\varepsilon}_y, \quad (37)$$

które na podstawie (16) i (17) daje

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = -v\sigma_y - a\dot{\sigma}_y. \quad (38)$$

Podobnie przy rozciąganiu w kierunku osi z otrzymuje się

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = -v\sigma_z - a\dot{\sigma}_z. \quad (39)$$

Równania (35), (38) i (39) są liniowe, dzięki czemu do odkształceń jednostkowych w kierunku osi x można zastosować zasadę superpozycji:

$$E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x = \sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z) + a[\dot{\sigma}_x - v(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)]. \quad (40)$$

Analogiczne równania można uzyskać dla odkształceń jednostkowych w kierunkach osi y i z :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_y + \eta\dot{\varepsilon}_y &= \sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z) + a[\dot{\sigma}_y - v(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z)] \\ E\varepsilon_z + \eta\dot{\varepsilon}_z &= \sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y) + a[\dot{\sigma}_z - v(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)]. \end{aligned} \quad (41)$$

Z kolei dla wywołanych naprężeniami stycznymi posunięć w płaszczyznach xy , yz i xz mamy równania

$$\begin{aligned} G\gamma_{xy} + \lambda\dot{\gamma}_{xy} &= \tau_{xy} + b\dot{\tau}_{xy} \\ G\gamma_{yz} + \lambda\dot{\gamma}_{yz} &= \tau_{yz} + b\dot{\tau}_{yz} \\ G\gamma_{zx} + \lambda\dot{\gamma}_{zx} &= \tau_{zx} + b\dot{\tau}_{zx} \end{aligned} \quad (42)$$

W odróżnieniu od równań (21) – (23) równania konstytutywne (40) – (42) umożliwiają także analizę relaksacji naprężenia.

UWAGI KOŃCOWE

Dalsze zwiększanie dokładności matematycznego odwzorowania procesu deformacji danego materiału lepkosprężystego przy zachowaniu liniowości równań konstytutywnych można uzyskać poprzez dodanie członów z pochodnymi wyższych rzędów [4] w równaniach typu (8)

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \dots = E\varepsilon + m_1\dot{\varepsilon} + m_2\ddot{\varepsilon} + \dots, \quad (43)$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, m_1, m_2, \dots$ są stałymi wyznaczanymi doświadczalnie, a także poprzez wprowadzenie współczynników poprawkowych. Przykładowo, w pracy [7] stosowany jest mnożnik

$$k = \frac{A}{B}, \quad (44)$$

gdzie: A – chwilowy moduł sprężystości;
 B – długotrwały moduł sprężystości,

który uzależnia odpowiedź układu na obciążenia złożone od szybkości odkształcenia. Zgodnie z tą koncepcją należałoby w równaniach (40) – (42) zastąpić człony

$$\eta\dot{\varepsilon}_x, \eta\dot{\varepsilon}_y, \eta\dot{\varepsilon}_z, \lambda\dot{\gamma}_{xy}, \lambda\dot{\gamma}_{yz}, \lambda\dot{\gamma}_{zx}$$

przez

$$\eta \frac{E'}{E} \dot{\varepsilon}_x, \eta \frac{E'}{E} \dot{\varepsilon}_y, \eta \frac{E'}{E} \dot{\varepsilon}_z, \lambda \frac{G'}{G} \dot{\gamma}_{xy}, \lambda \frac{G'}{G} \dot{\gamma}_{yz}, \lambda \frac{G'}{G} \dot{\gamma}_{zx},$$

gdzie: E' – chwilowy moduł sprężystości;
 G' – chwilowy moduł odkształcenia postaciowego.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Awrejcewicz J., Krysko A. W., *Drgania układów ciągłych*, WNT, Warszawa 2000.
- [2] Giergiel J., *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990.
- [3] Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1996.
- [4] Nashif A. D., Johnes D. I. G., Henderson J. P., *Vibration damping*, J. Wiley & Sons, New York 1985.
- [5] Nyashin Y., Lokhov V., Kolenda J., *On the stress-strain relations in viscoelastic solids*, „Marine Technology Transactions”, 2007, Vol. 18 (w druku).
- [6] Panovko J. G., *Vnutrennieje trenije pri koliebanijach uprugich sositiem*, Fizmatgiz, Moskwa 1960.
- [7] Pisarenko G. S., Lebediev A. A., *Soprotivlenije materialov deformirovaniju i razruszeniju pri složnom napriazennom sostojanii*, Izd. Naukova Dumka, Kijew 1969.

ABSTRACT

This paper presents two versions of constitutive equations of viscoelastic materials in the general stress state. To derive them the Kelvin-Voigt's model and the standard model, which have been generalized for the 3-D space, are used. The coefficients applied make it possible to take into account the strain relaxation, stress relaxation and the influence of momentary (non-relaxatory) moduli of elasticity on the material deformations under complex loads below the yield point.

Recenzent dr hab. inż. Marek Sperski, prof. AMW