



Analiza radialnej prędkości pobocznicy cylindrycznego pręta sztywno-plastycznego podczas prostopadłego zderzenia z nieodkształcalną płytą

EDWARD WŁODARCZYK, ADAM JACKOWSKI,
KATARZYNA SARZYŃSKA, MARCIN SARZYŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2,
edward.wlodarczyk@wat.edu.pl, marcin.sarzyński@wat.edu.pl

Streszczenie. Wyprowadzono zamknięte wzory w postaci elementarnych analitycznych funkcji, które jednoznacznie określają dynamikę sztywno-plastycznego pręta uderzającego w nieodkształcalną płytę. Materiał pręta modelowano w strefie odkształceń plastycznych liniowym wzmocnieniem. Rozwiązanie obejmuje duże odkształcenia pręta. Uzyskane w pracy wyniki teoretyczne dobrze aproksymują dane eksperymentalne.

Słowa kluczowe: dynamika pręta sztywno-plastycznego, duże odkształcenia, obciążenie udarowe, test Taylora

1. Wprowadzenie

W 1948 roku Taylor opracował jednowymiarową teorię plastycznych odkształceń płasko zakończonego długiego pręta po prostopadłym uderzeniu nim w sztywną płaską tarczę (płytę) [1]. Teoria ta pozwala oszacować dynamiczną wartość granicy plastyczności materiału pręta na podstawie geometrycznego obrazu odkształconego plastycznie pręta podczas udaru. Obszerną eksperymentalną ilustrację tej metody przedstawiono w pracy [2].

Od tego czasu nastąpiło szerokie zainteresowanie testem udarowym i szacowaniem wartości dynamicznej granicy plastyczności [3-21]. Selektywny przegląd literatury dotyczącej tego problemu podany jest między innymi w pracach [12, 22,

23 i 25]. W literaturze prezentowany jest pogląd, że jednowymiarowa teoria Taylora wykazuje braki w dokładnym szacowaniu wartości dynamicznej granicy plastyczności, szczególnie w zakresie dużych prędkości uderzenia. Z tego powodu wielu badaczy koreluje wyniki eksperymentalne z nowoczesnymi analizami komputerowymi, które umożliwiają stosowanie złożonych postaci związków konstytutywnych, opisujących materiał pręta z uwzględnieniem efektów dynamicznych. Odpowiednie kody numeryczne dokładnie aproksymują kształt zdeformowanej plastycznie podczas udaru próbki (pręta). Pozwala to na określenie rzeczywistych dynamicznych właściwości jej materiału. Wadą metod komputerowych jest duży koszt programów. Poza tym bardzo często wymagają dużo czasu do ich realizacji.

Autorzy pracy [12] twierdzą, że proste jednowymiarowe teorie inżynierskie, takie jak metoda Taylora, nie straciły jednak jeszcze na znaczeniu. Uderzeniowy test Taylora jest użytecznym eksperymentem dla oceniania mechanicznych właściwości materiału przy wysokich szybkościach odkształcenia. Jest prosty w stosowaniu, powtarzalny i ekonomiczny. Takie teorie często dają badaczom wgląd we wzajemne oddziaływanie fizycznych parametrów i ich relacje do wyniku danego zdarzenia. Te oddziaływania są najczęściej trudne do zauważenia na zawiłych, skomplikowanych wydrukach komputerowych. Ponadto, proste inżynierskie teorie często dostarczają podstawy do projektowania eksperymentów i interpretacji wyników badań.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono inżynierską metodę przybliżonego określania radialnej prędkości poboczniccy cylindrycznego pręta w oparciu o jednowymiarowy udarowy test Taylora. Idea metody opiera się o wykorzystanie definicji nominalnego radialnego odkształcenia pręta, tj.

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta D}{D} = -\nu \frac{\Delta L}{L} = -\nu \varepsilon_x, \quad (1.1)$$

gdzie: ε_x — nominalne odkształcenie osiowe;
 ε_r — nominalne odkształcenie radialne;
 ν — liczba Poissona;
 ΔL — zmiana długości pręta;
 L — początkowa długość pręta;
 ΔD — zmiana średnicy pręta;
 D — początkowa średnica pręta.

Po zróżniczkowaniu wyrażenia (1.1) względem czasu otrzymuje się:

$$v = \frac{d(\Delta D)}{dt} = D \frac{d\varepsilon_r}{dt} = -\nu D \frac{d\varepsilon_x}{dt}, \quad (1.2)$$

gdzie literą v oznaczono radialną prędkość poboczniccy pręta.

Z relacji (1.2) wynika, że prędkość v można jednoznacznie określić za pomocą szybkości osiowego odkształcenia pręta, tj. $d\epsilon_x/dt$. Mając to na uwadze, jako pierwszy w kolejności rozpatrzmy jednowymiarowy stan plastycznego odkształcenia pręta podczas prostopadłego zderzenia z nieodkształcalną płytą (test Taylora). Materiał pręta jest sztywno-plastyczny z liniowym wzmocnieniem i nieściśliwy w strefie odkształceń plastycznych.

2. Sformułowanie równań określających jednowymiarowy mechaniczny stan pręta sztywno-plastycznego uderzającego prostopadle w nieodkształcalną płytę

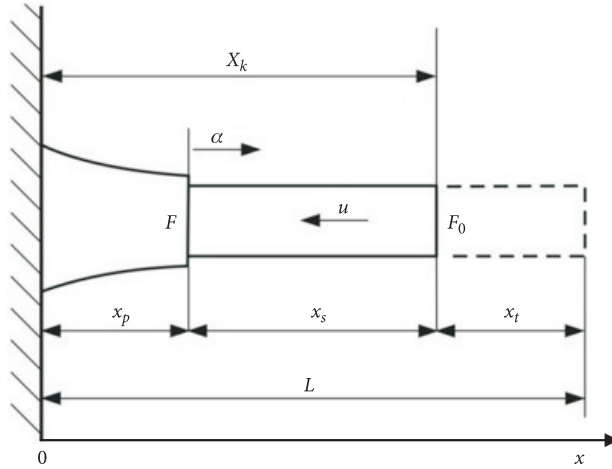
Właściwości mechaniczne wielu metali, które ulegają pod odpowiednim obciążeniem trwałym odkształceniom plastycznym, można aproksymować z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością modelem sztywno-plastycznym. W modelu takim pomija się odkształcenie sprężyste ($\epsilon_s = 0$), które jest o ponad rząd wielkości mniejsze od występujących w technice trwałych odkształceń plastycznych [26].

Zgodnie z teorią plastyczności [27], w miarę wzrostu odkształceń plastycznych liczba Poissona ν zbliża się do 0,5. Mając to na uwadze, przyjmujemy, że w strefie plastycznego płynięcia $\nu \approx 0,5$, tzn. materiał pręta jest nieściśliwy. Analogiczne założenia zawarto w pracy [14], której wyniki wykorzystano w niniejszym opracowaniu.

Przy prostopadłym uderzeniu sztywno-plastycznego pręta w nieodkształcalną płytę, z dostatecznie dużą prędkością U , generuje się w nim plastyczna fala naprężenia. Fala ta rozprzestrzenia się od płaszczyzny kolizji w kierunku tylnego końca pręta z bezwzględną, zmienną z upływem czasu prędkością $a = a(t)$. W rozpatrywanym sztywno-plastycznym modelu materiału pręta, tylna jego część o chwilowej długości $x_s(t)$, położona przed frontem fali plastycznej, przemieszcza się w kierunku płyty jak sztywne ciało ze zmienną podczas procesu zderzenia bezwzględną prędkością $u = u(t)$. Pozostały, odkształcany plastycznie fragment pręta, zawarty między frontem fali i sztywną płytą, z powodu braku odkształceń sprężystych ($\epsilon_s = 0$) jest nieruchomy. Jednym słowem, każdy element pręta po odkształceniu plastycznym jest w sposób nagły wyhamowany za frontem fali do zerowej prędkości.

Dla uzupełnienia jakościowego opisu schematu rozwiązywanego problemu oznaczamy literami F i σ odpowiednio: pole poprzecznego przekroju pręta i naprężenie nominalne tuż za frontem fali plastycznej, natomiast symbolami F_0 i σ_s te same wielkości tuż przed frontem fali.

Opisany wyżej jakościowy schemat deformacji pręta podczas procesu zderzenia z płytą, na którym oparto konstrukcję rozwiązania problemu, pokazany jest na rysunku 1.



Rys. 1. Postać deformacji sztywno-plastycznego pręta podczas procesu zderzenia

Z nieściśliwości materiału pręta w strefie odkształceń plastycznych i modelu sztywno-plastycznego wynika następujące równanie ciągłości ruchu badanego układu:

$$(a + u)dtF_0 = a dtF. \quad (2.1)$$

Z wyrażenia (2.1), po przekształceniach, otrzymuje się:

$$F_0 - F = -F_0 \frac{u}{a}. \quad (2.2)$$

Dalej, z definicji nominalnego ściskającego odkształcenia osiowego ε_x za frontem fali plastycznej i wyrażen (2.1) oraz (2.2) wynika, że:

$$\varepsilon_x = \frac{F - F_0}{F} = \frac{u}{a + u}. \quad (2.3)$$

Podczas procesu zderzenia, elementy sztywnego odcinka pręta położone od strony płyty są permanentnie odkształcane plastycznie na froncie fali i powiększają w sposób ciągły strefę odkształcenia plastycznego. Zatem długość odcinka sztywnego x_s jest malejącą funkcją czasu i jej różniczka dx jest ujemna, tj.

$$dx_s = -(a + u)dt. \quad (2.4)$$

Następnie z zasady zmiany ilości ruchu (pędu) elementu pręta przy przejściu przez front fali wynika, że:

$$\rho(a+u)dtF_0u = (\sigma - \sigma_s)F_0dt, \quad (2.5)$$

gdzie σ_s jest nominalną granicą plastyczności, a ρ — gęstością materiału pręta, σ oznacza nominalne naprężenie bieżące.

Z kolei równanie ruchu sztywnego odcinka pręta ma postać:

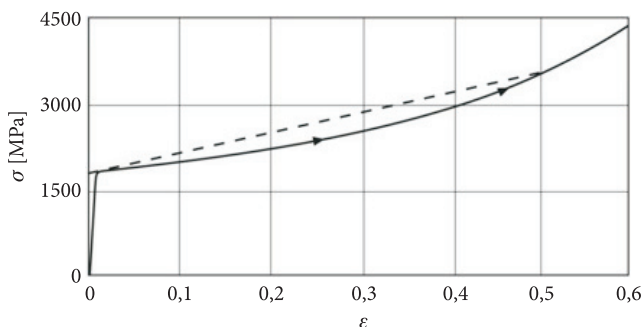
$$\rho x_s \frac{du}{dt} = -\sigma_s. \quad (2.6)$$

Dla domknięcia podanego wyżej matematycznego modelu rozpatrywanego problemu początkowo-brzegowego, przyjmujemy liniowe wzmocnienie materiału pręta w strefie odkształcenia plastycznego, tj.

$$\sigma - \sigma_s = E_w \varepsilon_x, \quad (2.7)$$

gdzie E_w jest modułem wzmocnienia.

Zależnością (2.7) można aproksymować, z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością, wykresy naprężenie-odkształcenie dla wysokowytrzymałych stali stopowych — linia przerywana na rysunku 2.



Rys. 2. Wykres σ - ε dla stali niklowo-chromowej przy statycznym odkształceniu ściskającym [14]

3. Wyprowadzenie analitycznych wzorów określających mechaniczne parametry w pręcie sztywno-plastycznym z liniowym wzmocnieniem

Z zależności (2.3), (2.5) i (2.7) po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$u = c\varepsilon_x, \quad (3.1)$$

$$a = c(1 - \varepsilon_x), \quad (3.2)$$

gdzie

$$c = \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}. \quad (3.3)$$

Ze wzorów (3.1) i (3.2) wynika, że

$$a + u = c = \text{const}. \quad (3.4)$$

Równanie (2.4), po uwzględnieniu (3.4), redukuje się do postaci

$$dx_s = -cdt,$$

a po scałkowaniu i wykorzystaniu warunku początkowego $x_s = L$ dla $t = 0$, mamy:

$$x_s = L - ct. \quad (3.5)$$

Zatem w analizowanym pręcie długość jego sztywnej części maleje wprost proporcjonalnie do czasu w procesie zderzenia.

Z kolei równanie (2.6), uzupełnione wyrażeniem (3.5) i warunkiem początkowym $u = U$ dla $t = 0$, po scałkowaniu daje:

$$u(t) = U + \frac{\sigma_s}{\rho c} \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right). \quad (3.6)$$

Następnie z (3.4) i (3.6) wynika, że

$$a(t) = c - u(t) = c - U - \frac{\sigma_s}{\rho c} \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right). \quad (3.7)$$

Z warunku $u = 0$ i wyrażenia (3.6) można określić wartość okresu t_k , po którym kończy się proces zderzenia, a mianowicie:

$$\ln\left(1 - \frac{ct_k}{L}\right) = -\frac{\rho c U}{\sigma_s}$$

lub

$$t_k = \frac{L}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho c U}{\sigma_s}\right) \right]. \quad (3.8)$$

Końcowa (graniczna) długość nieodkształconego odcinka pręta, zgodnie z wyrażeniem (3.5) i (3.8), wynosi:

$$x_{sk} = L \exp\left(-\frac{\rho c U}{\sigma_s}\right) = L \exp\left(-\frac{\sqrt{\rho E_w}}{\sigma_s} U\right). \quad (3.9a)$$

Z powyższego wzoru wynika, że końcowa długość sztywnego odcinka pręta x_{sk} dla danego materiału (ρ , σ_s , E_w) maleje eksponentalnie wraz ze wzrostem początkowej prędkości uderzenia U . Jeśli $U \rightarrow \infty$, wówczas $x_s \rightarrow 0$. Oznacza to, że ze względu na ograniczoną wartość prędkości uderzenia ($U < c$) w ramach rozpatrywanego modelu tylko część pręta sztywno-plastycznego obciążonego z jednego końca udarem może być odkształcona plastycznie (rys. 3). Podobne zjawisko występuje w przecie sprężysto-plastycznym [28]. Spowodowane jest to odbijanymi periodycznie od swobodnego końca falami naprężenia rozciągającego, które redukują obciążenie generowane udarem i w końcu likwidują go. W przypadku pręta sztywno-plastycznego proces ten przebiega w sposób ciągły ze względu na nieskończoną prędkość rozprzestrzeniania się fal sprężystych ($a_s = \sqrt{E_s/\rho} = \infty$) w takim modelu.

Ze wzoru (3.9a) po przekształceniach otrzymuje się wyrażenie określające dynamiczną granicę plastyczności w postaci

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\rho E_w}}{\ln(L/x_{sk})} U. \quad (3.9b)$$

Za pomocą tej prostej zależności można oszacować wartość dynamicznej granicy plastyczności dla danego materiału pręta (ρ , E_w) przez pomiar końcowej długości sztywnego (nieodkształconego) odcinka pręta, x_{sk} , przy danej prędkości uderzenia, U .

Tyłny koniec pręta podczas procesu zderzenia przemieszcza się zgodnie z następującą relacją:

$$x_t = \int_0^t u(\tau) d\tau = \int_0^t \left[U + \frac{\sigma_s}{\rho c} \ln\left(1 - \frac{c\tau}{L}\right) \right] d\tau = \quad (3.10)$$

$$Ut - \frac{\sigma_s}{E_w} L \left[\left(1 - \frac{ct}{L}\right) \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right) + \frac{ct}{L} \right].$$

Wyrażenia (3.5), (3.7) i (3.10) pozwalają określić zmienną z wpływem czasu podczas procesu zderzenia długość strefy pręta odkształconej plastycznie, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \int_0^t a(\tau) d\tau = L - [x_s(t) + x_t(t)] = \\
 &= \left[c \left(1 + \frac{\sigma_s}{E_w} \right) - U \right] t + L \frac{\sigma_s}{E_w} \left(1 - \frac{ct}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wszystkie parametry pręta odkształconego udarem określone są za pomocą jawnych analitycznych funkcji czasu t , który jest zmienną niezależną. Niech x oznacza współrzędną Lagrange'a skierowaną wzdłuż osi pręta z początkiem umieszczonym w płaszczyźnie zderzenia (rys. 1). Wówczas współrzędna x położenia frontu fali plastycznej w chwili t wynosi:

$$x(t) = L - x_s(t) = ct, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq t \leq t_k; \quad 0 \leq x \leq ct_k. \tag{3.12}$$

Osiowe odkształcenie plastyczne, zgodnie z wzorami (3.1) i (3.6), określone jest funkcją:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{u(t)}{c} = \frac{U}{c} + \frac{\sigma_s}{E_w} \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right). \tag{3.13}$$

Ponieważ $\ln(1 - ct/L) \leq 0$, więc maksymalna wartość odkształcenia ściskającego osiągana jest w chwili zderzenia pręta z płytą ($t = 0$), występuje w przekroju kontaktującym z płytą i wynosi:

$$\varepsilon_{x\max} = \varepsilon_x(0) = \frac{U}{c} = U / \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}. \tag{3.14}$$

Wyprowadzone wyżej wzory pozwalają explicite określić bieżącą średnicę pręta na odcinku plastycznie odkształconym. Wykorzystujemy do tego celu wzory: (2.3), (3.1), (3.2) i (3.13), z których jednoznacznie wynika, że

$$D_p(t) = \frac{D}{\sqrt{1 - \varepsilon_x(t)}} = D \left[1 - \frac{U}{c} - \frac{\sigma_s}{E_w} \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.15}$$

gdzie symbolem D_p oznaczono bieżącą średnicę odcinka pręta plastycznie odkształconego. Zgodnie z wzorem (3.15), maksymalna wartość średnicy D_p osiągana jest w przekroju kontaktującym z płytą, tj. dla $t = 0$ i wynosi:

$$D_{p\max} = D_p(0) = D \left(1 - \frac{U}{c} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Jak widać, D_{pmax} intensywnie rośnie wraz ze wzrostem prędkości uderzenia U i przy $U \rightarrow c$ dąży do nieskończoności. Jest to wynik nierealny, ponieważ pręt wcześniej ulegnie zniszczeniu. Fakt ten potwierdzają wyniki eksperymentalne zamieszczone na rysunku 3.



Rys. 3. Cylindry stalowe po uderzeniu [2]

4. Radialna prędkość poboczniccy odkształcanego plastycznie odcinka pręta

Szybkość zmiany odkształcenia osiowego, zgodnie z definicją i wyrażeniem (3.13), można określić wzorem:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \dot{\varepsilon}_x(t) = -\frac{\sigma_s}{\rho c} \frac{1}{L-ct} = -\frac{\sigma_s}{E_w} \frac{c}{L-ct} = -\frac{\sigma_s}{E_w} \frac{c}{x_s}. \quad (4.1)$$

Zatem radialną prędkość poboczniccy części pręta odkształcanego plastycznie, według jednowymiarowej teorii zderzenia sztywno-plastycznego, można aproksymować następującym wzorem:

$$v(t) = -\nu D \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \nu \frac{\sigma_s}{E_w} \frac{D}{L} \frac{c}{1-(ct)/L} = \nu \frac{\sigma_s}{E_w} \frac{D}{x_s} c. \quad (4.2)$$

Z powyższej zależności wynika, że radialna prędkość poboczniccy spęczanego plastycznie odcinka pręta rośnie odwrotnie proporcjonalnie do długości sztywnej jego części, tj. x_s . Minimalna wartość prędkości radialnej osiągnięta jest w elemencie pręta kontaktującym z płytą w momencie zderzenia, tj. dla $t = 0$ ($x_s = L$), i wynosi:

$$v_{\min}(t) = v(0) = \nu \frac{\sigma_s}{E_w} \frac{D}{L} c = \nu \frac{\sigma_s}{E_w} \frac{D}{L} \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}. \quad (4.3)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że v_{\min} występuje w czołowym przekroju pręta ($x = 0$) i zależy tylko od jego wymiarów (L, D) oraz materiału, z którego jest wykonany (ν, ρ, σ_s, E_w). Natomiast nie zależy od początkowej prędkości uderzenia U pręta w płytę. Prawdopodobnie spowodowane jest to masą odkształconego plastycznie elementu pręta, która w tym przekroju jest największa i jej inercja maksymalnie redukuje prędkość radialnej ekspansji tego elementu.

Prędkość radialna osiąga maksymalną wartość na froncie fali plastycznej w chwili zakończenia procesu zderzenia, tj. dla $t = t_k$. Zatem zgodnie z wyrażeniem (4.2) i wzorem (3.8) otrzymuje się:

$$v_{\max}(t) = v(t_k) = \nu \frac{\sigma_s D}{E_w L} \sqrt{\frac{E_w}{\rho}} \exp\left(\frac{E_w U}{\sigma_s c}\right) = v(0) \exp\left(\frac{E_w U}{\sigma_s c}\right). \quad (4.4)$$

W tym przypadku v_{\max} rośnie eksponentalnie wraz ze wzrostem początkowej prędkości uderzenia U .

Wzrost radialnej prędkości poboczniczy spęczanego odcinka pręta spowodowany jest zwiększaniem się bezwzględnej wartości szybkości zmian osiowego odkształcenia ($d\epsilon_x/dt$) w kierunku propagacji fali plastycznej (4.1), która maksimum osiąga na jej froncie.

Przedstawione wyżej rozważanie analityczne zilustrujemy przykładem liczbowym z ilościową analizą wybranych parametrów charakteryzujących dynamikę odkształcanego pręta.

5. Przykład

Do przykładowych obliczeń przyjęto pręt (pocisk) o długości $L = 0,01143$ m (0,45 cala) i średnicy $D = 0,00762$ m (0,3 cala). Materiałem pręta jest wysokowytrzymała stal stopowa charakteryzowana następującymi parametrami: liczba Poissona $\nu = 0,3$; gęstość $\rho = 7800$ kg/m³, moduł liniowego wzmocnienia $E_w = 3500$ MPa, prędkość rozprzestrzeniania się frontu fali plastycznej we współrzędnych Lagrange'a (x, t) $c = \sqrt{E_w/\rho} = 670$ m/s, umowna (nominalna) statyczna granica plastyczności $\sigma_s = R_{0,2} = 1800$ MPa, maksymalne odkształcenie $\epsilon_{x\max} = 0,6$. W strefie odkształceń plastycznych przyjęto $\nu = 0,4$. Statyczny związek σ - ϵ dla tej stali pokazany jest na rysunku 3. Linią przerywaną aproksymowano liniowe wzmocnienie stali.

Obliczenia liczbowe wykonano dla czterech początkowych wartości prędkości uderzenia w płytę: $U = 100$ m/s, $U = 200$ m/s, $U = 300$ m/s i $U = 400$ m/s.

Dla przyjętych wyżej danych liczbowych charakteryzujących wymiary i materiał pręta, zgodnie z wyprowadzonymi w poprzednich częściach pracy analitycznymi zamkniętymi wzorami, otrzymuje się następujące wartości graniczne wybranych wielkości:

- dla $U = 100$ m/s:
 $t_k = 4,2989 \cdot 10^{-6}$ s;
 $x_{sk} = 0,748L$; $x_{tk} = 0,020L$; $x_{pk} = 0,232L$;
 $D_{p\max} = D_p(0) = 1,084D$;
 $v_{\min} = v(0) = 91,87$ m/s; $v_{\max} = v(t_k) = 122,81$ m/s;
 $\varepsilon_{x\max} = \varepsilon_x(0) = 0,149$;
 $\dot{\varepsilon}_{x\max} = 4,03 \cdot 10^4$ 1/s; $\dot{\varepsilon}_{x\min} = 3,01 \cdot 10^4$ 1/s;
 $\sigma_{\max} = 2322$ MPa;
- dla $U = 200$ m/s:
 $t_k = 7,5148 \cdot 10^{-6}$ s;
 $x_{sk} = 0,559L$; $x_{tk} = 0,072L$; $x_{pk} = 0,368L$;
 $D_{p\max} = D_p(0) = 1,194D$;
 $v_{\min} = v(0) = 91,87$ m/s; $v_{\max} = v(t_k) = 164,17$ m/s;
 $\varepsilon_{x\max} = \varepsilon_x(0) = 0,298$;
 $\dot{\varepsilon}_{x\max} = 5,39 \cdot 10^4$ 1/s; $\dot{\varepsilon}_{x\min} = 3,01 \cdot 10^4$ 1/s;
 $\sigma_{\max} = 2845$ MPa;
- dla $U = 300$ m/s:
 $t_k = 9,9204 \cdot 10^{-6}$ s;
 $x_{sk} = 0,419L$; $x_{tk} = 0,149L$; $x_{pk} = 0,432L$;
 $D_{p\max} = D_p(0) = 1,346D$;
 $v_{\min} = v(0) = 91,87$ m/s; $v_{\max} = v(t_k) = 219,46$ m/s;
 $\varepsilon_{x\max} = \varepsilon_x(0) = 0,448$;
 $\dot{\varepsilon}_{x\max} = 7,20 \cdot 10^4$ 1/s; $\dot{\varepsilon}_{x\min} = 3,01 \cdot 10^4$ 1/s;
 $\sigma_{\max} = 3367$ MPa;
- dla $U = 400$ m/s:
 $t_k = 11,72 \cdot 10^{-6}$ s;
 $x_{sk} = 0,313L$; $x_{tk} = 0,244L$; $x_{pk} = 0,443L$;
 $D_{p\max} = D_p(0) = 1,576D$;
 $v_{\min} = v(0) = 91,87$ m/s; $v_{\max} = v(t_k) = 293,37$ m/s;
 $\varepsilon_{x\max} = \varepsilon_x(0) = 0,597$;
 $\dot{\varepsilon}_{x\max} = 9,63 \cdot 10^4$ 1/s; $\dot{\varepsilon}_{x\min} = 3,01 \cdot 10^4$ 1/s;
 $\sigma_{\max} = 3890$ MPa.

W tabeli 1 zamieszczono dyskretne wartości parametrów obliczone dla ustalonych chwil czasu, które charakteryzują mechaniczny stan pręta podczas procesu plastycznego odkształcania przy czterech wartościach początkowej prędkości zderzenia: $U = 100$ m/s, $U = 200$ m/s, $U = 300$ m/s i $U = 400$ m/s.

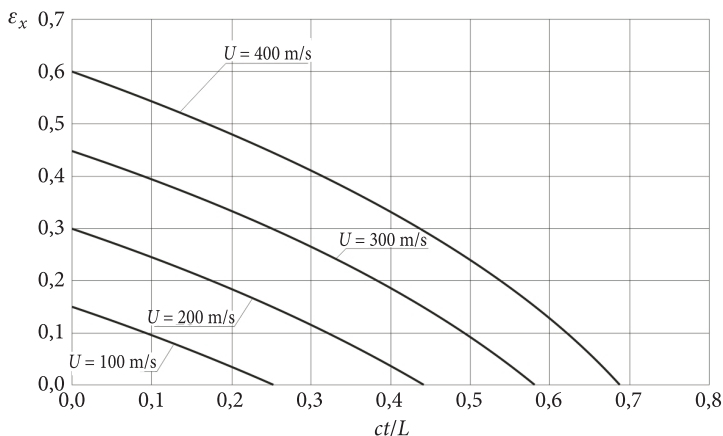
TABELA 1

Wartości wybranych parametrów mechanicznego stanu pręta w dyskretnych chwilach czasu podczas procesu zderzenia

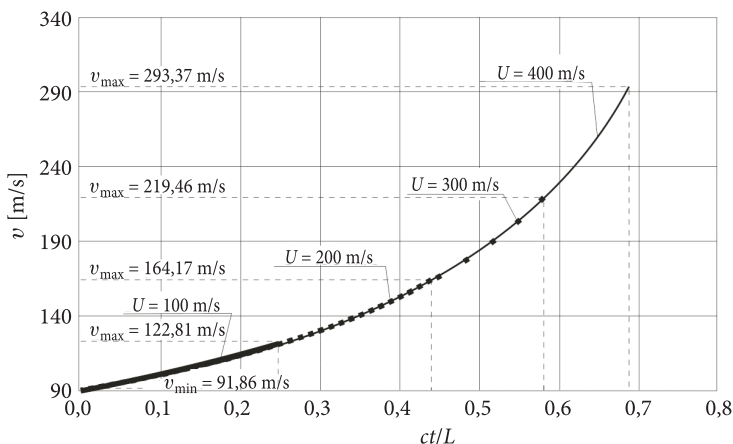
		$t \cdot 10^6$ [s]	0	2	4	4,29			
U = 100 m/s	ct/L	0	0,117	0,234	0,252				
	x_s/L	1	0,883	0,765	0,748				
	x_t/L	0	0,014	0,020	0,020				
	x_p/L	0	0,103	0,215	0,232				
	ε_x	0,149	0,085	0,012	0				
	D_p/D	1,084	1,046	1,006	1				
	a/c	0,851	0,915	0,988	1				
	u/c	0,149	0,085	0,012	0				
	v [m/s]	91,86	104,06	120,00	122,81				
		$t \cdot 10^6$ [s]	0	2	4	6	7,51		
U = 200 m/s	ct/L	0	0,117	0,234	0,352	0,440			
	x_s/L	1	0,882	0,765	0,648	0,559			
	x_t/L	0	0,031	0,054	0,069	0,072			
	x_p/L	0	0,086	0,180	0,283	0,368			
	ε_x	0,298	0,234	0,161	0,076	0			
	D_p/D	1,194	1,143	1,092	1,040	1			
	a/c	0,701	0,765	0,839	0,924	1			
	u/c	0,299	0,235	0,161	0,076	0			
	v [m/s]	91,86	104,06	120,00	141,69	164,17			
		$t \cdot 10^6$ [s]	0	2	4	6	8	9,92	
U = 300 m/s	ct/L	0	0,117	0,234	0,352	0,469	0,581		
	x_s/L	1	0,883	0,766	0,648	0,531	0,419		
	x_t/L	0	0,049	0,090	0,121	0,142	0,149		
	x_p/L	0	0,068	0,145	0,231	0,327	0,433		
	ε_x	0,448	0,384	0,310	0,225	0,122	0		
	D_p/D	1,346	1,274	1,204	1,136	1,067	1		
	a/c	0,552	0,616	0,690	0,775	0,878	1		
	u/c	0,448	0,384	0,310	0,225	0,122	0		
	v [m/s]	91,86	104,06	120,00	141,69	172,96	219,46		
		$t \cdot 10^6$ [s]	0	2	4	6	8	10	11,72
U = 400 m/s	ct/L	0	0,117	0,234	0,352	0,469	0,586	0,687	
	x_s/L	1	0,883	0,766	0,648	0,531	0,414	0,313	
	x_t/L	0	0,066	0,125	0,174	0,212	0,236	0,244	
	x_p/L	0	0,051	0,110	0,178	0,257	0,350	0,443	
	ε_x	0,597	0,533	0,460	0,374	0,272	0,144	0	
	D_p/D	1,576	1,463	1,361	1,264	1,172	1,081	1	
	a/c	0,403	0,467	0,540	0,626	0,728	0,856	1	
	u/c	0,597	0,533	0,460	0,374	0,272	0,144	0	
	v [m/s]	91,86	104,06	120,00	141,69	172,96	221,93	293,37	

Z kolei na rysunku 4 przedstawiono zmianę trwałego osiowego odkształcenia ε_x w funkcji zmiennej ct/L dla czterech prędkości uderzenia: $U = 100$ m/s, $U = 200$ m/s, $U = 300$ m/s i $U = 400$ m/s. Jak już stwierdzono wcześniej, odkształcenie ε_x osiąga maksymalną wartość w chwili zderzenia z płytą ($t = 0$), tj. w przekroju $x = 0$ i następnie maleje w przybliżeniu parabolicznie do zera, które osiąga w przekroju $x_k = 0,232L$ dla $U = 100$ m/s, $x_k = 0,368L$ dla $U = 200$ m/s, $x_k = 0,432L$ dla $U = 300$ m/s i $x_k = 0,443L$ dla $U = 400$ m/s, gdzie $x_k = ct_k$. Konsekwencją zmniejszania się odkształcenia ε_x w miarę oddalania się od płyty jest wzrost prędkości radialnej v w funkcji zmiennych (ct/L) i x/L , który pokazano w analogicznym układzie na rysunku 5.

Końcowe kształty odkształconych prętów po uderzeniu z prędkościami $U = 100$ m/s, $U = 200$ m/s, $U = 300$ m/s i $U = 400$ m/s uzyskane z teoretycznych

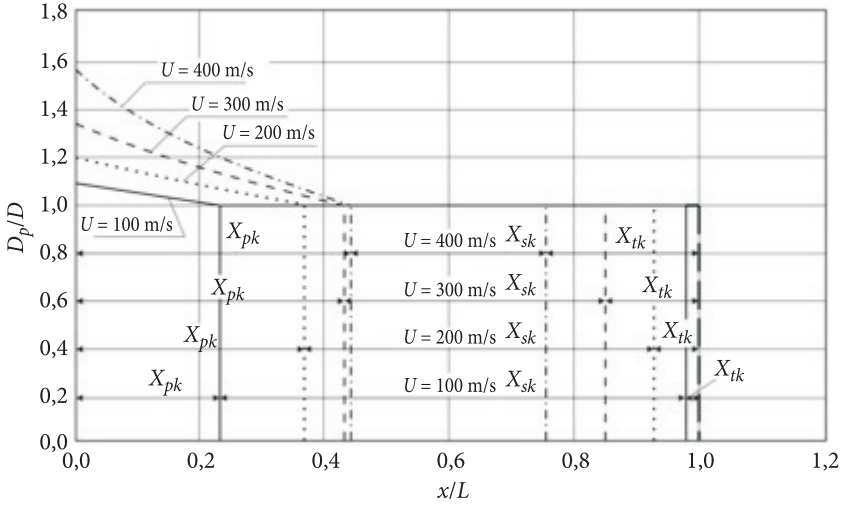


Rys. 4. Zmiana odkształcenia ε_x w funkcji (ct/L)

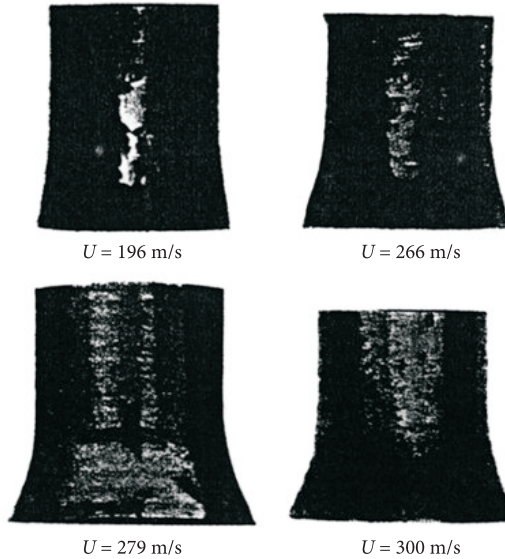


Rys. 5. Zmiana prędkości radialnej v w funkcji (ct/L)

obliczeń, pokazano na rysunku 6. Otrzymane kształty dobrze korelują z danymi eksperymentalnymi zamieszczonymi w pracach [2] i [14] (rys. 7).



Rys. 6. Końcowe stany odkształcenia prętów po uderzeniu z prędkościami $U = 100$ m/s, $U = 200$ m/s, $U = 300$ m/s i $U = 400$ m/s



Rys. 7. Kształty cylindrów odkształconych plastycznie po teście Taylora. Początkowe wymiary cylindrów jednakowe: $L = 0,0127$ m, $D_0 = 0,00762$ m

6. Wnioski końcowe

- 1) W pracy wyprowadzono zamknięte wzory w postaci analitycznych funkcji, które jednoznacznie określają dynamikę sztywno-plastycznego pręta podczas prostopadłego uderzenia nim w nieodkształcalną płytę. Materiał pręta modelowano liniowym wzmocnieniem charakteryzowanym modułem E_w .
- 2) Osiowe odkształcenie osiąga maksymalną wartość w przekroju kontaktującym z płytą i dla materiału z liniowym wzmocnieniem jest wprost proporcjonalne do prędkości uderzenia, tj.

$$\varepsilon_{x_{\max}}(t) = \varepsilon_x(0) = U / \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}. \quad (6.1)$$

- 3) Z wyprowadzonych wzorów bezpośrednio wynika, że strefa odkształcenia plastycznego ma ograniczoną długość i niezależnie od wartości prędkości uderzenia nie obejmuje całego pręta. W przecie po zakończeniu procesu zderzenia pozostaje zawsze odcinek nieodkształcony o skończonej długości, która wynosi:

$$x_{sk} = L \exp\left(-\frac{\sqrt{\rho E_w} U}{\sigma_s}\right). \quad (6.2)$$

- 4) Dla materiału z liniowym wzmocnieniem suma bezwzględnych prędkości propagacji fali plastycznej $a(t)$ i prędkości przemieszczania się sztywnego odcinka pręta $u(t)$ jest stała i wynosi:

$$a(t) + u(t) = c = \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}. \quad (6.3)$$

- 5) Pręt wykonany z wysokowytrzymałej stali po zderzeniu z płytą grzybkuje i osiąga przekrój na kontakcie z płytą o średnicy:

$$D_{p_{\max}}(t) = D_p(0) = D \left(1 - \frac{U}{c}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

Przy dużych prędkościach uderzenia pręt (pocisk) ulega fragmentacji.

- 6) Radialna prędkość poboczniccy części pręta odkształcanego plastycznie rośnie w miarę oddalania się od płyty w kierunku propagacji fali plastycznej i maksymalną wartość osiąga na jej froncie; wynosi ona:

$$v_{\max}(t) = v(t_k) = v(0) \exp\left(\frac{E_w U}{\sigma_s c}\right), \quad (6.5)$$

$$v_{\min}(t) = v(0) = v \frac{\sigma_s D}{E_w L} \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}.$$

v_{\min} występuje w czołowym przekroju pręta ($x = 0$) i zależy tylko od jego wymiarów (L, D) oraz materiału, z którego jest wykonany (v, ρ, σ_s, E_w).

- 7) Za pomocą prostego wzoru:

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\rho E_w}}{\ln(L / x_{sk})} U$$

można oszacować wartość dynamicznej granicy plastyczności dla danego materiału pręta (ρ, E_w) przez pomiar końcowej długości sztywnej (nieodkształconej) części pręta po teście Taylora (x_{sk}) z prędkością uderzenia (U).

- 8) Stosowany w niniejszej pracy sztywno-plastyczny model pozwala również uzyskać zamknięte rozwiązanie rozpatrywanego problemu dla wzmocnienia nieliniowego. Zagadnieniem tym zajmiemy się w kolejnym opracowaniu.

Artykuł wpłynął do redakcji 7.11.2011 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lutym 2012 r.

LITERATURA

- [1] G.I. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, I. Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc., Series a, London, 194, 1948, 289.
- [2] A.C. WHIFFIN, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials*, Proc. Roy. Soc., Series a, London, 194, 1948, 300.
- [3] G.I. BARENBLATT, A.I. ISHLINSKII, *On the impact of a viscoplastic bar on rigid wall*, Prikl. Math. Mekh., 26, 1962, 497.
- [4] J.D. CINNAMON, S.S. JONES, J.C. FOSTER, JR, P.P. GILLIS, *An analysis of early time deformation rate and stress in the Taylor impact test. Mechanical Behavior of Materials, VI. Proc. Of the Sixth Int. Materials Conf.*, eds. M. Jano and T. Inouc, Kyoto, Japan, 1, July 1991, 337.
- [5] N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [6] J.C. FOSTER, JR., P.J. MAUDLIN, S.E. JONES, *On the Taylor test, Part I: A continuum analysis of plastic wave propagation*, Proc of the 1995 APS Topical Conf.: An Shock Compression of Condensed Matter, Seattle, Washington, August 1995, 291.
- [7] J.B. HAWKYARD, D. EASOTON, W. JOHNSON, *The mean dynamic yield strength of cooper and low carbon steel at elevated temperatures from measurements of the "mushrooms" of flat-ended projectiles*, Int. J. Mech. Sci., 10, 1968, 929.
- [8] J.B. HAWKYARD, *A theory for the mushrooming of flat-ended projectiles impinging on a flat rigid anvil, using energy considerations*, Int. J. Mech. Sci., 11, 1963, 313.

- [9] I.M. HUTCHINGS, *Estimation of yield stress in polymers at high strain-rates using G. I. Taylors impact technique*, J. Mech. Phys. Solids, 26, 1979, 289.
- [10] G.R. JOHNSON, T.J. HOLMQUIST, *Evaluation of cylinder — impact test data for constitutive model constants*, J. Appl. Phys., 64, 1988, 3901.
- [11] S.E. JONES, P.P. GILLIS, J.C. FOSTER, JR, L.X. WILSON, *A one-dimensional two-phase flow model for Taylor impact specimens*, J. Engr. Mat'ls. Tech., ASME, 113, 1991, 228.
- [12] S.E. JONES, P.P. GILLIS, J.C. FOSTER, JR, *On the equation of motion of the undeformed section of a Taylor impact specimen*, J. Appl. Phys., 61, 1987, 499.
- [13] S.E. JONES, P.J. MAUDLIN, P.P. GILLIS, J.C. FOSTER, JR, *An analytical interpretation of high strain rate materials behavior during early time plastic deformation in the Taylor impact test*, Computers In Engineering, ed. G.A. Gabriele, 2, ASME, New York, 1992, 173.
- [14] E.H. LEE, S.J. TUPPER, *Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 21, 1954, 63.
- [15] P.J. MAUDLIN, J.C. FOSTER, JR, S.E. JONES, *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Impact Engng, 19, 1997, 95.
- [16] P.J. MAUDLIN, J.C. FOSTER, JR, S.E. JONES, *On the Taylor test, Part III: A continuum mechanics code analysis of plastic wave propagation*, Los Alamos National Laboratory report LA-12836-MS, November 1994.
- [17] P.J. MAUDLIN, R.F. DAVIDSON, R.J. HENNINGER, *Implementation and assesment of the mechanical-threshold-stress model using the EPIC2 and PINON computer codes*, Los Alamos National Laboratory report LA-11895-MS, September 1990.
- [18] M.A. MEYERS, *Dynamic behavior of materials*, John Wiley an Sons, INC, New York–Chester–Brisbane–Toronto–Singapoure, 1994.
- [19] T.C.T. TING, *Impact of a nonlinear viscoplastic rod on a rigid wall*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 33, 1966, 505.
- [20] L.L. WILSON, J.W. HOUSE, M.E. NIXON, *Time resolved deformation from the cylinder impact test AFATL-TR-89-76*, November 1989.
- [21] E. WŁODARCZYK et al., *Estimation of dynamic yield stress of shell steels by means of the Taylor impact test* (in Polish), Bull. Acad., 1, 56, 2007, 113.
- [22] S.E. JONES et al., *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Engng, 19, 2, 1997, 95-105.
- [23] KH.A. RAKHMATULIN, YU.A. DEM'YANOW, *Strength under intense short-tern loadings* (in Russian), Gostizdat, Moskva, 1961.
- [24] S. KALISKI, Cz. RYMARZ, K. SOBczyk, E. WŁODARCZYK, *Waves*, PWN, Warsaw, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo, 1992.
- [25] P.G. SHEWMON (ed.), V.F. ZACKAY, *Response of metals to high velocity deformation*, Interscience Publishers, New York–London, 1961.
- [26] M.F. ASHBY, D.R.H. JONES, *Engineering materials*, t. 1. *An introduction to their properties and applications*, Cambridge University, England, 1980 (przekład na język polski: *Materiały Inżynierskie*, t. 1. *Właściwości i zastosowania*, WNT, Warszawa, 1995).
- [27] W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa, 1965.
- [28] E. WŁODARCZYK, *Balistyka końcowa pocisków amunicji strzeleckiej*, t. 1, WAT, Warszawa, 2006.

E. WŁODARCZYK, A. JACKOWSKI, K. SARZYŃSKA, M. SARZYŃSKI

Analysis of a side surface radial velocity of a plastic-rigid cylindrical rod during perpendicular striking a rigid plate

Abstract. The closed formulae in the form of elementary analytic functions, which uniquely determined the dynamics of the plastic-rigid rod striking a rigid plate, have been derived. The material of the rod has been modelled to linear strain hardening. The formulae are rightful for large strains of the rod. The theoretical results of the paper are conformable to experimental data.

Keywords: plastic-rigid rod dynamics, large strains, impact load-Taylor's test