



Wektorowy wariant metody różnicowej w dynamice sztywno-lepkoplastycznych membran kołowych

WŁODZIMIERZ IDCZAK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Zaproponowano numeryczny model dynamiki membrany kołowej utwierdzonej na obwodzie w zakresie ugięć trwałych o wartości porównywalnej z jej grubością, aż do jej zniszczenia. Opisano sformułowania problemu, stosowane przy mniejszych ugięciach oraz przytoczono tzw. wstępny model numeryczny obejmujący analityczne sformułowanie membranowe z jednym stopniem swobody i ciągłym rozkładem masy oraz skalarny wariant różnicowej metody przegania. Przedyskutowano przykładowe wyniki obliczeń według tego modelu, wskazując na jego pewne niedogodności. W konsekwencji zaproponowano bardziej złożony model numeryczny obejmujący analityczne sformułowanie problemu w ujęciu z dwoma stopniami swobody i ciągłym rozkładem masy oraz wektorowym wariantem różnicowej metody przegania.

Słowa kluczowe: mechanika ciała stałego — dynamika membran sztywno-lepkoplastycznych

1. Wstęp

Badanie deformacji konstrukcji poddanych obciążeniom dynamicznym o dużej intensywności obejmują szereg szczegółowych problemów, wśród których możemy wyróżnić:

- modelowanie obciążeń oraz ich realizację w badaniach eksperymentalnych,
- formułowanie związków konstytutywnych oraz ich odpowiednie stosowanie,
- modelowanie procesów deformacji,
- opracowywanie modeli deformowanych konstrukcji,

- opracowywanie metod rozwiązań zagadnień granicznych formułowanych w ramach analizowanych problemów,
- opracowywanie metod badań eksperymentalnych,
- zastosowania.

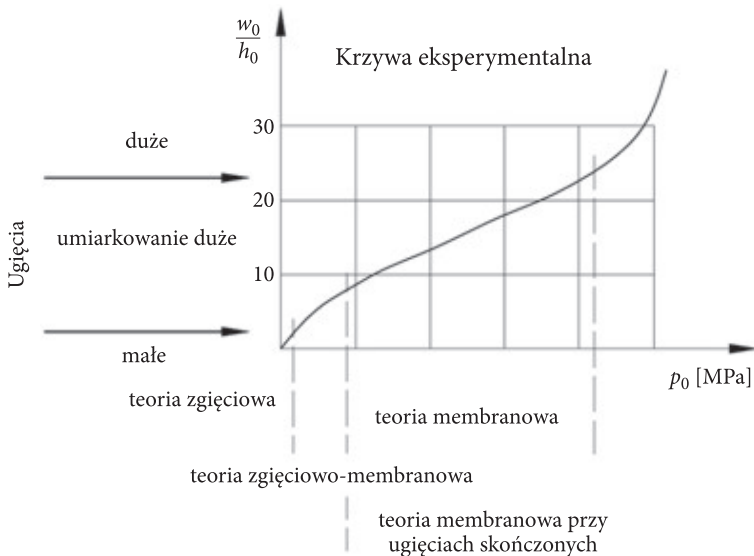
Dotychczasowe badania teoretyczne oraz ograniczone badania eksperymentalne deformacji niesprężystej membrany kołowej obciążonej falą ciśnienia o zadanych parametrach obejmowały w różnym stopniu powyższe zagadnienia.

Przytaczane na potrzeby niniejszej pracy założenia cząstkowe dotyczące związków materiałowych, formułowania procesu deformacji, funkcji obciążenia oraz metod rozwiązywania formułowanych zagadnień zostały szeroko omówione w przytoczonej literaturze.

2. Przegląd stosowanych sformułowań

Przedmiotem badań jest kołowa membrana o grubości początkowej h_0 i promieniu R , zamocowana na obwodzie, dla której $100 \leq (2R/h_0) \leq 300$. W wyniku obciążenia dowolnym impulsem ciśnienia membrana podlega trwałym deformacjom, przy czym przemieszczenie środkowego punktu membrany w_0 może znaleźć się w zakresie $\sim h_0 \leq (w_0/h_0) \leq$ zniszczenie (rys. 1).

Przedstawiona zostanie koncepcja rozwiązania problemu dla ugięć skończonych na tle istniejących rozwiązań, które obejmują przedziały trwałych ugięć małych i umiarkowanie dużych.



Rys. 1. Stosowane opisy procesu deformacji membrany w zależności od zakresu jej trwałych ugięć

Tak więc, w zależności od zakresu przemieszczenia punktu środkowego membrany, a więc od zasadniczych zjawisk zachodzących w deformowanej membranie, opisywano jej proces deformacji następującymi zestawami sformułowań:

- płytowym dla ugięć małych rzędu $(w_0/h_0) \leq 1$,
- płytowo-membranowym dla ugięć umiarkowanie dużych rzędu $1 \leq (w_0/h_0) \leq 10$,
- membranowym dla ugięć umiarkowanie dużych rzędu $7 \leq (w_0/h_0) \leq 30$,
- membranowym dla ugięć skończonych rzędu $4 \leq (w_0/h_0) \leq$ zniszczenie.

Rozwiązania płytowe przedstawiono w pracach [1, 2]. Przybliżone rozwiązania membranowe, ale dla zakresu umiarkowanie dużych ugięć z uwzględnieniem oddziaływań lepko-plastycznych materiału membrany przedstawiono w pracy [3]. Sformułowanie płytowo-membranowe dla deformacji umiarkowanie dużych wraz z weryfikacją eksperymentalną wyników obliczeń przedstawiono w [4]. W pracy [5] przedstawiono sformułowanie problemu dotyczące zagadnienia ugięć dużych, podając wstępne i zarazem bardzo ogólne, bo dotyczące tylko wyników obliczeń, ugięcia centralnego punktu deformowanej membrany.

W pracach [6, 7] przedstawiono metody uproszczonego rozwiązania zagadnienia dużych ugięć cienkich sztywno-lepko-plastycznych płyt kołowych (membran) obciążonych idealnym impulsem początkowym, przyjmując różne warianty związków konstytutywnych. Po raz pierwszy przedstawiono analizę wpływu parametrów fali uderzeniowej, wygenerowanej w trakcie detonacji niekontaktowego ładunku materiału wybuchowego na proces przejmowania obciążenia przez membranę. Wykazano istotne znaczenie doboru parametrów ładunku z punktu widzenia optymalnego wykorzystania fali uderzeniowej, wykonującej pracę trwałych deformacji membrany lub pracę jej zniszczenia.

W pracy [8] dokonano porównania metod wstępnego modelowania numerycznego oraz metod przybliżonych typu inżynierskiego stosowanych w dynamice niesprężystych membran. Sformułowano ogólne grupy założeń przyjmowane w omawianych metodach, podano równania problemów oraz przedstawiono metody ich rozwiązania. Zamieszczono wyniki obliczeń charakteryzujące omawiane metody oraz podano obszary ich zastosowań.

W cytowanych artykułach stosowano teorię konstrukcji sztywno-plastycznych wykazujących wrażliwość na prędkość odkształcenia, idąc za wnioskami zamieszczonymi w pracy [9], w której porównując stosunek energii kinetycznej wprowadzonej do układu do maksymalnej energii sprężystej, jaka może być zmagazynowana w konstrukcji, wykazano, że w zakresie trwałych ugięć kilkakrotnie przewyższających początkową grubość deformowanej płyty, która przechodzi w stan membranowy, można stosować związki konstytutywne dla materiałów sztywno-lepkoplastycznych.

W kolejnych pracach główną uwagę skupiono na próbie modelowania numerycznego dynamiki niesprężystych membran kołowych przy ugięciach

umiarkowanie dużych. W sformułowaniu zagadnienia uwzględniono oddziaływanie membranowe, dopuszczając możliwość zmiany grubości membrany. Wyprowadzono nieliniowe różniczkowe równanie ruchu, które rozwiązano metodą różnic skończonych [10]. W ramach rozważanej teorii badano czasowo-przestrzenne zmiany funkcji ugięcia, odkształcenia i grubości membrany. Przedyskutowano wpływ osłabienia membrany związane z zmniejszeniem jej grubości, wzmocnienia materiałowego oraz postaci warunku początkowego na proces ruchu membrany. Wykazano konieczność uwzględnienia również wzmocnienia geometrycznego. Omawiane numeryczne modelowanie dynamiki niesprężystych membran kołowych obciążonych falą ciśnienia o dużej intensywności nazwano wstępnym, ponieważ obarczone jest ono pewnymi założeniami upraszczającymi. I tak, w fazie formułowania równań ruchu deformowanej membrany pominięto oddziaływanie wzdłużne, ograniczając się jedynie do spełnienia warunków równowagi sił poprzecznych. Założono ponadto, że siły membranowe nie są funkcją współrzędnej przestrzennej promieniowej r . Tego typu założenia pozwalają śledzić proces deformacji membrany z pominięciem wzmocnienia geometrycznego. Dzięki temu możliwe było ustosunkowanie się do pozostałych efektów, które w procesach dynamicznych odgrywają istotną rolę. Są to: osłabienie membrany związane ze zmniejszaniem się jej grubości, wzmocnienie materiałowe charakteryzujące wrażliwość materiału membrany na prędkość deformacji oraz wpływ postaci warunku początkowego na proces ruchu.

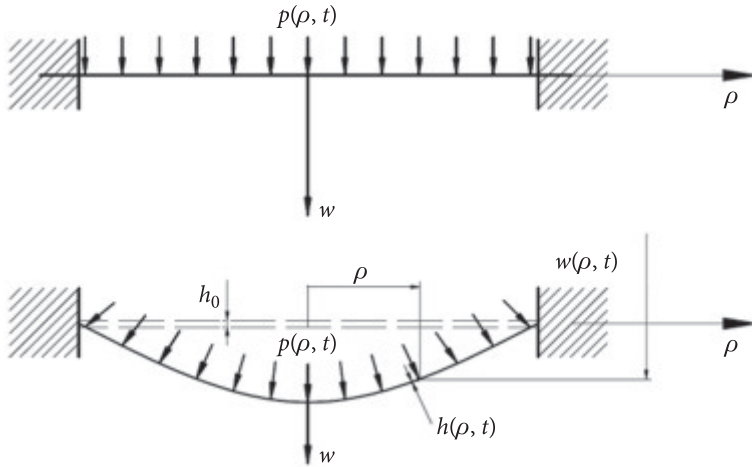
Przedstawiony model zawiera: analityczne sformułowanie jednowymiarowe z ciągłym rozkładem masy rozważanego zagadnienia, metodę rozwiązania, algorytm rozwiązania oraz program w języku Fortran.

3. Modelowanie numeryczne

Prezentowane poniżej sformułowanie modelu numerycznego dynamiki trwałych deformacji membrany, dla ugięć $4 \leq (w_0/h_0) \leq$ zniszczenie, zostanie przedstawione na tle tzw. modelu wstępnego, w którym wykorzystano uproszczone sformułowanie problemu jednowymiarowego z ciągłym rozkładem masy [10] oraz skalarny wariant różnicowej metody przeganiania.

3.1. Sformułowanie jednowymiarowe z ciągłym rozkładem masy — wstępne modelowanie numeryczne

Analizowaną membranę w ujęciu jednowymiarowym z ciągłym rozkładem masy, o gęstości μ , przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Geometria deformowanej membrany w opisie jednowymiarowym z ciągłym rozkładem masy

Równania problemu [10] obejmują:
równanie ruchu

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial \tau^2} = \alpha_1 \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial}{\partial \rho_b} \left(\rho_b h_b \sigma_{\rho_b} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} \right) + \alpha_2 p_{wb}, \quad (1)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_0 h_0 t_f^2}{\mu R^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R},$$

równanie konstytutywne potęgowego prawa płynięcia

$$\sigma_{\rho_b} = 1 + \left(\frac{1}{\dot{\varepsilon}_0} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \tau} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2)$$

gdzie: $n, \dot{\varepsilon}_0$ — stałe materiałowe,

związki odkształceniowo-przemieszczeniowe

$$\varepsilon_\rho = \frac{h_0^2}{2R^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} \right)^2, \quad \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \tau} = \alpha_3 \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \rho_b \partial \tau}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\alpha_3 = \frac{h_0^2}{R^2 t_f},$$

funkcję zmiany grubości membrany

$$h_b = \frac{1}{1 + \left(\frac{h_0}{R} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} \right)^2}, \quad (4)$$

obciążenie

$$p_{w_b} = p_b \left[1 + \frac{h_0^2}{R^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

warunki początkowe

$$w_b(\rho_b, \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_b(\rho_b, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \rho_b \leq 1 \quad \text{i} \quad \tau = 0, \quad (6)$$

warunki brzegowe dla membrany utwierdzonej na obwodzie

$$w_b(1, \tau) = r_b(0, \tau) = \frac{\partial w_b(0, \tau)}{\partial \rho_b} = 0, \quad r_b(1, \tau) = 1. \quad (7)$$

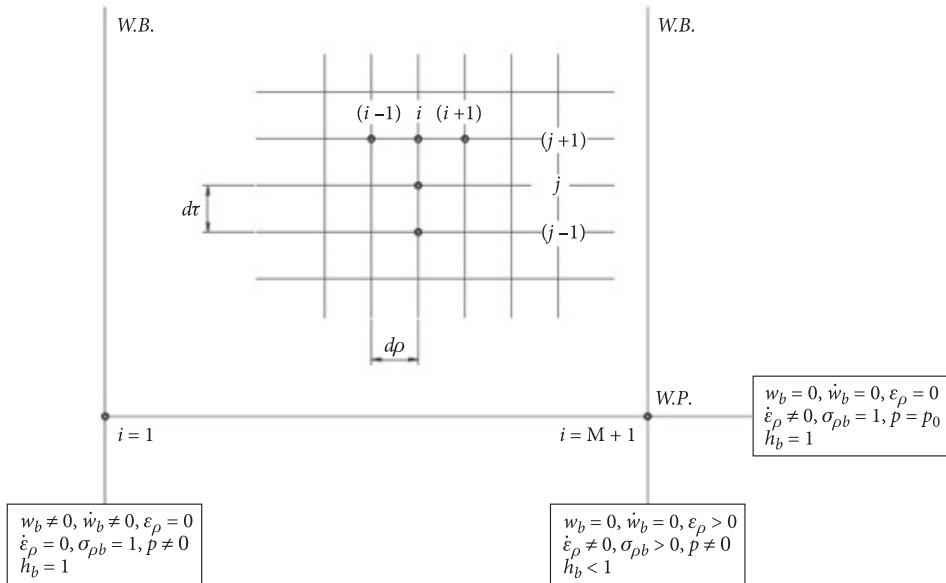
W przedstawionym układzie równań nieznanymi funkcjami, zależnymi od ρ_b, τ są: $w_b, \varepsilon_\rho, \sigma_{\rho_b}, h_b$. Indeks b oznacza wielkość bezwymiarową.

Równanie ruchu (1), pozwalające określić w każdej chwili położenie punktu zdefiniowanego na powierzchni środkowej membrany przed deformacją współrzędną ρ_b , jest quasi-liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym ze współczynnikami, których wartości wyznaczane z równań (2)-(4) zależą od rozwiązań równania ruchu. W celu rozwiązania powyższego zagadnienia zastosowano metodę różnic skończonych, w której:

- a) wykorzystano niejawną procedurę całkowania równania ruchu względem czasu,
- b) przyjęto metodę przeganiania z iteracjami, rozwiązując równania różnicowe na następczej warstwie czasowej.

Omawianą metodę rozwiązania opisano w [10] dla warunków granicznych przedstawionych na rysunku 3.

Ze względu na to, że uwzględniano tylko jedną składową wektora przemieszczenia punktów, zdefiniowanych na powierzchni środkowej membrany przed deformacją, metodę rozwiązania nazwano „skalarnym wariantem metody różnicowej”. Problem stabilności i zbieżności zastosowanej metody różnicowej przedstawiono w [11, 12]. W obu pracach badano liczbę iteracji zapewniającą uzyskanie wyników z daną dokładnością, jako funkcję kroku czasowego. Badano również liczbę cykli, w czasie których realizowany jest proces obliczeń deformowania membrany oraz względną dokładność obliczeń jako funkcję kroku czasowego. Szczegółowa analiza



Rys. 3. Warunki graniczne w opisie jednowymiarowym z ciągłym rozkładem masy

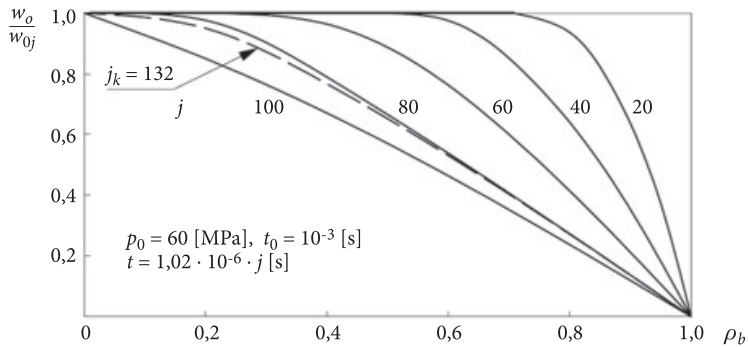
wykazała, że dobór optymalnej wartości kroku czasowego jest ściśle związany z dokładnością rozwiązania i efektywnością procesu obliczeń. Wykazano, że dla kroków całkowania po czasie bliskich zeru z powodzeniem można stosować metody zlinearyzowane zamiast metod iteracyjnych.

Kontynuację powyższych badań opublikowano w kolejnych pracach [13, 14], w których poszukiwano optymalnych skalarnych schematów różnicowych, aproksymujących nieliniowe równania deformacji dynamicznie obciążonej sztywno-lepkoplastycznej membrany kołowej. Opracowano ogólny schemat różnicowy, który w zależności od wartości zdefiniowanych współczynników wagowych opisuje badany problem w sposób jawny, całkowicie niejawny i uśredniony względem czasu. Przedstawiono zależności między czasem trwania obliczeń a globalnym błędem wyników.

Zaprezentowane analizy dotyczyły jednego wariantu różnicowej aproksymacji różniczkowego równania dynamiki niesprężystej membrany obciążonej falą ciśnienia przy uwzględnieniu jednej składowej wektora przemieszczenia punktów usytuowanych na powierzchni środkowej membrany przed deformacją.

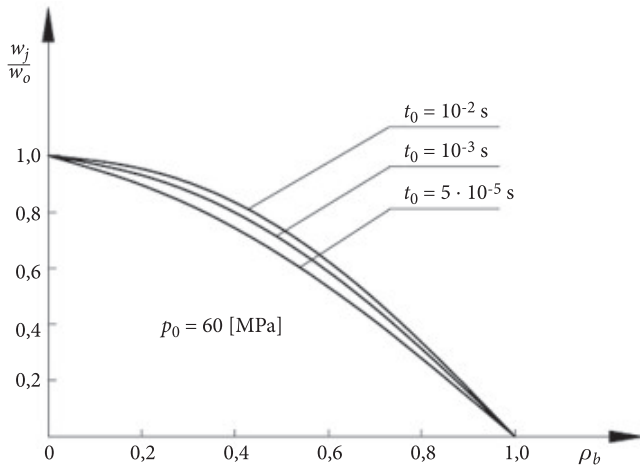
Skalarny wariant metody różnicowej, zastosowany do sformułowania jednowymiarowego z ciągłym rozkładem masy, stanowi dość dobry model deformowanej membrany. Przykładowe wyniki analiz numerycznych przedstawiono na rysunkach (4, 5, 6, 7, 8). Szeroką gamę pozostałych wykresów analiz numerycznych podano w pracy [10].

Na rysunku 4 przedstawiono znormalizowany profil membrany w kolejnych chwilach w trakcie procesu deformacji. Deformacja rozpoczyna się od strefy zamocowania, propaguje się w kierunku centrum, natomiast proces wyhamowywania ruchu rozpoczyna się od punktu centralnego i kończy się na zamocowaniu.



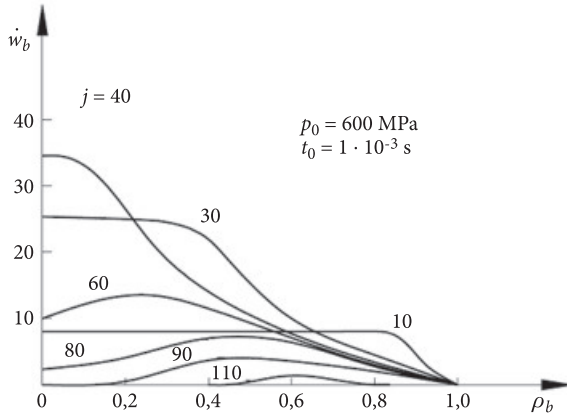
Rys. 4. Zmiany w czasie znormalizowanego profilu deformowanej membrany

Na rysunku 5 przedstawiono znormalizowane profile zdeformowanej membrany określone dla jednakowej amplitudy obciążenia przy różnych czasach trwania tego obciążenia. Zdeformowany profil membrany zależy od czasu współdziałania membrany z obciążeniem. Ten fakt będzie szczegółowo zbadany w modelu, który zostanie przedstawiony w dalszej części pracy.



Rys. 5. Znormalizowane profile zdeformowanej membrany dla jednakowej amplitudy obciążenia przy różnych czasach jej trwania

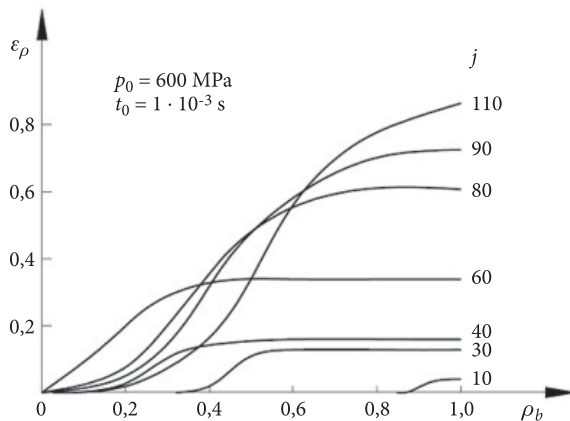
Na rysunku 6 przedstawiono znormalizowaną prędkość znormalizowanego profilu deformowanej membrany w kolejnych chwilach procesu deformacji. Podobnie jak na rysunku 4, również i tutaj widzimy proces deformacji, który zarówno rozpoczyna się, jak i kończy na zamocowaniu. Wykres dotyczy obciążenia o przykładowych parametrach (p_0, t_0).



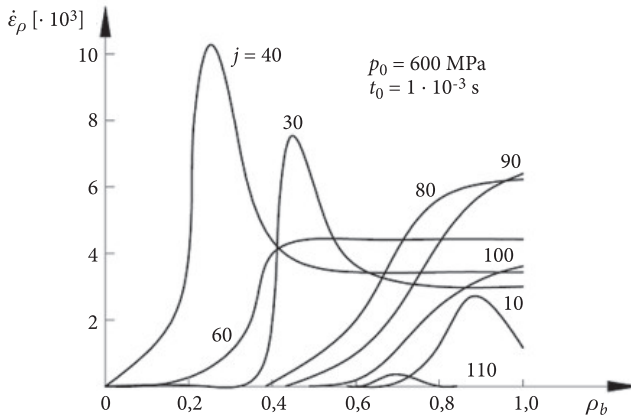
Rys. 6. Prędkości znormalizowanego profilu deformowanej membrany w kolejnych chwilach procesu deformacji

Podobny charakter zjawiska można zaobserwować na rysunkach 7 i 8, na których przedstawiono odpowiednio odkształcenie i prędkość odkształcenia określane na znormalizowanym profilu membrany.

Ze względu na przyjęte założenia w sformułowaniu problemu jednowymiarowego z ciągłym rozkładem masy, w którym pominięto składową promieniową przemieszczenia, uzyskano zdeformowany obraz procesu deformacji w strefie



Rys. 7. Odkształcenia określane na znormalizowanym profilu deformowanej membrany

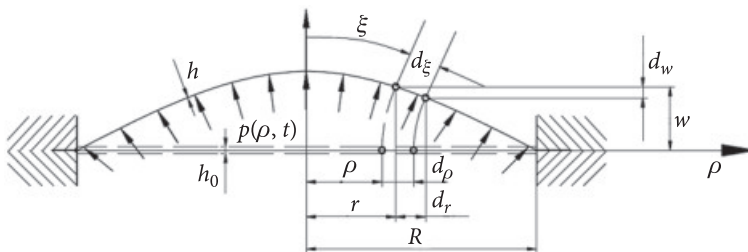


Rys. 8. Prędkości odkształceń określone na znormalizowanym profilu deformowanej membrany

punktu centralnego membrany. Wydaje się, że ten mankament będzie wyeliminowany w modelu, który zostanie zaprezentowany poniżej.

3.2. Sformułowanie membranowe — wektorowy wariant metody różnicowej

W dokładniejszym opisie zjawiska dynamicznie deformowanej membrany w zakresie ugięć skończonych [15] można uwzględnić dwie składowe wektora przemieszczenia punktów położonych na powierzchni środkowej membrany przed deformacją. Parametryzację tej powierzchni przed deformacją i w jej trakcie przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 9. Geometria deformowanej membrany w opisie wektorowym z ciągłym rozkładem masy

Proces deformacji membrany zdefiniowany w układzie współrzędnych krzywoliniowych (ξ, ϑ, θ) , w którym ξ przedstawia długość łuku południkowego środkowej powierzchni M od osi symetrii do danego punktu, ϑ określa współrzędną kątową punktu mierzoną w płaszczyźnie równoleżnika, zaś θ jest długością w kierunku

normalnym \mathbf{A}_3 z punktu określonego na M , opisany jest układem równań, w którym wyróżniamy: równania ruchu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_b}{\partial \tau^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \rho_b^2} + c_{11} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} + c_{12} \frac{\partial r_b}{\partial \rho_b} + e_1 p_b, \\ \frac{\partial^2 r_b}{\partial \tau^2} &= a_{22} \frac{\partial^2 r_b}{\partial \rho_b^2} + c_{21} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b} + c_{22} \frac{\partial r_b}{\partial \rho_b} + e_2 p_b,\end{aligned}\tag{8}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \frac{\sigma_1}{\lambda_1^2}, \quad a_{22} = \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \frac{\sigma_1}{\lambda_1^2}, \quad c_{11} = \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \frac{1}{\lambda_1^2} \left(\frac{\sigma_1}{h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \rho_b} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho_b} \right), \\ c_{12} &= \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \frac{\sigma_1}{\lambda_1^2 r_b} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b}, \quad c_{21} = -\frac{h_0^2 \sigma_0 t_f^2}{\mu R^4} \frac{\sigma_2}{\lambda_1^2 r_b} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b}, \\ c_{22} &= \frac{\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \frac{1}{\lambda_1^2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \rho_b} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho_b} \right) + \frac{1}{r_b} \frac{\partial r_b}{\partial \rho_b} (\sigma_1 - \sigma_2) \right], \\ e_1 &= \frac{\sigma_0 t_f^2}{h_0 \mu R} \frac{1}{\lambda_1 h_b} \frac{\partial r_b}{\partial \rho_b}, \quad e_2 = -\frac{h_0 \sigma_0 t_f^2}{\mu R^3} \frac{1}{\lambda_1 h_b} \frac{\partial w_b}{\partial \rho_b},\end{aligned}\tag{9}$$

równania konstytutywne

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (3A)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} \right) \left[1 + \left(\dot{\varepsilon}_0 t_f \right)^{-\frac{1}{n}} A^{\frac{1}{2n}} \right], \\ \sigma_2 &= (3A)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \right) \left[1 + \left(\dot{\varepsilon}_0 t_f \right)^{-\frac{1}{n}} A^{\frac{1}{2n}} \right],\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie:

$$A = \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} \right)^2,$$

definicje współczynników wydłużeń

$$\lambda_1 = \frac{\partial \xi_b}{\partial \rho_b}, \quad \lambda_2 = \frac{r_b}{\rho_b}, \quad \lambda_3 = h_b,\tag{11}$$

tożsamość geometryczną

$$\left(\frac{h_0}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial w_b}{\partial \rho_b}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_b}{\partial \rho_b}\right)^2 = \lambda_1 \quad (12)$$

oraz warunek nieściśliwości

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (13)$$

Chcąc uzyskać równania powyższe w zapisie wymiarowym, należy skorzystać z następujących zależności:

$$\begin{aligned} w &= w_b h_0, & \rho &= \rho_b R, & h &= h_b h_0, & r &= r_b R, & \xi &= \xi_b R, \\ p &= p_b \frac{h_0 \sigma_0}{R}, & \sigma_{11} &= \sigma_1 \sigma_0, & \sigma_{22} &= \sigma_2 \sigma_0, & t &= \tau t_f. \end{aligned} \quad (14)$$

W przytoczonym układzie równań zastosowano następujące oznaczenia:

w, w_b, r, r_b — współrzędne punktu określane w trakcie procesu deformacji membrany (rys. 9);

$\sigma_{11}, \sigma_1, \sigma_{22}, \sigma_2$ — składowe naprężeń głównych;

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — współczynniki wydłużeń nitek materialnych w kierunkach (ξ, ϑ, θ) ;

ξ, ξ_b — odległość punktu określonego na membranie od osi membrany mierzona wzdłuż południka (rys. 9);

h, h_b — grubość membrany określana w trakcie procesu deformacji,

h_0 — grubość membrany przed deformacją;

R — promień membrany;

μ — gęstość materiału membrany;

σ_0 — granica plastyczności materiału membrany na rozciąganie,

ε_0, n — stałe materiałowe;

p, p_b — ciśnienie zewnętrzne;

ρ, ρ_b — współrzędna promieniowa punktu określająca jego położenie przed deformacją;

t, τ — czas;

t_f — szacunkowy czas trwania ruchu membrany określony w pracy [19].

Ciśnienie zewnętrzne obciążające membranę opisano zależnością

$$p(\rho, t) = \left\{ \begin{array}{ll} p_0 \frac{t}{t_n} & \text{dla } 0 \leq t < t_0 \\ p_0 \left(1 - \frac{t-t_n}{t_0-t_n} \right)^\delta & \text{dla } t_n \leq t < t_0 \\ 0 & \text{dla } t \geq t_0 \end{array} \right\}, \quad (15)$$

w której poszczególne symbole oznaczają:

- p_0 — amplitudę ciśnienia;
- t_n — czas narastania ciśnienia;
- t_0 — czas trwania ciśnienia;
- δ — wykładnik liczbowy określony zależnością podaną w pracy [16].

$$\delta = 1,9\sqrt{10p_0}. \quad (16)$$

Wartość p_0 podstawiamy do wzoru (16) w MPa.

W przedstawionych równaniach problemu nieznanymi funkcjami zależnymi od ρ_b, τ są: $\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_b, h_b, w_b$.

Równania ruchu (8) ze współczynnikami (9) oraz zależnościami (10)-(13) możemy rozwiązać dla dowolnego obciążenia $p(\rho, t)$ (15), zakładając zerowe warunki początkowe dla przedziału $0 \leq \rho_b \leq 1$

$$w_b(\rho_b, \tau) = \frac{\partial w_b(\rho_b, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial r_b(\rho_b, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{i} \quad r_b(\rho_b, \tau) = \rho_b \quad \text{dla } \tau = 0 \quad (17)$$

i warunki brzegowe jak dla membrany utwierdzonej na obwodzie

$$w_b(1, \tau) = r_b(0, \tau) = \frac{\partial w_b(0, \tau)}{\partial \rho_b} = 0, \quad r_b(1, \tau) = 1. \quad (18)$$

Pozostałe zmienne występujące w równaniach problemu przyjmują w chwili początkowej i dla całego zakresu zmiennej promieniowej $0 \leq \rho_b \leq 1$ następujące wartości:

$$\lambda_1(\rho_b, 0) = \lambda_2(\rho_b, 0) = \lambda_3(\rho_b, 0) = 1, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} = 0 \quad \text{dla } \tau = 0, \quad (19)$$

$$\sigma_1(\rho_b, 0) = \sigma_2(\rho_b, 0) = 1.$$

Ponadto, ze względu na symetrię membrany, na jej osi zachodzą równości:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{dla} \quad \rho_b = 0. \quad (20)$$

Dodatkowo, w miejscu utwierdzenia

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{dla} \quad \rho_b = 1. \quad (21)$$

Zakłada się, że rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia z zastosowaniem wektorowego wariantu metody różnicowej pozwoli wyeliminować niektóre, przedstawione w 3.1, niedoskonałości wstępnego modelu deformowania membrany [10], w którym zastosowano skalarny wariant metody różnicowej.

Przedstawiony będzie zarys niepublikowanej metody rozwiązania zagadnienia deformacji membrany w zakresie ugięć skończonych, w którym równania ruchu (8) są cząstkowymi równaniami różniczkowymi ze zmiennymi współczynnikami. Zależności (9), z których współczynniki te wyznaczamy, wskazują, że mamy do czynienia z quasiliniowymi równaniami ruchu.

Rozwiązanie równań ruchu (8) pozwoli wyznaczyć w każdej chwili położenie cząstek materialnych, które przed deformacją zajmowały położenia określone współrzędną $(\rho_b, 0)$, zaś w trakcie deformacji współrzędnymi $w_b(\rho_b, \tau)$ i $r_b(\rho_b, \tau)$. Kompleksowe rozwiązanie problemu wymaga również wyznaczenia w każdej chwili pozostałych parametrów związanych z poruszającą się cząstką materialną. Są to wydłużenia nitek materialnych w kierunkach głównych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz położenia aktualne cząstek na południku ξ_b . Określenie tych parametrów wymaga spełnienia równań (10)-(13).

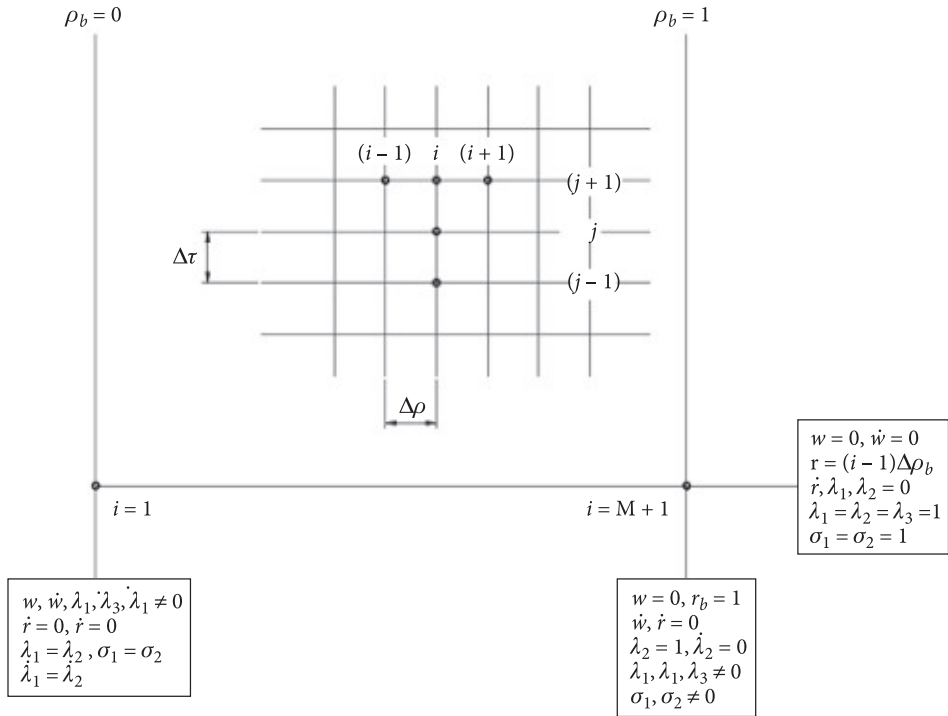
W celu rozwiązania omawianego zagadnienia granicznego proponuje się zastosowanie metody różnic skończonych [17, 18], w której:

- a) wykorzystuje się niejawną procedurę całkowania równań ruchu względem czasu,
- b) przyjmuje się metodę przegania z iteracjami, rozwiązując równania różnicowe na $(j + 1)$ warstwie czasowej.

Równania różniczkowe sprowadza się do równań różnicowych, aproksymując pochodne cząstkowe następującymi schematami różnicowymi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{R}^{j+1}}{\partial \rho_b^2} &= \frac{\mathbf{R}_{i+1}^{j+1} - 2\mathbf{R}_i^{j+1} + \mathbf{R}_{i-1}^{j+1}}{\Delta \rho_b^2}, & \frac{\partial \mathbf{R}^{j+1}}{\partial \rho_b} &= \frac{\mathbf{R}_{i+1}^{j+1} - \mathbf{R}_{i-1}^{j+1}}{2\Delta \rho_b}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_i}{\partial \tau^2} &= \frac{\mathbf{R}_i^{j+1} - 2\mathbf{R}_i^j + \mathbf{R}_i^{j-1}}{\Delta \tau^2}, & \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \tau} &= \frac{\mathbf{R}_i^{j+1} - \mathbf{R}_i^{j-1}}{2\Delta \tau}, \end{aligned} \quad (22)$$

w których wskaźnik górny oznacza współrzędną czasową, zaś wskaźnik dolny współrzędną przestrzenną określoną na siatce czasowo-przestrzennej (rys. 10).



Rys. 10. Warunki graniczne w opisie wektorowym z ciągłym rozkładem masy

Wektor \mathbf{R} , określający położenie cząstki materialnej w dowolnym czasie ma składowe

$$\mathbf{R}(\rho_b, \tau) = \begin{pmatrix} w_b(\rho_b, \tau) \\ r_b(\rho_b, \tau) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Zapisując równania ruchu (8) w postaci wektorowej

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \tau^2} = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \rho_b^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_b} + \mathbf{E} p, \quad (24)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

oraz wykorzystując zależności (22), otrzymujemy następujące macierzowe równania różnicowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^s \mathbf{R}_i^{s+1} - \mathbf{G}_i^s \mathbf{R}_2^{s+1} &= \mathbf{F}_i^j, \quad i = 1, \\ -\mathbf{H}_i^s \mathbf{R}_{i-1}^{s+1} + \mathbf{D}_i^s \mathbf{R}_i^{s+1} - \mathbf{G}_i^s \mathbf{R}_{i+1}^{s+1} &= \mathbf{F}_i^j, \quad i = 2, 3, \dots, M, \\ -\mathbf{H}_{M+1}^s \mathbf{R}_M^{s+1} + \mathbf{D}_{M+1}^s \mathbf{R}_{M+1}^{s+1} &= \mathbf{F}_{M+1}^j, \quad i = M + 1 \end{aligned} \quad (26)$$

nazywane wektorowym wariantem metody przeganiaania o algorytmie

$$\mathbf{R}_i^{j+1} = \mathbf{Y}_i + \mathbf{Z}_i \mathbf{R}_{i+1}^{j+1}, \quad i = M, M-1, \dots, 1, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

w którym macierze \mathbf{Z}_i oraz wektory \mathbf{Y}_i wyznaczamy rekursywnie z zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= \mathbf{S}_i \mathbf{G}_i, \\ \mathbf{Y}_i &= \mathbf{S}_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{Y}_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, M, \\ \mathbf{S}_i &= (\mathbf{D}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{Z}_{i-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

natomiast \mathbf{Y}_i i \mathbf{Z}_i z warunków brzegowych

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{Y}_M = \mathbf{R}_{M+1}, \quad (29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i &= \mathbf{I} + 2 \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \rho_b} \right)^2 \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{G}_i = \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \rho_b} \right)^2 \mathbf{A}_i + \frac{\Delta \tau^2}{2 \Delta \rho_b} \mathbf{C}_i, \\ \mathbf{H}_i &= \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \rho_b} \right)^2 \mathbf{A}_i + \frac{\Delta \tau^2}{2 \Delta \rho_b} \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{F}_i = 2 \mathbf{R}_i^j - \mathbf{R}_i^{j-1} + \Delta \tau^2 \mathbf{E}_i p_{bi}^{j+1}. \end{aligned} \quad (30)$$

W równaniach (30) oznaczono:

\mathbf{I} — macierz jednostkową,

s — numer iteracji na $j + 1$ warstwie czasowej siatki czasowo-przestrzennej,

$\Delta \tau, \Delta \rho_b$ — parametry siatki różnicowej.

W procesie obliczeń wymagana będzie znajomość rozwiązań na dwóch poprzednich warstwach czasowych, dlatego też wykorzystując warunki początkowe oraz równanie różnicowe (27), dla $j = 0$ wyznaczyć można rozwiązanie na warstwie $j = 1$.

$$\mathbf{R}_i^1 = \mathbf{Y}_i + \mathbf{Z}_i \mathbf{R}_{i+1}^1. \quad (31)$$

Macierze \mathbf{Z}_i oraz wektory \mathbf{Y}_i określamy na podstawie równań (28), natomiast wykorzystując warunki początkowe zadania, wyznaczamy wartości współczynników macierzy \mathbf{G}_i , \mathbf{H}_i z równań (30), zaś macierzy \mathbf{D}_i i wektorów \mathbf{F}_i z równań (32).

$$\mathbf{D}_i = 2 \left[\mathbf{I} + \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\rho_b} \right)^2 \mathbf{A}_i \right], \quad \mathbf{F}_i = 2(\mathbf{f}_{1_i} + \Delta\tau\mathbf{f}_{2_i}) + \Delta\tau^2 \mathbf{E}_i p_{bi}^1, \quad (32)$$

gdzie:

$$\mathbf{f}_1(\rho_b) = \begin{vmatrix} w_b^0(\rho_b) \\ \rho_b \end{vmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\rho_b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_b^0(\rho_b)}{\partial \tau} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad w_b^0(\rho_b) = \frac{\partial w_b^0(\rho_b)}{\partial \tau} = 0, \quad (33)$$

$$\rho_b = (i-1)\Delta\rho_b, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Rozwiązując równania różnicowe (27) i (31) metodą przegania, wykorzystuje się warunki brzegowe w ogólnej postaci:

$$\mathbf{R}_1^j = \begin{vmatrix} w_{b_1}^j \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R}_{M+1}^j = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (34)$$

Składową przemieszczenia $w_{b_1}^j$ punktu środkowego membrany wyznacza się spełniając równania różnicowe na jej osi, otrzymując zależności dla pierwszej warstwy czasowej

$$w_{b_1}^1 = \left(\frac{c}{2+c} \right) w_{b_2}^1 + \left(\frac{2}{2+c} \right) w_{b_1}^0 + \left(\frac{2}{2+c} \right) \left(\frac{\partial w_{b_1}^0}{\partial \tau} \right) \Delta\tau + \left(\frac{c}{2+c} \right) \frac{R\Delta\rho_b^2}{8h_0} p_b^1 \quad (35)$$

oraz dla kolejnych warstw czasowych

$$w_{b_1}^{j+1} = \left(\frac{c}{1+c} \right) w_{b_2}^{j+1} + \left(\frac{2}{1+c} \right) w_{b_1}^j - \left(\frac{1}{1+c} \right) w_{b_1}^{j-1} + \left(\frac{c}{1+c} \right) \frac{R\Delta\rho_b^2}{8h_0} p_b^{j+1}, \quad (36)$$

gdzie:

$$c = \frac{4\sigma_0 t_f^2}{\mu R^2} \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\rho_b} \right)^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Wartości współczynników wydłużeń $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, grubości h_b oraz naprężeń σ_1 i σ_2 w punktach $i = 1, 2, 3, \dots, M$ wyznacza się schematami różnicowymi (22). Wykorzystuje się przy tym warunki graniczne pokazane na rysunku 10.

4. Wnioski

Wstępny model numeryczny rozważanego problemu trwałych ugięć membrany sztywno-lepkoplastycznej w zakresie od wartości porównywalnej z jej grubością aż do zniszczenia, obejmujący sformułowanie analityczne w ujęciu z jednym stopniem swobody z ciągłym rozkładem masy oraz skalarny wariant różnicowej metody przegania, jak przedstawiono na przykładowych wynikach obliczeń (rys. 4-8), odzwierciedlał proces deformacji membrany w sposób niezadowolający. Zjawiska zachodzące głównie w okolicy punktu położonego na osi membrany nie były zobrazowane.

W celu usunięcia niedoskonałości modelu wstępnego zaproponowano model obejmujący sformułowanie problemu o dwóch stopniach swobody z ciągłym rozkładem masy i wektorowy wariant różnicowej metody przegania. Model ten, opisany zespołem równań (8)-(21), powinien zapewnić wierne śledzenie trwałych deformacji membrany w zakresie ugięć skończonych.

Artykuł wpłynął do redakcji 29.04.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2010 r.

LITERATURA

- [1] W. IDCZAK, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczna płyta kołowa obciążona impulsem ciśnienia*, Biul. WAT, 27, 12, 1978.
- [2] W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Studies on shock-wave loaded, circular plates*, J. Tec. Phys., 22, 2, 175-184, 1981.
- [3] W. IDCZAK, T. WIERZBICKI, *Dynamic loading of a viscoplastic membrane*, J. Appl. Mech., 7-8, 1981.
- [4] W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczne płyty kołowe pod intensywnym obciążeniem dynamicznym. Analiza teoretyczno-doświadczalna i propozycje zastosowań*, Mech. Teor. i Stos., 4, 24, 1986.
- [5] W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Large deflection of a rigid-viscoplastic impulsively loaded circular plates*, J. Tech. Phys., 21, 4, 1980, 473-487.
- [6] W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran, część I*, Rozpr. Inż., 33, 4, 1985, 519-535.
- [7] W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran, część I*, Rozpr. Inż., 34, 3, 1986, 275-302.
- [8] W. IDCZAK, *Metody obliczeniowe stosowane w dynamice niesprężystych membran kołowych*, Biul. WAT, 35, 12, 1986.
- [9] T. WIERZBICKI, *Obliczanie konstrukcji obciążonych dynamicznie*, Arkady, Warszawa, 1980.
- [10] W. IDCZAK, *Wstępne modelowanie numeryczne dynamiki niesprężystych membran kołowych*, Rozpr. Inż., 35, 3, 1987, 423-445.
- [11] W. IDCZAK, I. WINNICKI, *Zbieżność numerycznej nieliniowej metody iteracyjnej stosowanej w dynamice niesprężystych membran*, Biul. WAT, 35, 5, 1986.
- [12] W. IDCZAK, I. WINNICKI, *Stabilność i zbieżność metody numerycznej stosowanej w dynamice niesprężystych membran*, Rozpr. Inż., 35, 3, 1987, 405-422.

- [13] W. IDCZAK, I. WINNICKI, E. WŁODARCZYK, *Schematy różnicowe w nieliniowych jednowymiarowych problemach dynamiki membran*, Biul. WAT, 38, 12, 1989.
- [14] W. IDCZAK, I. WINNICKI, E. WŁODARCZYK, *Difference schemes in nonlinear one-dimensional problems of membrane dynamics*, J. Tech. Phys., 31, 1, 1990, 61-68.
- [15] W. IDCZAK, *Dynamika niesprężystych membran kołowych*, WAT, wew. 1804/88.
- [16] F. STANJUKOWICZ, *Fizika wżrywa*, Izd. Nauka, Moskwa, 1975.
- [17] W. P. ILIN, *Priamoj analiz ustoičnosti metoda progonki*, [w:] *Aktualnyje problemy wycisliennej matematiki i matematyczieskowo modielirowanija*, Nowosybirsk, Nauka, 1985.
- [18] G. I. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1983,
- [19] G. BĄK, W. IDCZAK, A. SPYCHAŁA, *Sztywno lepko-plastyczna membrana kołowa obciążona impulsem ciśnienia*, Biul. WAT, 18, 8, 1976.

W. IDCZAK

Vector variant of difference method in dynamics of rigid-viscoplastic circular membranes

Abstract. A numerical model of the dynamics of a circular membrane, fixed at its periphery for deflections ranging from a value comparable with its thickness until its destruction is proposed. Problem formulations used in smaller deflections as well as the initial numerical model, comprising the analytical formulation with one degree of freedom and continuous weight displacement and a scalar variant of the numerical method of outstripping have been described. Sample calculation results, given by this model, were discussed, indicating some inconvenience of the model. Consequently, more complex numerical model, comprising analytical formulation with two degrees of freedom and continuous weight displacements and a vector variant of the numerical method of outstripping has been proposed.

Keywords: the mechanics of the solid — dynamics of rigid-viscoplastic membranes

