



O współczynniku dynamiczności obciążenia generującego ekspandującą kulistą falę naprężenia w ośrodku sprężystym

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ ZIELENKIEWICZ¹

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

¹Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

Streszczenie. W nieograniczonym, liniowo-sprężystym i ściśliwym ośrodku izotropowym znajduje się kulista kawerna. Jej ścianka obciążona jest ciśnieniem zmiennym w czasie, które generuje w ośrodku ekspandującą z kawerny kulistą falę naprężenia. Zbadano wpływ charakteru obciążenia na charakterystyki parametrów fali, przy czym za główne kryterium porównawcze przyjęto współczynnik dynamiczności obciążenia. Ze względu na kulistą dywergencję fali, jej parametry maleją odwrotnie proporcjonalnie do drugiej i trzeciej potęgi odległości od centrum kawerny, tak więc ich maksymalne bezwzględne wartości występują na ściance kawerny i dlatego też analizę przeprowadzono w tym miejscu. Znalaziono dwie praktyczne graniczne wartości czasu liniowego narastania ciśnienia do stałej wartości, wyznaczające trzy obszary charakteru takiego obciążenia. W pierwszym z nich, dla krótkich czasów, może być ono traktowane jako skokowe, dla którego współczynnik dynamiczny jest największy. W trzecim, dla czasów długich, obciążenie to można traktować jako quasi-statyczne, pomijając jego skutki dynamiczne. Natomiast w obszarze drugim ma ono charakter przejściowy i parametry fali nim wywołanej należałoby opisywać wzorami dokładnymi zaprezentowanymi w artykule. Wyznaczono również maksymalną długość czasu działania impulsu stałego ciśnienia, dla której parametry fali nie przekraczają jeszcze wartości statycznych. Zaobserwowano jednak znaczne zmniejszenie się promienia kawerny poniżej wartości początkowej na skutek odciążenia.

Słowa kluczowe: ekspandująca kulista fala naprężenia, izotropowy ośrodek sprężysty, współczynnik dynamiczności obciążenia

1. Wprowadzenie

W literaturze naukowo-technicznej dużo uwagi poświęcono problemom propagacji plastyczno-sprężystych zaburzeń, powstałych od sił przyłożonych na ścianie

kulistej kawerny. Obszerny przegląd takich badań, zastosowanych do ciągłych ośrodków metalowych, jest przedstawiony w pracy [1]. Problemy, które zostały zbadane i są prezentowane w literaturze [2-6], mogą być ogólnie sklasyfikowane pod dwoma nagłówkami: zagadnienia propagacji fal, w których materiał jest narażony tylko na małe odkształcenia, i problemy jednowymiarowych wybuchów, w których ciśnienia wytworzone w kawernie są dostatecznie wysokie, aby doprowadzić do dużych odkształceń sąsiadującego ośrodka.

W zakresie pierwszego problemu w pracach [7] i [8] przedstawiono w zamkniętej analitycznej postaci rozwiązanie problemu dynamicznej ekspansji kulistej fali naprężenia w liniowo-sprężystym ośrodku izotropowym. Falę wygenerowano przez stałe ciśnienie wytworzone w sposób nagły w kulistej kawernie. Dokonano obszernej jakościowej i ilościowej analizy zmiany dynamicznych parametrów mechanicznych w ośrodku otaczającym kawernę. Wykryto między innymi rezonansowe oddziaływanie liczby Poissona na parametry fali.

Ilościowym miernikiem dynamicznych parametrów propagujących się zaburzeń jest współczynnik dynamiczności obciążenia generującego falę naprężenia. Jak wiadomo [9], maksymalna jego wartość zależy od charakteru zmian obciążenia konstrukcji w funkcji czasu. W literaturze technicznej omawiany parametr nazywa się w skrócie współczynnikiem dynamicznym. Ma on kluczowe znaczenie przy projektowaniu konstrukcji narażonych na udarowe obciążenia. Mając na uwadze ten fakt, w niniejszej pracy podjęto próbę obszernej jakościowej i ilościowej analizy tego parametru dla ekspandującej kulistej fali naprężenia w liniowo-sprężystym ośrodku izotropowym.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy propagację sprężystej fali naprężenia w nieograniczonym ośrodku izotropowym w ramach liniowej teorii sprężystości [10]. Fala generowana jest przez ciśnienie $p(t)$ wytworzone w kulistej kawernie o początkowym promieniu a . Ze względu na kulistą symetrię rozwiązanie problemu będzie zależało tylko od dwóch zmiennych niezależnych, współrzędnej Lagrange'a r i czasu t .

Stany naprężenia i odkształcenia w ośrodku otaczającym kawernę reprezentowane są przez następujące składowe główne:

- σ_r — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ — naprężenie obwodowe (styczne),
- ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenie obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Zgodnie z liniową teorią sprężystości i uogólnionym prawem Hooke'a [10] mamy:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} \right], \quad (2.2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right], \quad (2.3)$$

gdzie u jest przemieszczeniem radialnym, a E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Dla nieskończenie małego elementu ośrodka liniowo-sprężystego równanie ruchu może być zapisane w postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

gdzie ρ_0 oznacza początkową gęstość materiału ośrodka. Eliminując naprężenia σ_r i σ_φ z równania (2.4) za pomocą wyrażeń (2.2) i (2.3), otrzymuje się:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

gdzie

$$c_e^2 = n^2 c_0^2, \quad n^2 = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}. \quad (2.6)$$

Wielkość c_e oznacza prędkość propagacji kulistej fali naprężenia w ośrodku liniowo-sprężystym.

Równanie (2.5) rozwiążemy dla następujących warunków brzegowych:

$$u(r, t) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad r = a + c_e t, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= -p(t), \quad p(t) \geq 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \\ \sigma_r(r, t) &\equiv 0 \quad \text{dla} \quad r = \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Rozwiązanie problemu

3.1. Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne równania (2.5) wraz ze spełnieniem warunków granicznych (2.7) i (2.8)₂ ma postać [5, 7]:

$$u(r, t) = \frac{\varphi'(r - a - c_e t)}{r} - \frac{\varphi(r - a - c_e t)}{r^2} \quad (3.1)$$

$$\varphi'(0) = \varphi(0) = 0, \quad (3.2)$$

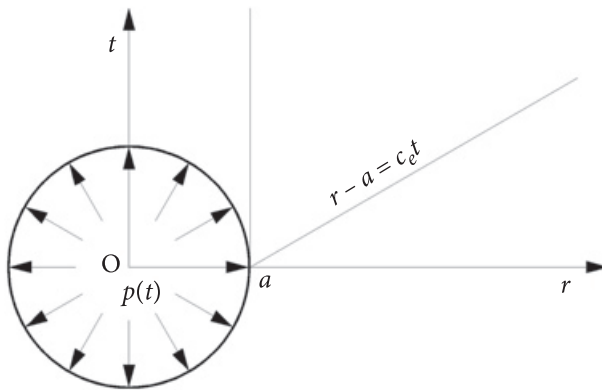
gdzie

$$r - a = c_e t \quad (3.3a)$$

jest trajektorią ruchu czoła fali naprężenia propagującej się od powierzchni pustki w głąb ośrodka (rys. 1). Symbol φ' oznacza pochodną funkcji φ względem jej argumentu.

Zmienne r i t występujące w rozwiązaniu (3.1) zawarte są w przedziałach:

$$a \leq r \leq \infty, \quad t \geq (r - a)/c_e. \quad (3.3b)$$



Rys. 1. Graficzny schemat rozpatrywanego zagadnienia początkowo-brzegowego

Po podstawieniu wyrażenia (3.1) do warunku brzegowego (2.8)₁ otrzymuje się następujące równanie różniczkowe, które musi spełniać funkcja $\varphi(x)$, a mianowicie:

$$\varphi''(x_0) - 2h\varphi'(x_0) + (2h/a)\varphi(x_0) = -\frac{a}{n^2 E} p\left(-\frac{x_0}{c_e}\right), \quad (3.4)$$

gdzie

$$h = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{a} \geq 0, \quad x_0 = -c_e t. \quad (3.5)$$

Rozwiązanie tego równania z jednorodnymi warunkami początkowymi (3.2) reprezentowane jest przez następujące wyrażenie:

$$\varphi(x_0) = -\frac{a}{n^2 \omega E} \int_0^{x_0} p \left(\frac{y-x_0}{c_e} \right) e^{h y} \sin \omega y \, dy, \quad (3.6)$$

gdzie

$$\omega = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{(1-\nu) a}.$$

Funkcja $\varphi(x_0)$ i jej pochodne jednoznacznie determinują wszystkie parametry ekspandującej kulistej fali naprężenia, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} u(r,t) &= \frac{\varphi'(r-a-c_e t)}{r} - \frac{\varphi(r-a-c_e t)}{r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\varphi''}{r} - 2\frac{\varphi'}{r^2} + 2\frac{\varphi}{r^3}, \\ \varepsilon_\phi &= \frac{\varphi'}{r^2} - \frac{\varphi}{r^3}, \\ \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\varphi''}{r} - 4\mu \frac{\varphi'}{r^2} + 4\mu \frac{\varphi}{r^3}, \\ \sigma_\phi &= \lambda \frac{\varphi''}{r} + 2\mu \frac{\varphi'}{r^2} - 2\mu \frac{\varphi}{r^3}, \\ \sigma_z &= |\sigma_\phi - \sigma_r| = \left| -2\mu \frac{\varphi''}{r} + 6\mu \frac{\varphi'}{r^2} - 6\mu \frac{\varphi}{r^3} \right|, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

oznaczają stałe Lamego, a symbole φ' i φ'' oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną funkcji φ względem jej argumentu. Wielkość σ_z jest intensywnością naprężenia. W literaturze technicznej nazywana jest również naprężeniem zastępczym.

3.2. Rozwiązanie statyczne

Jeśli wewnątrz kulistej kawerny wytworzone jest ciśnienie w sposób statyczny (narastające w teoretycznie nieskończonym czasie) o wartości p_0 , to przemieszczenie elementów ośrodka jest funkcją tylko zmiennej przestrzennej r i równanie (2.5) można zredukować do postaci:

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} - \frac{u_s}{r^2} \right) = 0, \quad (3.8)$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) &= (2\mu + \lambda) \frac{du_s}{dr} \Big|_{r=a} + 2\lambda \frac{u_s}{a} = -p_0, \quad p_0 > 0, \\ \sigma_r(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Całka ogólna równania (3.8) ma postać:

$$u_s(r) = Cr + \frac{D}{r^2}. \quad (3.10)$$

Z warunków (3.9) i rozwiązania (3.10) wynika, że:

$$C = 0, \quad D = \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} a^3.$$

Ostatecznie statyczne parametry problemu można określić wzorami:

$$u_s(r) = \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} a \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{r_s}(r) = -(1+\nu) \frac{p_0}{E} \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{\varphi_s}(r) = \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{r_s}(r) = -p_0 \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad (3.14)$$

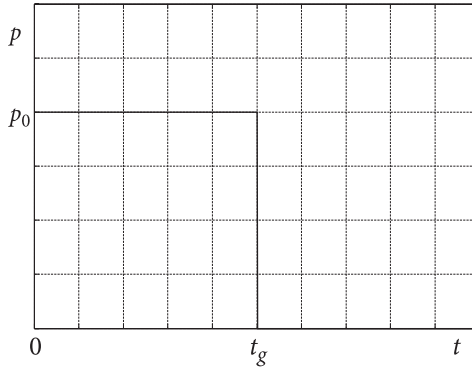
$$\sigma_{\varphi_s}(r) = \frac{p_0}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{z_s}(r) = |\sigma_{\varphi_s}(r) - \sigma_{r_s}(r)| = \frac{3}{2} p_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3. \quad (3.16)$$

3.3. Rozwiązanie dla impulsu stałego ciśnienia o skończonym czasie działania

Rozpatrzmy rozwiązanie problemu dla nagle przyłożonego stałego ciśnienia p_0 o skończonym czasie działania t_g (rys. 2), tj.:

$$\begin{aligned} p(t) &\equiv p_0 & \text{dla} & \quad 0 \leq t < t_g, \\ p(t) &\equiv 0 & \text{dla} & \quad t \geq t_g. \end{aligned} \quad (3.17)$$



Rys. 2. Schemat impulsu stałego ciśnienia o ograniczonym czasie działania

W pierwszym przedziale zmiany czasu (3.17)₁ rozwiązanie pokrywa się z wynikami uzyskanymi dla stałego ciśnienia p_0 przyłożonego nagle do ścianki kawerny i działającego w nieograniczonym czasie. Przypadek ten został szczegółowo opisany i przeanalizowany w pracach [7, 8]. Uzyskano następujące wyrażenia dla funkcji φ i jej pochodnych:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_d(x) &= -\frac{a}{n^2 \omega (h^2 + \omega^2)} \frac{p_0}{E} \left[\omega + e^{hx} (h \sin \omega x - \omega \cos \omega x) \right], \\ \varphi'_d(x) &= -\frac{a}{n^2 \omega} \frac{p_0}{E} e^{hx} \sin \omega x, \\ \varphi''_d(x) &= -\frac{a}{n^2} \frac{p_0}{E} e^{hx} \left(\frac{h}{\omega} \sin \omega x + \cos \omega x \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \left(\frac{r}{a} - 1 - n \frac{c_0 t}{a} \right), \quad h x = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{r}{a} - 1 - n \frac{c_0 t}{a} \right). \quad (3.19)$$

Parametry charakteryzujące to rozwiązanie identyfikujemy dolnym indeksem d , który imituje dynamiczne (udarowe) działanie ciśnienia na ściankę kawerny.

Dynamika badanego ośrodka opisana jest liniowym równaniem różniczkowym (2.5) wraz z liniowymi warunkami granicznymi. Dlatego rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia w drugim przedziale czasowym (3.17)₂ można otrzymać przez superpozycję powyższych wyników z rozwiązaniem uzyskanym dla identycznego ciśnienia z przeciwnym znakiem, przyłożonego nagle do powierzchni kawerny po upływie czasu t_g . Zatem dla uzyskania rozwiązania w przedziale $t \geq t_g$ wystarczy znajomość wyników (3.18) i (3.19).

3.4. Rozwiązanie dla ciśnienia quasi-statycznego

Najprostszym matematycznym modelem opisującym ciśnienie quasi-statyczne (osiągające stałą wartość w skończonym czasie) jest funkcja liniowo narastająca w okresie t_g do wartości p_0 (rys. 3):

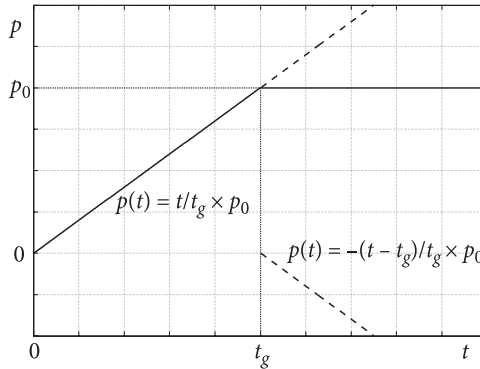
$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{t}{t_g} p_0 & \text{dla } 0 \leq t < t_g, \\ p(t) &\equiv p_0 & \text{dla } t \geq t_g. \end{aligned} \quad (3.20)$$

W pierwszej kolejności określono za pomocą rozwiązania (3.6) postaci: funkcji φ i jej pochodnych φ' oraz φ'' dla ciśnienia zmieniającego się z upływem czasu w sposób liniowy (3.20)₁. Mają one następujące kształty:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l(x) &= \frac{1}{n^3 \omega (h^2 + \omega^2)^2} \frac{p_0}{E} \frac{a}{c_0 t_g} \left\{ 2h\omega + \omega x (h^2 + \omega^2) + \right. \\ &\quad \left. + e^{hx} \left[(h^2 - \omega^2) \sin \omega x - 2h\omega \cos \omega x \right] \right\}, \\ \varphi'_l(x) &= \frac{1}{n^3 \omega (h^2 + \omega^2)} \frac{p_0}{E} \frac{a}{c_0 t_g} \left[\omega + e^{hx} (h \sin \omega x - \omega \cos \omega x) \right], \\ \varphi''_l(x) &= \frac{1}{n^3 \omega} \frac{p_0}{E} \frac{a}{c_0 t_g} e^{hx} \sin \omega x. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Parametry uzyskane dla takiego obciążenia wyróżniamy dolnym indeksem l .

Podobnie jak w przypadku skończonego impulsu stałego ciśnienia, rozwiązanie dla przedziału zmiany czasu (3.20)₂ otrzymuje się za pomocą superpozycji wyników (3.21) z rozwiązaniem uzyskanym dla identycznej zmiany ciśnienia z przeciwnym znakiem i przyłożonym do ścianki kawerny po upływie czasu t_g (rys. 3).



Rys. 3. Schematyczna zmiana w czasie ciśnienia quasi-statycznego

3.5. Wybrane parametry fali naprężenia

Aby uprościć ilościową analizę parametrów fali naprężenia, wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, & \eta &= \frac{c_0 t}{a}, & \eta_g &= \frac{c_0 t_g}{a}, & U &= \frac{u}{a}, & U_s &= \frac{u_s}{a}, & S_r &= \frac{\sigma_r}{p_0}, \\ S_{r_s} &= \frac{\sigma_{r_s}}{p_0}, & S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p_0}, & S_{\varphi_s} &= \frac{\sigma_{\varphi_s}}{p_0}, & S_z &= \frac{\sigma_z}{p_0}, & S_{z_s} &= \frac{\sigma_{z_s}}{p_0}, & P &= \frac{p_0}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Zgodnie z (3.3b) i (3.22) bezwymiarowe zmienne niezależne ξ i η zawarte są w następujących przedziałach:

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad \eta \geq \frac{\xi - 1}{n}. \quad (3.23)$$

Wykorzystując wyrażenia (3.7) i (3.18), parametry ekspandującej fali naprężenia wywołanej skończonym impulsem stałego ciśnienia w przedziale (3.17)₁ można zapisać w wielkościach bezwymiarowych w następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{1p}(\xi, \eta) = U_d(\xi, \eta) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^2} \left\{ 1 - [A_1(\xi) \sin \omega x + \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{r1p}(\xi, \eta) = S_{rd}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\xi^3} \left\{ 1 + [A_2(\xi) \sin \omega x + A_3(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{\varphi1p}(\xi, \eta) = S_{\varphi d}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\xi^3} \left\{ 1 - [A_4(\xi) \sin \omega x + A_5(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{z1p}(\xi, \eta) = S_{zd}(\xi, \eta) &= \left| \frac{3}{2\xi^3} \left\{ 1 + [A_6(\xi) \sin \omega x + A_7(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\} \right|,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} (\xi-1) - \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta, \quad hx = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\xi-1) - \sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta, \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_1(\xi) &= \sqrt{1-2\nu} (2\xi-1), & A_2(\xi) &= \sqrt{1-2\nu} (\xi-1)^2, & A_3(\xi) &= \xi^2-1, \\
 A_4(\xi) &= \sqrt{1-2\nu} \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 + 2\xi-1 \right), & A_5(\xi) &= \frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 + 1, \\
 A_6(\xi) &= \sqrt{1-2\nu} \left(\frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \xi^2 - 2\xi + 1 \right), & A_7(\xi) &= \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \xi^2 - 1.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Oznaczamy je dolnym indeksem p . Zmienne bezwymiarowe ξ i η zawarte są w przedziałach:

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad \frac{\xi-1}{n} \leq \eta < \frac{\xi-1}{n} + \eta_g. \quad (3.27)$$

Z omówionej wcześniej superpozycji rozwiązań wynika, że parametry fali naprężenia, wygenerowanej przez skończony impuls stałego ciśnienia dla $t \geq t_g$, można wyrazić następującymi funkcjami:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{2p}(\xi, \eta) &= U_d(\xi, \eta) - U_d[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= -\frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^2} \left\{ \left[A_1(\xi) + (S_g - A_1(\xi)C_g)E_g \right] \sin \omega x + \right. \\
 &\quad \left. + \left[1 - (A_1(\xi)S_g + C_g)E_g \right] \cos \omega x \right\} e^{hx}, \\
 S_{r2p}(\xi, \eta) &= S_{rd}(\xi, \eta) - S_{rd}[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= -\frac{1}{\xi^3} \left\{ \left[A_2(\xi) + (A_3(\xi)S_g - A_2(\xi)C_g)E_g \right] \sin \omega x + \right. \\
 &\quad \left. + \left[A_3(\xi) - (A_2(\xi)S_g + A_3(\xi)C_g)E_g \right] \cos \omega x \right\} e^{hx}, \\
 S_{\varphi 2p}(\xi, \eta) &= S_{\varphi d}(\xi, \eta) - S_{\varphi d}[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= -\frac{1}{2\xi^3} \left\{ \left[A_4(\xi) + (A_5(\xi)S_g - A_4(\xi)C_g)E_g \right] \sin \omega x + \right. \\
 &\quad \left. + \left[A_5(\xi) - (A_4(\xi)S_g + A_5(\xi)C_g)E_g \right] \cos \omega x \right\} e^{hx}, \\
 S_{z2p}(\xi, \eta) &= \left| S_{zd}(\xi, \eta) - S_{zd}[\xi, (\eta - \eta_g)] \right| = \\
 &= \left| \frac{3}{2\xi^3} \left\{ \left[A_6(\xi) + (A_7(\xi)S_g - A_6(\xi)C_g)E_g \right] \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[A_7(\xi) - (A_6(\xi)S_g + A_7(\xi)C_g)E_g \right] \cos \omega x \right\} e^{hx} \right|,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

gdzie

$$E_g = \exp\left(\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta_g\right), \quad S_g = \sin \frac{\eta_g}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad C_g = \cos \frac{\eta_g}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (3.29)$$

oraz

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad \eta \geq \frac{\xi-1}{n} + \eta_g. \quad (3.30)$$

W analogiczny sposób określa się parametry ekspandującej fali naprężenia wytworzonej w ośrodku liniowo-sprężystym przez ciśnienie quasi-statyczne, które dla czasu $0 \leq t < t_g$ (3.20)₁ można wyrazić za pomocą następujących funkcji:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{1q}(\xi, \eta) = U_l(\xi, \eta) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\eta_g \xi^2} \left\{ \eta + \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} [B_1(\xi) \sin \omega x - B_2(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{r1q}(\xi, \eta) = S_{rl}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\eta_g \xi^3} \left\{ \eta - \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} [B_3(\xi) \sin \omega x + B_2(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{\varphi 1q}(\xi, \eta) = S_{\varphi l}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\eta_g \xi^3} \left\{ \eta + \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} [B_4(\xi) \sin \omega x - B_2(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\}, \\
 S_{z1q}(\xi, \eta) = S_{zl}(\xi, \eta) &= \left| \frac{3}{2\eta_g \xi^3} \left\{ \eta - \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} [B_5(\xi) \sin \omega x + B_2(\xi) \cos \omega x] e^{hx} \right\} \right|,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned}
 B_1(\xi) &= (1-2\nu)\xi + \nu, & B_2(\xi) &= \sqrt{1-2\nu}(\xi-1), \\
 B_3(\xi) &= (\xi-1)((1-\nu)\xi + \nu), & B_4(\xi) &= 2\nu\xi^2 + (1-2\nu)\xi + \nu, \\
 B_5(\xi) &= \frac{2}{3}(1-2\nu)\xi^2 - (1-2\nu)\xi - \nu.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Oznaczamy je dolnym indeksem q . Natomiast dla czasu $t \geq t_g$ (3.20)₂ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 U_{2q}(\xi, \eta) &= U_l(\xi, \eta) - U_l[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_g} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \left[(B_1(\xi) - (B_2(\xi)S_g + B_1(\xi)C_g)E_g) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (B_2(\xi) + (B_1(\xi)S_g - B_2(\xi)C_g)E_g) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 S_{r2q}(\xi, \eta) &= S_{rl}(\xi, \eta) - S_{rl}[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= -\frac{1}{\xi^3} \left\{ 1 - \frac{1}{\eta_g} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \left[(B_3(\xi) + (B_2(\xi)S_g - B_3(\xi)C_g)E_g) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (B_2(\xi) - (B_3(\xi)S_g + B_2(\xi)C_g)E_g) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 S_{\varphi 2q}(\xi, \eta) &= S_{\varphi l}(\xi, \eta) - S_{\varphi l}[\xi, (\eta - \eta_g)] = \\
 &= \frac{1}{2\xi^3} \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_g} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \left[(B_4(\xi) - (B_2(\xi)S_g + B_4(\xi)C_g)E_g) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (B_2(\xi) + (B_4(\xi)S_g - B_2(\xi)C_g)E_g) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 S_{z2q}(\xi, \eta) &= \left| S_{zl}(\xi, \eta) - S_{zl}[\xi, (\eta - \eta_g)] \right| = \\
 &= \left| \frac{3}{2\xi^3} \left\{ 1 - \frac{1}{\eta_g} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \left[(B_5(\xi) + (B_2(\xi)S_g - B_5(\xi)C_g)E_g) \sin \omega x + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (B_2(\xi) - (B_5(\xi)S_g + B_2(\xi)C_g)E_g) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\} \right|.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

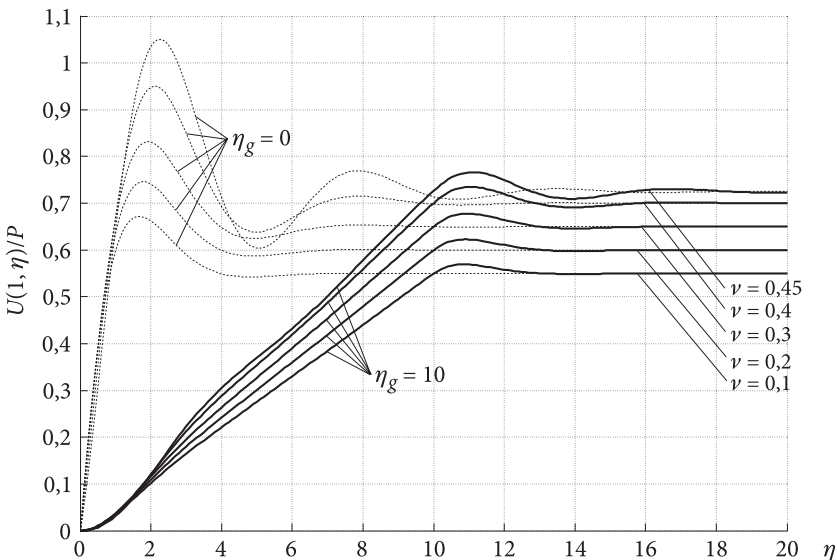
4. Analiza parametrów ekspandującej fali naprężenia

Jak wiadomo, ze względu na przestrzenną dywergencję parametrów fali, ich bezwzględne maksymalne wartości występują na ścianie kawerny i dlatego analizujemy je w tym miejscu. Ponadto, przy analizie zjawisk używa się względnych (bezwymiarowych) wartości parametrów fali. Dla skrócenia opisów pomijany jest wyraz „względny” i stosuje się nazwę parametru mianowanego.

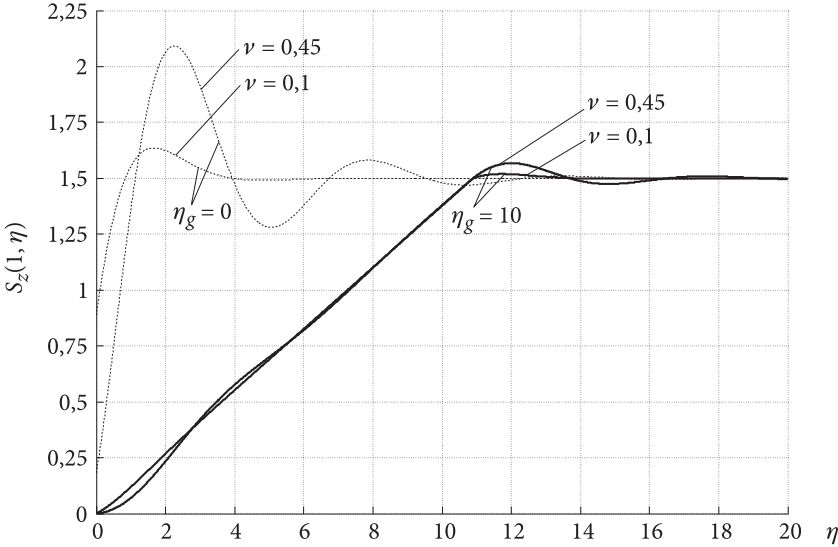
4.1. Analiza parametrów fali dla obciążenia quasi-statycznego

Na rysunku 4 przedstawiono zmianę przemieszczenia ścianki kawerny $U(1, \eta)/P$ w funkcji czasu η , spowodowaną ciśnieniem rosnącym liniowo do stałej wartości p_0 w okresie $\eta_g = 10$, przy różnych wartościach parametru ν . Na rysunku zamieszczono również, w charakterze tła porównawczego, wykresy wielkości $U(1, \eta)/P$ dla przypadku granicznego $\eta_g = 0$ (linie przerywane), tj. dla nagłego obciążenia powierzchni kawerny stałym ciśnieniem p_0 . Jak widać, prezentowane wykresy mają podobny charakter dla szerokiego zakresu zmian wartości liczby Poissona ν . W przedziale liniowego narastania ciśnienia przemieszczenie rośnie również w przybliżeniu liniowo. Po ustaniu narastania ciśnienia, na skutek działania siły inercyjnej ośrodka, wielkość $U(1, \eta)/P$ jeszcze przez krótką chwilę kontynuuje wzrost, przekraczając wartość statyczną $(1 + \nu)/2$ (3.11) i osiąga maksimum globalne, a następnie tłumionym ruchem oscylacyjnym dąży do wymienionej wartości statycznej. W podobny sposób zmienia się wielkość U/P dla przypadku granicznego, tj. dla $\eta_g = 0$, z tym że przy nagłym obciążeniu ścianki kawerny stałym ciśnieniem p_0 wpływ inercji ośrodka jest o wiele większy w porównaniu z obciążeniem quasi-statycznym.

Na rysunku 5 przedstawiono, w analogicznym układzie jak dla przemieszczenia, wykresy zmiany naprężenia zredukowanego S_z . Przebiegi wykresów są podobne, z tym że w odróżnieniu od przemieszczenia, wartość statyczna $S_{zs} = 1,5$



Rys. 4. Zmiana przemieszczenia (U/P) ścianki kawerny ($\xi = 1$) obciążonej ciśnieniem quasi-statycznym w funkcji η dla $\eta_g = 10$ oraz wybranych wartości ν



Rys. 5. Zmiana naprężenia zredukowanego S_z na ścianie kawerny ($\xi = 1$) obciążonej ciśnieniem quasi-statycznym w funkcji η dla $\eta_g = 10$ oraz wybranych wartości ν

(3.16) niezależnie od ściśliwości ośrodka (parametru ν). Ze względu na czytelność wykresów ograniczono liczbę wartości parametru ν do dwóch skrajnych.

Miarą wpływu inercji ośrodka na badane parametry fali jest współczynnik dynamiczności obciążenia Ψ definiowany jako stosunek maksymalnego przemieszczenia do jego wartości statycznej, tj.:

$$\Psi = \frac{U_{2q}(1, \eta_e)}{U_s(1)}, \quad (4.1)$$

gdzie η_e jest miejscem zerowym pochodnej funkcji przemieszczenia ścianki kawerny wyznaczającym jego wartość maksymalną. Wartość parametru η_e określa równanie:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_{2q}(1, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_e} &= \frac{1-\nu^2}{2} \frac{P}{\eta_g} \exp\left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta_e\right) \\ &\left\{ \left[\sqrt{1-2\nu} + (S_g - \sqrt{1-2\nu} C_g) E_g \right] \sin \frac{\eta_e}{\sqrt{1-\nu^2}} + \right. \\ &\left. - \left[1 - (\sqrt{1-2\nu} S_g - C_g) E_g \right] \cos \frac{\eta_e}{\sqrt{1-\nu^2}} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

z którego otrzymuje się:

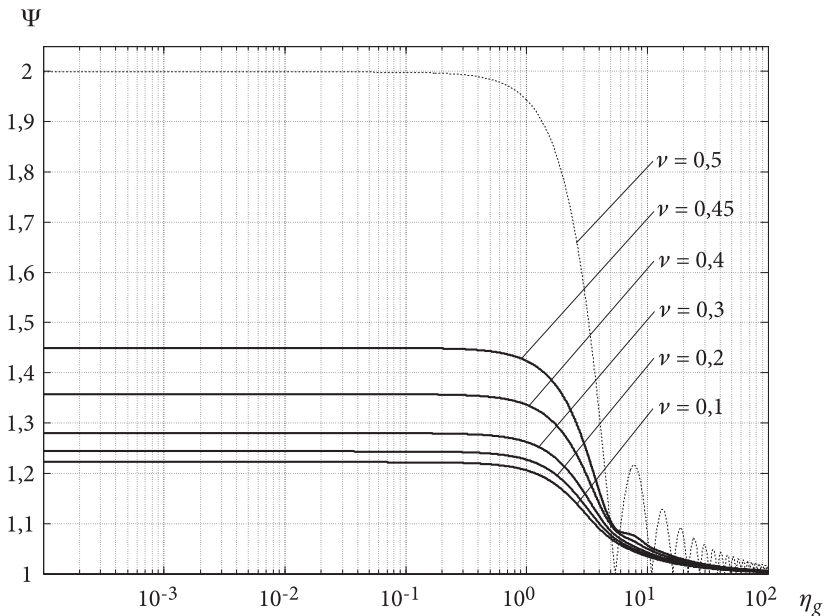
$$\eta_e = \sqrt{1-\nu^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-2\nu} + (S_g - \sqrt{1-2\nu}C_g)E_g}{1 - (\sqrt{1-2\nu}S_g - C_g)E_g} + k\pi \right),$$

$$\eta_g < \eta_e < \eta_g + \frac{\pi}{\sqrt{1-\nu^2}}. \quad (4.3)$$

Statyczne przemieszczenie ścianki kawerny, zgodnie z (3.11), wynosi:

$$U_s(1) = \frac{1+\nu}{2} P. \quad (4.4)$$

Wzory (4.1), (4.3), (4.4) oraz (3.33) pozwalają na jakościowy i ilościowy opis wpływu czasu narastania obciążenia η_g na współczynnik dynamiczny Ψ . Wyniki przedstawiono na rysunku 6 w postaci wykresów wykonanych dla wybranych wartości liczby Poissona ν . Aby ułatwić analizę wyników dla różnych rzędów wielkości czasu narastania, do opisu osi η_g użyto skali logarytmicznej.



Rys. 6. Zmiana współczynnika dynamiczności obciążenia Ψ na ściance kawerny ($\xi = 1$) obciążonej ciśnieniem quasi-statycznym w funkcji η_g dla wybranych wartości ν

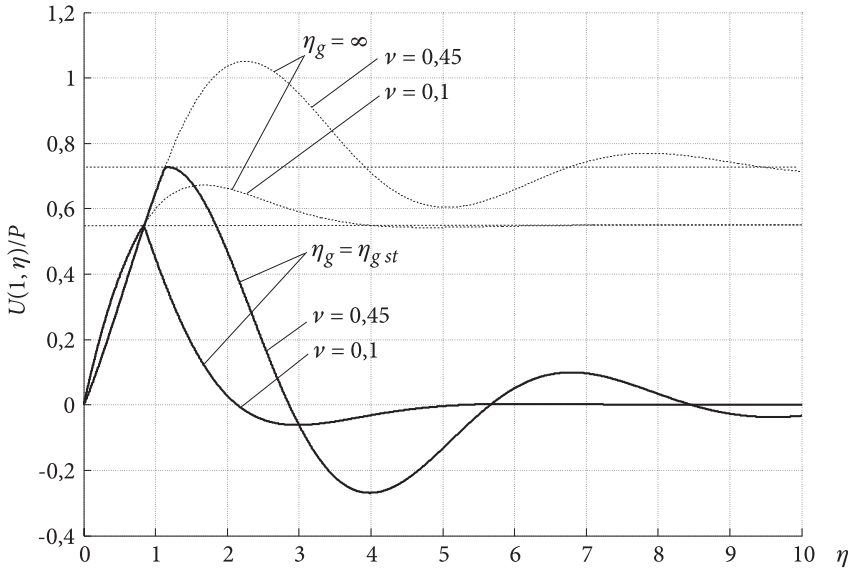
Jak widać na wykresie, w miarę wzrostu parametru ν , czyli zmniejszania się ściśliwości ośrodka, wpływ inercji na przebieg przemieszczenia rośnie. Jest to związane z faktem, że dla wyższych wartości liczby Poissona, pomimo wzrostu prędkości czoła kulistej fali naprężenia, tempo przekazywania energii zaburzenia do dalszych sferycznych warstw ośrodka jest wolniejsze, czyli energia ta rozłożona jest na większym obszarze za czołem fali [8]. Jednakże różnice te dla badanego zakresu parametru ν nie przekraczają 20%.

Można też zaobserwować, że niezależnie od wartości parametru ν , dla η_g mniejszych od ok. 1 zmiany współczynnika dynamicznego w stosunku do wartości dla obciążenia udarowego są nieznaczne, natomiast właśnie w tym obszarze różnice pomiędzy wynikami dla badanych wartości liczby Poissona są największe. Powyżej wartości 1 zarówno współczynnik dynamiczny, jak i różnice zaczynają intensywnie maleć. W bliskim sąsiedztwie $\eta_g = 10$ wartość współczynnika maleje poniżej 1,05 i następnie monotonicznie dąży do 1. Współczynnik dynamiczny $\Psi = 1,05$ oznacza, że maksymalna wartość przemieszczenia przekroczyła o 5% jego wartość statyczną, co już można uznać za różnicę zaniedbywalnie małą. Dlatego też wartość czasu narastania ciśnienia $\eta_g = 10$ przyjęto jako umowną granicę, powyżej której obciążenie można nazwać quasi-statycznym.

Dla porównania przeprowadzono obliczenia również dla skrajnego przypadku (linia przerywana). W ośrodku takim zanika falowy charakter propagacji jego parametrów, ponieważ staje się on nieściśliwy i zachowuje się jak układ mechaniczny o jednym stopniu swobody [7, 8, 11]. Po obciążeniu przyłożonym nagle stałym ciśnieniem o nieograniczonym czasie działania wszystkie przekroje sferyczne ośrodka oscylują ruchem nietłumionym w jednej fazie wokół wartości statycznej z amplitudą równą tej wartości. Z tego powodu, jak można oczekiwać, $\Psi = 2$ dla $\eta_g \rightarrow 0$ na wykresie. Odpowiedź takiego ośrodka na obciążenie quasi-statyczne również jest charakterystyczna dla układu mechanicznego o jednym stopniu swobody. Jednakże, ponieważ oscylacje są nietłumione, parametry nie dążą asymptotycznie do wartości statycznych. Jedynie w szczególnym przypadku, kiedy czas narastania ciśnienia jest wielokrotnością okresu drgań własnych ośrodka, parametry ustalają się na poziomie statycznym od razu w momencie ustalenia ciśnienia, stąd wartości $\Psi = 1$ dla tych czasów i charakterystyczny kształt wykresu z nieciągłościami pochodnej w tych punktach. Pewien zarys tej tendencji można zaobserwować już na przebiegu przemieszczenia dla $\nu = 0,45$.

4.2. Analiza rozwiązania dla impulsu stałego ciśnienia o skończonym czasie działania

Na rysunku 7 przedstawiono wykresy przemieszczenia ścianki kawerny obciążonej nagle stałym ciśnieniem o ograniczonym czasie działania dla dwóch skrajnych analizowanych wartości liczby Poissona ν . Czasy trwania impulsów tak



Rys. 7. Zmiana przemieszczenia (U/P) ścianki kawerny ($\xi = 1$) obciążonej ciśnieniem impulsowym o ograniczonym czasie działania w funkcji η dla $\eta_g = \eta_{gst}$ oraz wybranych wartości ν

dobrano, aby maksymalna wartość przemieszczenia nie przekroczyła wartości statycznych zaznaczonych na wykresie poziomymi liniami przerywanymi. Liniami przerywanymi przedstawiono również przebiegi przemieszczenia dla impulsu nieograniczonego w czasie.

Wartości czasu trwania impulsów można wyznaczyć, mając funkcję opisującą przebieg przemieszczenia ścianki kawerny dla nieograniczonego impulsu:

$$U(1, \eta) = \frac{1+\nu}{2} P \left\{ 1 + \left[\sqrt{1-2\nu} \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-\nu^2}}\right) - \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-2\nu}}\right) \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta\right) \right\}, \quad (4.5)$$

wartość przemieszczenia statycznego (4.4) i rozwiązując równanie:

$$U(1, \eta_{gst}) = U_s(1). \quad (4.6)$$

Stąd mamy poszukiwaną wartość czasu trwania impulsu

$$\eta_{gst} = \sqrt{1-\nu^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-2\nu}}. \quad (4.7)$$

Jak widać na wykresie oraz ze wzorów (3.24) i (3.28), po przyłożeniu nagle stałego ciśnienia o nieograniczonym czasie działania ($\eta_g \rightarrow \infty$) przemieszczenie dąży

5. Wnioski

Z powyższej analizy można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Dla kulistej kawerny w nieograniczonym, liniowo-sprężystym, ściśliwym ośrodku izotropowym obciążonej narastającym liniowo w ograniczonym czasie do stałej wartości wewnętrznym ciśnieniem istnieje wyraźna granica czasu narastania obciążenia, powyżej której można je traktować jako quasi-statyczne, pomijając czynnik dynamiczny. Za orientacyjną wartość graniczną można przyjąć $\eta_g = 10$. Z kolei dla czasów narastania ciśnienia $\eta_g < 1$ przypadek taki można w uproszczeniu rozpatrywać jako obciążenie udarowe. Natomiast dla czasów z przedziału $1 < \eta_g < 10$ wskazane byłoby zastosowanie wzorów dokładnych, zaprezentowanych w artykule.
2. Dla ośrodka stalowego o parametrach $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800$ kg/m³ z kulistą kawerną o promieniu a [m] rzeczywisty czas graniczny narastania ciśnienia przy $\eta_g = 10$ wyniesie $t_g = 0,002a$ [s], czyli rośnie wprost proporcjonalnie do promienia. Dla kawerny o promieniu 1 m będzie to $t_g = 2$ ms. Jest to czas wystarczająco krótki, aby uznać za quasi-statyczne obciążenie typu wytworzonego przez detonację gazowej mieszaniny wybuchowej, natomiast nie można tego założenia stosować dla wysokoenergetycznych materiałów wybuchowych.
3. Obciążenie kawerny stałym ciśnieniem impulsowym o dostatecznie krótkim czasie trwania nie powoduje wprawdzie przekroczenia przez przemieszczenie wartości statycznej, jednak jego dynamiczny charakter wywołuje po odciążeniu ujemne przemieszczenia ścianki kawerny dochodzące do 30% tej wartości. Sytuacja ta może być w pewnych przypadkach niedopuszczalna.

Artykuł wpłynął do redakcji 21.05.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w listopadzie 2010 r.

LITERATURA

- [1] H. G. HOPKINS, *Dynamic expansion of spherical cavities in metals* [in:] Progress in Solid Mechanics, Sneddon J. N., Hill R. (edit), 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- [2] P. CHADWICK, *Propagation of spherical plastic-elastic disturbances from an expanded cavity*, Journ. Mech. and Applied Math., 25, pt. 3, 1962.
- [3] H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [4] N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- [5] J. D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–Oxford, 1975.
- [6] S. KALISKI et al., *Waves*, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo, 1992.
- [7] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of an expanding spherical stress wave*, Shock Waves, 18, 6, 2009.

- [8] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Analysis of the parameters of a spherical stress wave expanding in linear isotropic elastic medium*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47, 4, 2009.
- [9] S. KALISKI et al., *Vibrations*, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo, 1992.
- [10] W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.

E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ

**Dynamic coefficient of load generating an expanding spherical stress wave
in elastic medium**

Abstract. In an unbounded, linearly-elastic, compressible and isotropic medium there is a spherical cavity. Its wall is loaded by the time-dependent pressure which generates, in the medium, a spherical stress wave expanding from the cavity. The influence of the load character on the wave parameters was studied and the dynamic coefficient of load was regarded as the main compared parameter. Because of the spherical divergence of the wave, its parameters decrease in inverse proportion to the square and the cube of the distance from cavity center, so their maximum absolute values appear at the cavity wall and therefore the analysis was conducted there. For the pressure, linearly increasing to the constant value, two practical limiting values of increase in time were found, which determinate three ranges of the load character. In the first, for short times, the load can be considered as surge, for which the dynamic coefficient is the highest. In the third, for long times, the load can be considered as quasi-static, neglecting its dynamic effects. However, in the second range, the load has transitional character and the parameters of the wave generated by it should be determined with the use of precise formulae presented in the paper. The maximum time of acting of the constant pressure pulse, for which the wave parameters do not exceed their static values yet, was also determined. However, the significant decrease in cavity radius was observed as the effect of unloading.

Keywords: expanding spherical stress wave, isotropic elastic medium, dynamic coefficient of load

