



## Modelowanie i symulacja numeryczna procesów stick-slip z użyciem odwzorowań $luz(\dots)$ i $tar(\dots)$

DARIUSZ ŻARDECKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechaniczny, Instytut Pojazdów Mechanicznych  
i Transportu, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono metody modelowania i symulacji procesów stick-slip w dyskretnych układach mechanicznych z tarcieniem. Cechą znaną metody modelowania jest zastosowanie specjalnych przedziałami liniowych odwzorowań topologicznych  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  wraz z ich oryginalnym, dość prostym aparatem matematycznym. Tworzone modele są przejrzyste, łatwe do zastosowania w symulacyjnych programach komputerowych MBS (*Multibody Systems*) wykorzystujących standardowe procedury rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

**Słowa kluczowe:** mechanika teoretyczna, układy dyskretne z tarcieniem, procesy stick-slip, modelowanie matematyczne, odwzorowania przedziałami liniowe, symulacja komputerowa, procedury numeryczne

**Symbole UKD:** 531.43

### 1. Wstęp

Procesy „stick-slip” (przyleganie-poślizg) wynikające z działania tarcia (kinetycznego i statycznego) są procesami silnie nieliniowymi wyrażanymi przez modele hybrydowe o zmiennej strukturze. Zmienność struktury modelu stick-slip spowodowana jest zmiennością liczby stopni swobody układu, w którym dochodzi do szepiania się (przyleganie) i rozczepiania (poślizg) trących elementów.

Generowanie zmiennych struktur modeli stick-slip oraz sterowanie ich zmiennością przedstawiane jest szczegółowo w niewielu publikacjach. Najczęściej cytowanym przez innych badaczy pozostaje od lat artykuł Karnoppa [10], w którym omówionych jest kilka dość prostych modeli hybrydowych odnoszących się do układów z tarcieniem jedno- i dwumasowych. W metodzie przyjętej przez Karnoppa wykorzystuje

się heurystyczne podejście, w którym modele oparte na klasycznych regułach mechaniki ciał sztywnych, wzbogaca się o dodatkowe elementy umożliwiające ich numeryczną implementację.

Modele stick-slip układów wielomasowych z tarciem pojawiają się w literaturze poświęconej układom MBS. Dotyczy to przede wszystkim układów mechanizmów dźwigniowych występujących w robotach i manipulatorach, traktowanych jako pewne „łańcuchy” kinematyczno-dynamiczne (np. Blajer, Markiewicz [3], Harlecki [8]). W artykule Borkowskiego i Żardeckiego [5] analizowany jest model szeregowego układu reologicznego z tarciem, który opisuje proces prasowania dowolnej liczby przekładek we wspólnej obudowie. W pracy Grzesikiewicza i Wakulicza [7] funkcjonowanie podobnie kaskadowych wielomasowych struktur z tarciem dotyczy modelu dynamiki ruchu składu pociągu podczas hamowania. Przedstawiona tam dyskusja przypadków ukazuje złożoność stanów ruchu, mimo zachowania względnie prostych zasad funkcjonowania modelu. Modele stick-slip rozwijane są także przez projektantów oprogramowania animacyjnego 3D (np. dla analiz granulatów). Z uwagi na ogrom problemów związanych z modelowaniem tarcia w ruchu wieloelementowych układów brył przestrzennych, ich modele symulacyjne bazują głównie na procedurach heurystycznych (Baraff [2]).

W niektórych pracach teoretycznych (por. prace przeglądowe Acary i inni [1], Brogliato i inni [4], Pfeifer i Glocker [12], Steward [13]), podejmuje się na gruncie ogólnych wariacyjnych zasad mechaniki próby uogólnień modeli z tarciem na dowolnie złożone struktury wielomasowe. Bardzo interesująca jest tu rozprawa Grzesikiewicza [6] poświęcona teorii układów z więzami, gdzie zaproponowano uniwersalną metodę tworzenia równań ruchu o zmiennej strukturze wywodzącą się z zasady Gausa i odwołującą się do metody programowania nieliniowego.

Problematyka tarcia i procesów stick-slip w układach wieloelementowych komplikuje się szczególnie w sytuacjach, gdy występują stany szczepeń z niewyznaczalnymi rozkładami sił tarcia. Taki problem jest przedyskutowany i rozwiązany w artykule Żardeckiego [17] w odniesieniu do układu dwumasowego z trzema skojarzeniami ciernymi. Wykazane jest, że mimo niewyznaczalności rozkładu sił tarcia statycznego istnieją jednoznacznie określone równania ruchu opisujące procesy stick-slip w modelowanym układzie. W pracach Żardeckiego (np. [16-18]) stosowane są w modelowaniu procesów stick-slip specjalne odwzorowania przedziałami liniowe  $tar(\dots)$  i  $luz(\dots)$ . Dzięki tym odwzorowaniom i ich zaskakująco prostym własnościom synteza modeli jest bardzo sformalizowana, a uzyskane modele pozwalają realizować redukcje w sposób parametryczny i asymptotyczny, co ma oczywiste znaczenie dla analiz wrażliwości i innych badań teoretycznych praktykowanych przez badaczy dynamiki nieliniowej.

Celem niniejszego artykułu jest pokazanie rozwiniętej metody modelowania i symulacji procesów stick-slip opartej na odwzorowaniach  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  z dopuszczeniem niestandardowych charakterystyk sił tarcia.

Plan pracy jest następujący:

- W punkcie 2 podane są syntetyczne informacje na temat odwzorowań  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  oraz związanego z nimi aparatu matematycznego;
- W punkcie 3 przedstawia się elementarnymi przedziałami liniowy model procesu stick-slip dla układu dwumasowego oraz modele dla struktur zdegenerowanych (przy bardzo dużej dysproporcji mas), w tym układu jednomasowego;
- W punkcie 4 przedstawia się zastosowanie algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera do całkowania równań ruchu opisujących procesy stick-slip w układzie dwumasowym oraz jednomasowym. Uzyskane procedury symulacyjne nie zawierają uwikłań. Zaprezentowane są implementacje numeryczne w systemie Matlab-Simulink;
- Punkt 5 zawiera podsumowanie pracy.

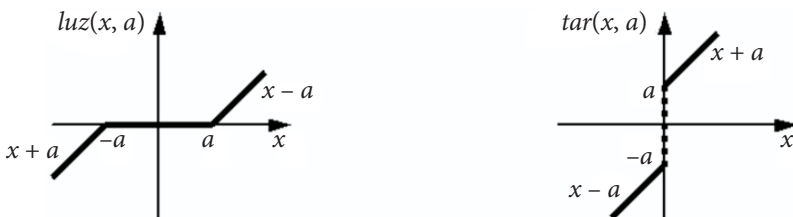
## 2. Wybrane informacje na temat odwzorowań $luz(\dots)$ i $tar(\dots)$

Odwzorowania  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  są przedstawione szczegółowo w kilku artykułach Żardeckiego [14, 15, 17] i zbiorczo omówione w monografii [18]. Informacje prezentowane w niniejszym artykule stanowią minimum niezbędne dla wyjaśnienia matematycznych aspektów metody modelowania procesów stick-slip.

Definicja: dla  $-\infty < x < +\infty$  i  $a \geq 0$

$$luz(x, a) = x + \frac{|x - a| - |x + a|}{2}$$

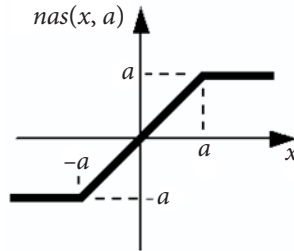
$$tar(x, a) = x + a \cdot s(x) \quad \text{gdzie} \quad s(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ s^* \in [-1, 1] & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$



Rys. 1. Interpretacja topologiczna odwzorowań  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$

Odwzorowania  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  mogą być wykorzystane w opisie innych odwzorowań przedziałami liniowych. Na przykład odwzorowanie  $nas(x, a)$  opisujące charakterystykę liniową z nasyceniem (rys. 2) może być wyrażone w zwartej formie:

$$nas(x, a) = x - luz(x, a)$$



Rys. 2. Interpretacja topologiczna odwzorowania  $nas(\dots)$

Odwzorowania  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  posiadają szereg własności, które tworzą oryginalny aparat matematyczny obejmujący m.in. formuły podstawowe, formuły i twierdzenia dotyczące rozwiązywania równań, minimalizacji funkcji z ograniczeniami, przekształcania inkluzji w równania różniczkowe. W podanych tu przykładowych formułach i twierdzeniach (wybranych z uwagi na ich reprezentatywność i znaczenie dla modeli procesów stick-slip), wszystkie stałe są nieujemne:

- $tar(x, a) = luz^{-1}(x, a)$ ;
- $k \cdot luz(x, a) = luz(k \cdot x, k \cdot a)$ ;
- $k \cdot tar(x, a) = tar(k \cdot x, k \cdot a)$ ;
- $luz(luz(x, a), b) = luz(x, a + b)$ ;
- $tar(tar(x, a), b) = tar(x, a + b)$ ;
- $k_1 \cdot tar(x, a_1) + k_2 \cdot tar(x, a_2) = (k_1 + k_2) \cdot tar\left(x, \frac{k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2}{k_1 + k_2}\right)$ ;
- Jeśli  $luz(y, b) = k \cdot luz(x - y, a)$ , to  $luz(y, b) = \frac{k}{k + 1} \cdot luz(x, a + b)$ ;
- Jeśli  $f(x)$  jest funkcją wypukłą oraz  $\tilde{x} : \min_x f(x)$ , wówczas zadanie minimalizacji z ograniczeniem  $\hat{x} : \min_x f(x) \wedge |x| \leq x_0$  ma rozwiązanie  $\hat{x} = \tilde{x} - luz(\tilde{x}, x_0)$ .

- Inkluzja  $\dot{x}(t) \in y(t) - b \cdot \text{tar}(x(t), a)$ , dla której  $\text{tar}(0, a)_{opt} : \min_{\text{tar}(0, a)} Q(\dot{x}) \wedge \text{tar}(0, a) \in [-a, a]$ , gdzie  $Q(\dots)$  — funkcja wypukła, jest równoważna równaniu

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} y(t) - b \cdot \text{tar}(x(t), a) & \text{gdy } x(t) \neq 0 \\ \text{luz}(y(t), b \cdot a) & \text{gdy } x(t) = 0. \end{cases}$$

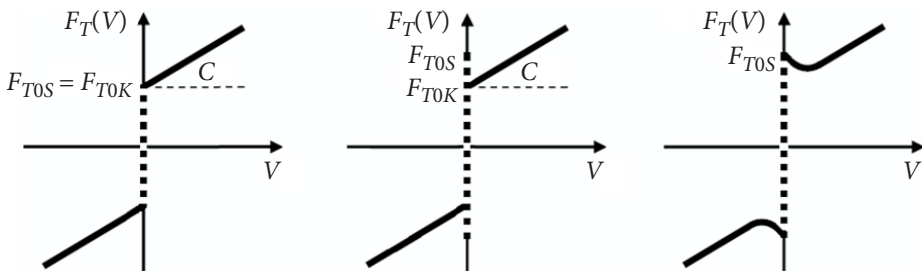
W monografii [18] podane są formuły i twierdzenia odnoszące się także do układów równań i inkluzji z dwiema zmiennymi.

### 3. Modelowanie procesów stick-slip

Modelowanie tarcia oraz procesów stick-slip wymaga w pierwszej kolejności odniesienia się do charakterystyk siły tarcia kinetycznego, które występuje podczas poślizgu oraz do opisu działania siły tarcia statycznego odpowiedzialnego za przyleganie.

Zgodnie z klasyczną teorią tarcia Amontonsa i Coulomba siła tarcia może być opisana przy pomocy charakterystyk typu  $F_T(V)$ , gdzie  $F_T$  — siła tarcia,  $V$  — prędkość poślizgu. Są to charakterystyki przedziałami liniowe uwzględniające efekt tarcia suchego (składnik z „signum”) i wiskotycznego (składnik liniowy). Klasyczna teoria dopuszcza przy tym skokową zmianę siły tarcia suchego, gdy dochodzi do zerwania stanu przylegania („stick”) i następuje stan poślizgu („slip”). Według nowszych badań (praca przeglądowa Ibrahima [9]) przejście ze stanu tarcia statycznego do stanu tarcia kinetycznego ma fazę pośrednią (efekt Stribecka), co może być uwzględnione w charakterystyce tarcia jako wystąpienie ujemnego tłumienia (!) dla małych prędkości poślizgu.

Charakterystyki przedstawione na rysunku 3 pokazują najważniejsze różnice w sposobach modelowania siły tarcia w sposób „statyczny”. Charakterystyka (a)

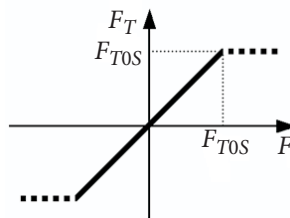


Rys. 3. Typowe charakterystyki siły tarcia

eksponuje istotę zjawiska tarcia. Parametr  $F_{T0}$  wyraża maksymalną siłę tarcia suchego kinetycznego, zaś  $C$  — współczynnik tłumienia. Linia przerywana pokazuje, iż w stanie zerowej prędkości, gdy może dochodzić do przylegania (sczepienia) elementów, siła tarcia (statycznego) wyznaczana jest na podstawie innych prawideł. Charakterystyka (b) eksponuje możliwość różnicy pomiędzy siłą tarcia suchego kinetycznego (parametr  $F_{T0K}$ ) oraz rozwijaną maksymalną siłą tarcia suchego statycznego (parametr  $F_{T0S}$ ). Jak wiadomo z badań, parametry te silnie zależą od współczynników materiałowych elementów, które występują w skojarzeniu ciernym (np. dla skojarzenia stal/stal różnice sięgają 30%, zaś w skojarzeniu teflon/teflon nie występują). Charakterystyka (c) uwzględnia efekt Stribecka.

Warto w tym miejscu nadmienić, że w ostatnich latach rozwijane są także bardziej złożone dynamiczne modele elementarne sił tarcia (np. Leine i inni [11]), w których siły wynikające z charakterystyk są dodatkowo przetwarzane w członach dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi (np. „model LuGre”). Istotą każdego sposobu modelowania tarcia pozostają jednak nieliniowe charakterystyki z członami typu „signum” odpowiedzialnymi za skokową zmianę siły tarcia przy zmianie kierunku ruchu.

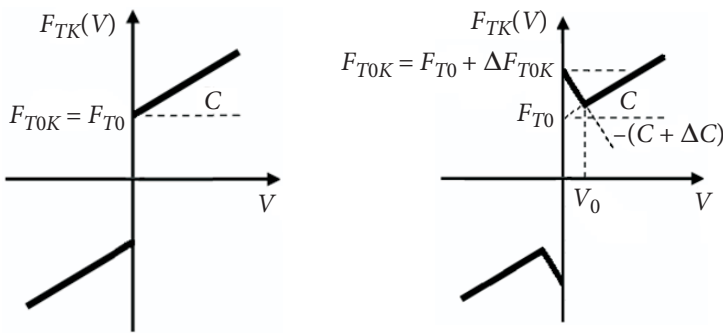
Struktura modelu zjawiska stick-slip zależy od struktury układu, w którym tarcie występuje, w tym zwłaszcza od liczby i powiązań skojarzeń ciernych, a nie zależy od samej postaci charakterystyki. Można natomiast uznać jako generalną zasadę, iż rozwijana w stanie  $V = 0$  siła tarcia  $F_T$  jest liniowo zależna od siły  $F$  „rozrywającej” elementy w skojarzeniu ciernym (rys. 4). Jej nasycenie występuje, gdy siła rozrywająca przekracza poziom siły tarcia statycznego  $F_{T0S}$ , przy którym rozpoczyna się poślizg i zaczyna działać tarcie kinetyczne.



Rys. 4. Charakterystyka siły tarcia statycznego (linia przerywana oznacza „włączenie się” tarcia kinetycznego)

Należy podkreślić, że wyznaczenie siły rozrywającej  $F$  może być niewykonalne w przypadku struktur wieloelementowych (wspomniane wcześniej problemy statycznej niejednoznaczności rozkładu rozwijanych sił tarcia). Nie oznacza to bynajmniej, iż proces stick-slip nie może być wówczas jednoznacznie opisany. W rozwiązaniu problemu bardzo pomocne okazuje się zastosowanie zasady Gaussa z minimalizacją tzw. „energii przyspieszeń” w stanie  $V = 0$ .

W opisie charakterystyk tarcia oraz w modelowaniu procesów stick-slip na plan pierwszy wysuwa się gwałtowność zmian, którą w pierwszym przybliżeniu mogą wyrażać także zależnościami przedziałami liniowe. Zauważmy, że odwzorowanie  $tar(\dots)$  doskonale przystaje do opisu charakterystyki Coulomba, która stanowi podstawę modeli także bardziej złożonych. Inkluzyjna formuła  $tar(0, a)$  pozwala w zwięzły sposób wyrazić postulat dookreślenia wartości siły tarcia statycznego w stanie zerowego poślizgu. Odwzorowanie  $luz(\dots)$  pozwala modyfikować charakterystykę Coulomba (np. poprzez przedziałami liniową aproksymację członów odzwierciedlających efekt Stribeck). Na rysunku 5 przedstawiono przedziałami liniowe reprezentacje charakterystyk sił tarcia kinetycznego, dla których sformułowano zapis analityczny. Zaletą tego zapisu jest m.in. ukazanie składników nieliniowego ujemnego tłumienia, które przeprowadzają klasyczną charakterystykę Coulomba w charakterystykę z efektem Stribeck.



Rys. 5. Przedziałami liniowe charakterystyki siły tarcia kinetycznego: a) charakterystyka Coulomba; b) charakterystyka Stribeck

Opis charakterystyk siły tarcia kinetycznego:

— dla charakterystyki Coulomba:

$$F_{TK}(V) = C \operatorname{tar}\left(V, \frac{F_{T0}}{C}\right).$$

— dla charakterystyki Stribeck:

$$F_{TK}(V) = C \operatorname{tar}\left(V, \frac{F_{T0} + \Delta F_{T0K}}{C}\right) + (2C + \Delta C) (luz(V, V_0) - V),$$

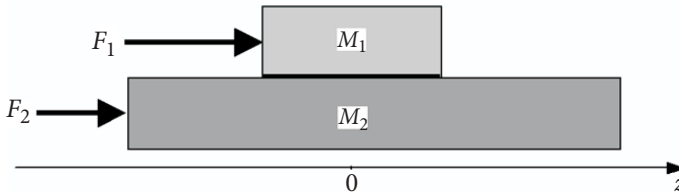
gdzie  $\Delta F_{T0K} = (C + C_0)V_0 = (2C + \Delta C)V_0$ .

W podanych formułach występuje niezerowy parametr  $C$  (dzielenie przez  $C$ ). W przypadku, gdy w modelu tarcia kinetycznego pomijane jest tarcie wiskotyczne ( $C = 0$ ), wówczas w opisie charakterystyki z tarcie suchym stosuje się wyrażenie

$$F_{TK}(V) = C \operatorname{tar}\left(V, \frac{F_{T0}}{C}\right) - CV = F_{T0} \operatorname{sgn}(V).$$

Wykorzystanie zasady Gaussa oraz aparatu matematycznego odwzorowań  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  w wyznaczaniu modeli stick-slip będzie przedstawione na reprezentatywnym przykładzie dwuelementowego układu ciernego. W odróżnieniu wyprowadzeń podanych w poprzednich publikacjach autora, w niniejszej pracy dopuszcza się dowolny sposób opisu charakterystyki tarcia kinetycznego i dowolne relacje pomiędzy siłami tarcia kinetycznego  $F_{TK0}$  w stanach  $|V| = 0^+$  oraz maksymalną siłą tarcia statycznego  $F_{TS0}$ .

### Przykład



Rys. 6. Dwuelementowy układ z tarcie

#### Oznaczenia:

$z_1, z_2$  — współrzędne mas w układzie  $0z$ ;

$V = \dot{z}_1 - \dot{z}_2$  — prędkość poślizgu;

$t$  — czas;

$F_1, F_2$  — siły oddziaływań zewnętrznych (niebędące siłami tarcia);

$F_T$  — siła tarcia;

$F_{TK}$  — siła tarcia kinetycznego (jest wyrażona dowolną charakterystyką  $F_{TK}(V)$ );

$F_{TK0}$  — siła tarcia kinetycznego dla  $V = 0^\pm$ ;

$F_{TS}$  — siła tarcia statycznego;

$F_{TS0}$  — maksymalna siła tarcia statycznego;

$M_1, M_2$  — masy.



Równania ruchu:

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) + F_{TK} (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) = F_1(t),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) - F_{TK} (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) = F_2(t).$$

— gdy  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) + F_{TS}(t) = F_1(t),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) - F_{TS}(t) = F_2(t), \quad \text{gdzie } F_{TS}(t) \in [-F_{TS0}, F_{TS0}].$$

Zgodnie z zasadą Gaussa w stanie  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$  minimalizowana jest ze względu na  $F_{TS}(t)$  (a więc z uwzględnieniem ograniczenia  $F_{TS}(t) \in [-F_{TS0}, F_{TS0}]$ ) tzw.

„energia przyspieszeń”  $Q = \frac{M_1 \ddot{z}_1^2}{2} + \frac{M_2 \ddot{z}_2^2}{2}$ .

Ponieważ  $\ddot{z}_1(t) = \frac{F_1(t) - F_{TS}(t)}{M_1}$ ,  $\ddot{z}_2(t) = \frac{F_2(t) + F_{TS}(t)}{M_2}$ , więc zadanie minimalizacji z ograniczeniami ma postać:

$$\hat{F}_{TS} : \min_{F_{TS} \in [-F_{TS0}, F_{TS0}]} \left( Q(F_{TS}) = \frac{(F_1 - F_{TS})^2}{2M_1} + \frac{(F_2 + F_{TS})^2}{2M_2} \right).$$

Minimalizowana funkcja jest wypukła, gdyż  $Q(F_{TS})$  posiada pochodne

$$\frac{\partial Q(F_{TS})}{\partial F_{TS}} = -\frac{F_1 - F_{TS}}{M_1} + \frac{F_2 + F_{TS}}{M_2} = \frac{(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \left( F_{TS} - \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2} \right) = 0$$

$$\text{oraz } \frac{\partial^2 Q(F_{TS})}{\partial F_{TS}^2} = \frac{(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} > 0.$$

A więc na mocy przytoczonego w p. 2 twierdzenia o minimalizacji funkcji

$$\hat{F}_{TS} = \tilde{F}_{TS} - \text{luz}(\tilde{F}_{TS}, F_{TS0}),$$

gdzie  $\tilde{F}_{TS}$  jest rozwiązaniem zadania minimalizacji bez ograniczeń

$$\hat{F}_{TS} : \min_{F_{TS}} \left( Q(F_{TS}) = \frac{(F_1 - F_{TS})^2}{2M_1} + \frac{(F_2 + F_{TS})^2}{2M_2} \right), \text{ co daje } \tilde{F}_{TS} = \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}.$$

Rozwiązanie uwzględniające ograniczenie  $F_{TS}(t) \in [-F_{TS0}, F_{TS0}]$  wyraża formuła

$$\hat{F}_{TS} = \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2} - \text{luz} \left( \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right).$$

Po podstawieniu do równań ruchu uzyskujemy model stick-slip w postaci:

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) + F_{TK} (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) = F_1(t),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) - F_{TK} (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) = F_2(t).$$

— gdy  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)) + \text{luz} \left( \frac{M_2 F_1(t) - M_1 F_2(t)}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)) - \text{luz} \left( \frac{M_2 F_1(t) - M_1 F_2(t)}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right).$$

Uzyskane równania o zmiennej strukturze w pełni wyrażają fizyczny sens zachodzących procesów i są ściśle kompatybilne z „uznanym” modelem stick-slip Karnoppa [10] wyznaczonym w sposób klasyczny na podstawie prawa zachowania pędu.

Zauważmy, gdy w stanie  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$  siła rozrywająca  $\tilde{F}_{TS} = \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}$

mieści cię w zakresie  $[-F_{TS0}, F_{TS0}]$ , wówczas  $\text{luz} \left( \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right) = 0$  i

$$M_1 \ddot{z}_1(t) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)), \text{ czyli } (M_1 + M_2) \ddot{z}_1(t) = F_1(t) + F_2(t),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)), \text{ czyli } (M_1 + M_2) \ddot{z}_2(t) = F_1(t) + F_2(t).$$

Są to równania identyczne, wobec czego  $\ddot{z}_1(t) = \ddot{z}_2(t)$ . Uwzględniając, że również  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$ , oznacza to przyleganie (szczępienie) elementów, które trwa do momentu, aż siła rozrywająca  $\tilde{F}_{TS}$  osiągnie kres  $[-F_{TS0}, F_{TS0}]$ .

Zaletą zastosowania formalizmu odwzorowań przedziałami liniowych są nie tylko zwarte i niezawierające uwikłań formy analityczne (co ułatwia obliczenia numeryczne), ale przede wszystkim możliwość analitycznych przekształceń modeli (co jest szczególnie ważne, gdy przeprowadzane są ich redukcje).

Problem parametrycznie realizowanych redukcji modeli stick-slip jest szczególnie istotny w przypadku układów o dużym zróżnicowaniu mas. W dotychczasowych publikacjach autora ta kwestia jest omówiona dla modelu z charakterystyką Coulomba przy  $F_{TK0} = F_{TS0} = F_{T0}$ . Sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdy  $F_{TK0} \neq F_{TS0}$ . Rozważymy teraz taką sytuację.

Gdy charakterystyka siły tarcia kinetycznego jest charakterystyką Coulomba, lecz  $F_{TK0} \neq F_{TS0}$ , wówczas równania ruchu przyjmują formę:

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) + C \operatorname{tar} \left( (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)), \frac{F_{TK0}}{C} \right) = F_1(t),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) - C \operatorname{tar} \left( (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)), \frac{F_{TK0}}{C} \right) = F_2(t);$$

— gdy  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$

$$M_1 \ddot{z}_1(t) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)) + \operatorname{luz} \left( \frac{M_2 F_1(t) - M_1 F_2(t)}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right),$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F_1(t) + F_2(t)) - \operatorname{luz} \left( \frac{M_2 F_1(t) - M_1 F_2(t)}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right).$$

Przeanalizowane będą dwa osobliwe przypadki:

- 1) dla  $M_1 \ll M_2$  i  $M_1 \rightarrow 0$ ;
- 2) dla  $M_1 \ll M_2$  i  $M_2 \rightarrow \infty$ .

Przypadek 1) Załóżmy  $M_1 \ll M_2$  i  $M_1 \rightarrow 0$ . Wówczas:

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq \dot{z}_2(t)$   $C \operatorname{tar} \left( (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)), \frac{F_{TK0}}{C} \right) = F_1(t)$  (degeneracja)

$$M_2 \ddot{z}_2(t) - C \operatorname{tar} \left( (\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)), \frac{F_{TK0}}{C} \right) = F_2(t).$$

Przy  $C > 0$  prowadzi to natychmiast do obniżenia rzędu modelu:

$$\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t) = \frac{1}{C} \operatorname{luz} \left( (F_1(t)), F_{TK0} \right) \text{ (równanie więzów kinematycznych),}$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = F_1(t) + F_2(t) \text{ (równanie ruchu).}$$

Stan przylegania osiągnany jest automatycznie jeśli tylko  $F_1(t) \in [-F_{TS0}, F_{TS0}]$ .

— Gdy  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$   $luz(F_1(t), F_{TS0}) = 0$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = F_1(t) + F_2(t).$$

A więc osiągnięty stan przylegania jest utrzymywany, gdy  $F_1(t) \in [-F_{TS0}, F_{TS0}]$ .  
Takie zróżnicowane warunki stick-slip można uwzględnić w procedurze numerycznej.

Przypadek 2) Załóżmy  $M_1 \ll M_2$  i  $M_2 \rightarrow \infty$ . Wówczas:

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq \dot{z}_2(t)$   $M_1 \ddot{z}_1(t) + Ctar\left(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t), \frac{F_{TK0}}{C}\right) = F_1(t)$

$$\ddot{z}_2(t) = 0 \text{ oraz } \dot{z}_2(t) = 0.$$

— gdy  $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$   $M_1 \ddot{z}_1(t) = luz(F_1(t), F_{TS0})$

$$\ddot{z}_2(t) = 0 \text{ oraz } \dot{z}_2(t) = 0.$$

Oznacza to redukcję do modelu jednomasowego wyrażanego przez równania

— gdy  $\dot{z}_1(t) \neq 0$   $M_1 \ddot{z}_1(t) + Ctar\left(\dot{z}_1(t), \frac{F_{TK0}}{C}\right) = F_1(t)$ ,

— gdy  $\dot{z}_1(t) = 0$   $M_1 \ddot{z}_1(t) = luz(F_1(t), F_{TS0})$ .

Zauważmy, że dla układu a priori jednomasowego równanie ruchu w stanie  $\dot{z}_1(t) = 0$  miałyby formę  $M_1 \ddot{z}_1(t) + F_{TS}(t) = F_1(t)$  i rozwiązywane byłoby zadanie minimalizacji:

$$\hat{F}_{TS} : \min_{F_{TS} \in [-F_{TS}, F_{TS0}]} \left( Q(F_{TS}) = \frac{M_1 \dot{z}_1^2}{2} = \frac{(F_1 - F_{TS})^2}{2M_1} \right).$$

Dałoby to wynik  $\hat{F}_{TS} = F_1 - luz(F_1, F_{TS0})$ , a po podstawieniu do równania ruchu równanie  $M_1 \ddot{z}_1(t) = luz(F_1(t), F_{TS0})$ , a więc identyczne z uzyskanym metodą redukcji parametrycznej. Otrzymany wynik jest też kompatybilny z modelem jednomasowym Karnoppa [10] i ściśle odpowiada modelowi wyznaczonemu w pracy Żardeckiego [14], z użyciem wariacyjnej zasady najmniejszego działania.

Zaproponowana metoda redukcji może być zatem stosowana w przypadku modelu wykorzystującego do opisu siły tarcia kinetycznego przedziałami liniową charakterystykę Coulomba z tłumieniem niezerowym i dopuszczającego różne zakresy zmienności sił tarcia kinetycznego i statycznego. W innych bardziej ogólnych przypadkach, istotnym dla metody redukcji (ale tylko redukcji przy  $M_1 \rightarrow 0$ ) wydaje

się warunek wyznaczalności z zależności  $F_{TK}(V)$  jej zależności odwrotnej  $V(F_{TK})$ . W przypadku charakterystyki z efektem Stribeck problem się komplikuje, niemniej jest rozwiązywalny z wykorzystaniem bardziej rozbudowanego opisu.

#### 4. Procedury numeryczne symulacji procesów stick-slip

Całkowanie numeryczne równań ruchu realizowane jest poprzez rozwiązanie ekwiwalentnego układu równań stanu (równań pierwszego rzędu). Rozważmy zatem uogólniony model dynamiczny wyrażony przez układ równań stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t),$$

gdzie:  $\mathbf{x}$  — wektor zmiennych stanu;

$t$  — czas;

$\mathbf{f}(\dots)$  — wektor funkcji prawych stron równań stanu.

Istnieje wiele algorytmów numerycznego rozwiązywania równań stanu. Kluczowym algorytmem jest tu najprostszy algorytm ekstrapolacyjny Eulera, jako że wiele innych bardziej wyrafinowanych algorytmów wykorzystuje go, czy to do obliczeń pomocniczych w każdym kroku (jak ma to miejsce w algorytmach Runge-Kutty), czy nawet do obliczeń zasadniczych w krokach startowych. Znaczenie algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera wynika z faktu, iż jest to algorytm samostartujący oraz niewymagający dodatkowych obliczeń iteracyjnych. Przy zastosowaniu tego algorytmu rozwiązanie w chwili  $t_n$  jest zależne od rozwiązania w chwili  $t_{n-1}$  w następujący sposób:

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}(t_{n-1}) + \Delta t_n \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{n-1}), t_{n-1}) \quad \text{gdzie} \quad \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

Lokalny błąd obciążenia algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera można oszacować jako  $\varepsilon^o(t_n) = O((\Delta t_n)^2)$  z zastrzeżeniem, że dotyczy to sytuacji, gdy istnieją pochodne funkcji prawych stron rzędu pierwszego. W przypadku gdy takie pochodne nie istnieją (nieliniowości progowe w modelu stick-slip) oszacowanie jest o rząd niższe i wynosi  $\varepsilon^o(t_n) = O(\Delta t_n)$ , co oznacza, że dąży do zera co najmniej tak szybko, jak krok obliczeń.

Mankamentem algorytmu ekstrapolującego Eulera okazuje się znaczna podatność na przenoszenie błędu, jeśli tylko krok obliczeń nie jest dostatecznie mały. Badania oparte na liniowym modelu wzorcowym wykazują, że dla zapewnienia stabilności numerycznej konieczne jest stosowanie kroków obliczeń spełniających warunek  $\Delta t_n < 2T_{\min}$ , gdzie  $T_{\min}$  oznacza najmniejszą stałą czasową modelu.

Wykorzystując algorytm do układu z tarciami, należy zwrócić na tę kwestię szczególną uwagę, wykonując testy i dobierając parametry numeryczne. Algorytm ekstrapolacyjny Eulera nie jest zatem w pełni zadowalający pod względem dokładności i stabilności. Jego zaletą jest niewątpliwa prostota formuły, dzięki czemu unika się dodatkowych obliczeń i ewentualnych wynikających z tego zaburzeń numerycznych, które w układach z nieliniowościami progowymi mogłyby powodować chaos numeryczny.

Problematykę symulacji numerycznej procesów stick-slip przedstawimy na przykładach odnoszących się do modelu dwumasowego oraz jednomasowego.

### Układ dwumasowy

Wprowadzamy wektor zmiennych stanu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}, \text{ co oznacza także } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Po sprowadzeniu do postaci równań stanu, model procesu stick-slip w układzie dwumasowym stanowią równania stanu (w tym przypadku równania, w których czas występuje jawnie w wymuszeniach  $F_1(t), F_2(t)$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ f_2(\dots) \\ f_3(\dots) \\ f_4(\dots) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$f_1(\dots) = x_2,$$

$$f_2(\dots) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}(F_1 - F_{TK}(x_2 - x_4)) & \text{gd } x_2 - x_4 \neq 0 \\ \frac{F_1 + F_2}{M_1 + M_2} + \frac{1}{M_1} \text{ luz} \left( \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right) & \text{gd } x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

$$f_3(\dots) = x_4,$$

$$f_4(\dots) = \begin{cases} \frac{1}{M_2}(F_2 + F_{TK}(x_2 - x_4)) & \text{gdy } x_2 - x_4 \neq 0 \\ \frac{F_1 + F_2}{M_1 + M_2} - \frac{1}{M_2} \text{luż} \left( \frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right) & \text{gdy } x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Odnosząc te równania do algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera i wprowadzając parametr  $\delta$  jako „zero numeryczne” sterujące zmianą struktury, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_n) \\ x_2(t_n) \\ x_3(t_n) \\ x_4(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{n-1}) \\ x_2(t_{n-1}) \\ x_3(t_{n-1}) \\ x_4(t_{n-1}) \end{bmatrix} + \Delta t_n \begin{bmatrix} x_2(t_{n-1}) \\ f_2(\dots, t_{n-1}) \\ x_3(t_{n-1}) \\ f_4(\dots, t_{n-1}) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$f_2(\dots, t_{n-1}) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}(F_1(t_{n-1}) - F_{TK}(x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1}))) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1})| > \delta \\ \frac{(F_1(t_{n-1}) + F_2(t_{n-1}))}{M_1 + M_2} + \frac{1}{M_1} \text{luż} \left( \frac{M_2 F_1(t_{n-1}) - M_1 F_2(t_{n-1})}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1})| \leq \delta, \end{cases}$$

$$f_4(\dots, t_{n-1}) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}(F_1(t_{n-1}) + F_{TK}(x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1}))) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1})| > \delta \\ \frac{(F_1(t_{n-1}) + F_2(t_{n-1}))}{M_1 + M_2} - \frac{1}{M_2} \text{luż} \left( \frac{M_2 F_1(t_{n-1}) - M_1 F_2(t_{n-1})}{M_1 + M_2}, F_{TS0} \right) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1}) - x_4(t_{n-1})| \leq \delta. \end{cases}$$

Gdy znamy warunki początkowe oraz przebiegi wymuszeń od chwili początkowej, obliczenia przebiegają w sposób rekurencyjny.

### Układ jednomasowy

Wprowadzamy wektor zmiennych stanu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \text{ co oznacza także } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}.$$

Po sprowadzeniu do postaci równań stanu model procesu stick-slip w układzie jednomasowym stanowią równania stanu z wymuszeniem  $F(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\dots) \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad f_2(\dots) = \begin{cases} F - F_{TK}(x_2) & \text{gdy } x_2 \neq 0 \\ luz(F, F_{TS0}) & \text{gdy } x_2 = 0. \end{cases}$$

Odnosząc te równania do algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera, otrzymujemy:

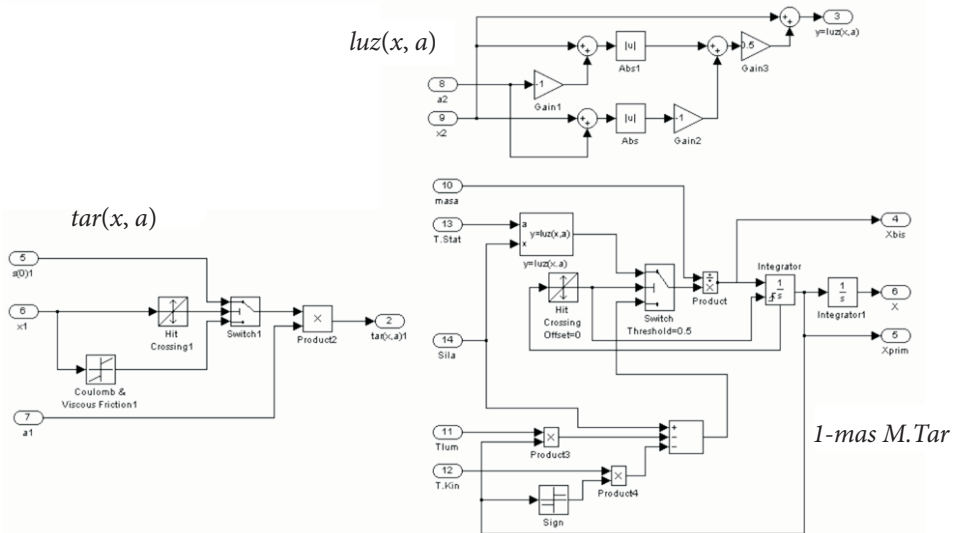
$$\begin{bmatrix} x_1(t_n) \\ x_2(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{n-1}) \\ x_2(t_{n-1}) \end{bmatrix} + \Delta t_n \begin{bmatrix} x_2(t_{n-1}) \\ f_2(\cdot, t_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\text{gdzie} \quad f_2(\dots, t_{n-1}) = \begin{cases} F(t_{n-1}) - F_{TK}(x_2(t_{n-1})) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1})| > \delta \\ luz(F(t_{n-1}), F_{TS0}) & \text{gdy } |x_2(t_{n-1})| \leq \delta. \end{cases}$$

Podane wyżej zależności określają algorytm rekurencyjnego wyznaczania rozwiązania.

Dobór kroku  $\Delta t_n$  oraz parametru zera numerycznego  $\delta$ , jakie występują w procedurach symulacyjnych procesów stick-slip, należy przeprowadzić mając na uwadze przede wszystkim błędy numeryczne generowane w otoczeniu punktu progowego. Wówczas to dochodzi do najbardziej gwałtownych w czasie oddziaływań i model jest najbardziej wrażliwy na zmianę warunków początkowych. W doborze wartości parametrów  $\Delta t_n$  oraz  $\delta$  nieodzowne są rozległe testy numeryczne.

W celu ułatwienia oprogramowania symulacyjnego wykorzystującego aparat matematyczny odwzorowań  $luz(\dots)$  i  $tar(\dots)$  przygotowano bibliotekę procedur (LUZTAR) w systemie Matlab-Simulink.



Rys. 7. Wybrane moduły obliczeniowe biblioteki LUZTAR:  $tar(x, a)$ ,  $luz(\dots)$ ,  $1\text{-mas } M.Tar$  (moduł symulacyjny procesu stick-slip w układzie jednomasowym)



Kluczowy dla zastosowań moduł symulacyjny *1-mas M.Tar* poddano rozległym testom numerycznym pod kątem właściwego doboru parametrów numerycznych, a także pod kątem wyboru algorytmu całkowania numerycznego. W wyniku badań porównawczych, w których realizowano obliczenia kolejno z różnymi algorytmami całkowania równań, potwierdzono przydatność procedury opartej na metodzie ekstrapolacyjnej Eulera.

Opracowane moduły zostały użyte w programach obliczeniowych, m.in. do symulacji procesów stick-slip zachodzących w samochodowych układach kierowniczych.

Testy numeryczne procedur oraz badania symulacyjne nieliniowej dynamiki układów kierowniczych z uwagi na luzy i tarcia są szeroko naświetlone w monografii (Żardecki [18]).

## 5. Uwagi końcowe

Metoda modelowania procesów stick-slip oparta na odwzorowaniach *luz(...)* i *tar(...)* dopuszcza stosowanie dowolnych przedziałami liniowych charakterystyk tarcia. Za sprawą aparatu matematycznego odwzorowań redukcje modeli mogą być przeprowadzane w sposób parametryczny. Opracowane modele stick-slip mają zwartą przejrzystą formę przystającą do algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.07.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2009 r.

### LITERATURA

- [1] V. ACARY, B. BROGLIATO, A. DANILIDIS, C. LEMARECHAL, *On the Equivalence Between Complementarity Systems, Projected Systems and Unilateral Differential Inclusions*, Rapport INRIA, 5107, 2004.
- [2] D. BARAFF, *Fast Contact Force Computation for Non-penetrating Rigid Bodies*, Komputer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 1994, 23-34.
- [3] W. BLAJER, A. MARKIEWICZ, *The effect of friction on multibody dynamics*, European Journal of Mechanics, A/Solids, 14, 5, 1995, 807-825.
- [4] B. BROGLIATTO, A. A. T. DAM, L. PAOLI, F. GENOT, M. ABADIE, *Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical system*, Applied Mechanical Review, 55, 2, 2002, 107-150.
- [5] W. BORKOWSKI, D. ŻARDECKI, *Modelowanie procesów dynamicznych w szeregowym układzie reologicznym, w którym występują tarcia pomiędzy obudową i elementami ruchomymi*, Biul. WAT, 9, 1998, 41-57.
- [6] W. GRZESIKIEWICZ, *Dynamika układów mechanicznych z więzami*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, 117, 1990.

- [7] W. GRZESIKIEWICZ, A. WAKULICZ, *Metody numeryczne wyznaczania sił tarcia suchego w amortyzatorach pociągu*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, 63, 1979, 5-44.
- [8] A. HARLECKI, *Metoda analizy dynamicznej układów wieloczłonowych z tarciem suchym w parach kinematycznych*, Zeszyty Naukowe ATH, Bielsko-Biała, Monografia, 2002.
- [9] R. A. IBRAHIM, *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos*, Part I: *Mechanics of contact and friction*, Part II: *Dynamics and modeling*, Applied Mechanical Review, 47, 7, 1994, 207-253.
- [10] D. KARNOPP, *Computer Simulation of Stick-Slip Friction on Mechanical Dynamic Systems*, Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 107, March 1985, 100-103.
- [11] R. I. LEINE, D. H. VAN CAMPEN, A. DE KRAKER, *Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models*, Nonlinear Dynamics, 16, 1998, 41-54.
- [12] F. PFEIFFER, C. GLOCKER, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, Wiley&Sons, N. York, 1996.
- [13] D. E. STEWART, *Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact*, SIAM Review, 42, 1, 2000, 3-39.
- [14] D. ŻARDECKI, *Odzworowania luz(...) i tar(...) - podstawy teoretyczne oraz koncepcja zastosowań w modelowaniu dyskretnych układów mechanicznych zawierających luzy bądź tarcia*, Biul. WAT, 50, 5, 2001, 125-160.
- [15] D. ŻARDECKI, *Piecewise Linear luz(...) and tar(...) Projections. Part 1: Theoretical Background. Part 2: Application in Modeling of Dynamic Systems with Freeplay and Friction*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44, 1, 2006, 163-184, 185-202.
- [16] D. ŻARDECKI, *Piecewise Linear Modeling of Friction and Stick-Slip Phenomenon in Discrete Dynamical Systems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44, 2, 2006, 255-277.
- [17] D. ŻARDECKI, *Static friction indeterminacy problems and modeling of stick-slip phenomenon in discrete dynamic systems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45, 2, 2007, 289-310.
- [18] D. ŻARDECKI, *Modelowanie luzu i tarcia oparte na odzworowaniach luz(...) i tar(...) — podstawy teoretyczne i zastosowanie w symulacji drgań nieliniowych w układach kierowniczych samochodów*, rozprawa habilitacyjna, Wyd. WAT, Warszawa, 2007.

D. ŻARDECKI

### Modelling and numerical simulation of stick-slip phenomena with *luz(...)* and *tar(...)* projections

**Abstract.** The paper describes a method of modelling and simulation of stick-slip phenomena in multibody mechanical system with friction. The method bases on special piecewise-linear *luz(...)* and *tar(...)* projections and their original mathematical apparatus. The models are transparent, easy to use in MBS (Multibody Systems) software with standard ODE (Ordinary Differential Equations) procedures.

**Keywords:** theoretical mechanics, multibody systems with friction, stick-slip, mathematical modelling, piecewise linear projections, simulation, numerical procedures

**Universal Decimal Classification:** 531.43