



Analiza przestrzennych ścianowych konstrukcji usztywniających budynki wysokie z dodatkowymi sztywnymi belkami

JACEK WADOWICKI, ELŻBIETA WADOWICKA

Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska,
Instytut Konstrukcji Budowlanych, 60-965 Poznań, Piotrowo 5,
jacek.wdowicki@put.poznan.pl

Streszczenie. Praca przedstawia analizę przestrzennych niesymetrycznych ścianowych konstrukcji usztywniających budynki wysokie z dodatkowymi sztywnymi belkami. Sztywne, wysokie belki zastosowane nawet na niewielu poziomach ścianowej konstrukcji z nadprożami znacznie zwiększają sztywność układu konstrukcyjnego. W analizie wykorzystano pewien wariant metody ciągłych połączeń, opracowany dla przestrzennych ścianowych konstrukcji usztywniających, mających skokowe zmiany sztywności wzdłuż wysokości. W podejściu ciągłym nadproża są zastępowane równoważnymi pionowymi pasmami ciągłych połączeń. Równania zgodności przemieszczeń są zapisane w punktach znajdujących się w środkach rozpiętości nadproży i sztywnych belek. Układy równań różniczkowych dla stref układów usztywniających o stałym przekroju poprzecznym są rozdzielane przy wykorzystaniu ortogonalnych wektorów własnych. Wyniki obliczeń dla proponowanej metody zostały porównane z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu różnych metod obliczeniowych, zarówno analitycznych jak i numerycznych, oraz z opublikowanymi wynikami badań doświadczalnych. Stwierdzono dobrą zgodność wyników.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji, mechanika komputerowa, ścianowe konstrukcje usztywniające, sztywne belki, metoda ciągłych połączeń, budynki wysokie

1. Wstęp

W projektowaniu budynków wysokich podstawowym celem jest zapewnienie dostatecznej sztywności konstrukcji, wymaganej dla przeniesienia poziomych sił wywołanych działaniem wiatru i siłami bezwładności występującymi podczas trzęsień ziemi. Przeprowadzone liczne porównania pozwalają na stwierdzenie, że jedną z konstrukcji

najskuteczniej spełniających to zadanie są ścianowe konstrukcje usztywniające [11]. W praktyce jednakże wysokość nadproży łączących ściany jest ograniczona. Badania wykazały, że uzupełnienie konstrukcji o sztywne belki pozwala znacznie zmniejszyć przemieszczenia poziome budynku i zredukować naprężenia normalne w ścianach konstrukcji. Belki usztywniające (ang. *stiffeners*) dogodnie jest umieścić na szczycie budynku oraz na poziomach tzw. kondygnacji technicznych [4].

Dostępne metody analizy ścianowych konstrukcji usztywniających budynki wysokie mogą być najogólniej zaklasyfikowane do następujących trzech grup: metoda elementów skończonych, metoda analogii ramowej i metoda ciągłych połączeń [11].

Pomimo tego że metoda elementów skończonych jest skuteczną i wszechstronną metodą analizy złożonych konstrukcji, poszukiwane są nadal dla specyficznych konstrukcji, takich jak konstrukcje usztywniające zawierające ściany połączone pasmami nadproży i trzony, bardziej efektywne metody. W szczególności problemy związane z wielką liczbą niewiadomych i złym uwarunkowaniem zadania dla smukłych konstrukcji, występujące w analizach metodami dyskretnymi, mogą być w prosty sposób ominięte przez wykorzystanie modeli ciągłych. W podejściu ciągłym, pionowe pasma nadproży zastępowane są przez ciągłe połączenia. Wykorzystująca to podejście metoda ciągłych połączeń (ang. *continuous connection method* — CCM) uważana jest za najprostszą i najskuteczniejszą metodę analiz projektowych ścianowych konstrukcji usztywniających z nadprożami.

Płaskie ścianowe układy usztywniające z nadprożami i dodatkowymi sztywnymi belkami były analizowane w wielu pracach [1, 3, 4, 5, 6, 9, 10]. Coull and Low [7] przedstawili analizę przestrzennych układów ścianowych z nadprożami i sztywnymi belkami znajdującymi się na szczycie budynku przy wykorzystaniu teorii Własowa dla prętów cienkościennych i metody ciągłych połączeń. Emsen ze współautorami [8] analizował przestrzenny układ z jednym pionowym pasmem nadproży i kilkoma sztywnymi belkami.

Celem obecnej pracy jest prezentacja metody analizy przestrzennych ścianowych konstrukcji usztywniających z dowolnymi liczbami pionowych pasm nadproży i sztywnych belek, przy wykorzystaniu pewnego wariantu metody ciągłych połączeń, opracowanego dla konstrukcji usztywniających o zmiennej wzdłuż wysokości sztywności [13].

2. Metoda analizy

Przedstawiona metoda analizy wykorzystuje następujące główne założenia:

1. Płyty stropowe są przeponami o nieskończonej sztywności w swoich płaszczyznach.
2. Sztywność płyt stropowych z płaszczyzny może być modelowana przy wykorzystaniu dodatkowych odpowiednio dobranych nadproży.

3. Do opisu skręcania poszczególnych elementów usztywniających (pojedynczych ścian lub ich grup połączonych złączami niepodatnymi) może być wykorzystana teoria Własowa dla belek cienkościennych o przekroju otwartym.

Sformułowanie równań opisujących pracę modelu ciągłego przestrzennej ścianowej konstrukcji usztywniającej o stałej sztywności zostało podane między innymi w pracach [2, 12].

Konstrukcja, której przekrój zmienia się wzdłuż wysokości, może zostać podzielona na n_h segmentów, na długości których konstrukcja ma stały przekrój. Równania różniczkowe opisujące pracę k -tego segmentu można przedstawić w następującej postaci [13]:

$$\mathbf{B} \mathbf{n}_N''(z) = \mathbf{A} \mathbf{n}_N(z) + \mathbf{f}(z), \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_G'''(z) = \mathbf{V}_T \mathbf{t}_K(z) - \mathbf{V}_N \mathbf{n}_N(z) - \mathbf{V}_R \mathbf{n}_R(z). \quad (2)$$

W równaniach zastosowano następujące oznaczenia: $z \in (h_{k-1}, h_k)$, h_k jest rzędną górnej płaszczyzny k -tego segmentu o stałym przekroju poprzecznym; n_h jest liczbą segmentów o stałym przekroju ($k = 1, \dots, n_h$); n_w jest liczbą pionowych pasm łączących (tzn. pasm nadproży i pasm złączy podatnych); n_e jest liczbą elementów usztywniających (płaskich lub przestrzennych); n_v jest liczbą pionowych obciążeń; \mathbf{B} jest $n_w \times n_w$ diagonalną macierzą, zawierającą podatności C ciągłych połączeń zastępujących pasma nadproży i złączy podatnych, dla pasm nadproży wyliczanych z następującej zależności:

$$C = (l^3 / 12EJ_b + 1, 2l / GA_b) h, \quad (3)$$

gdzie l , J_b , A_b oznaczają długości nadproży, momenty bezwładności oraz powierzchnie przekrojów poprzecznych nadproży, a h wysokość kondygnacji; $\mathbf{n}_N(z)$ jest wektorem zawierającym nieznanne funkcje intensywności sił ścinających w ciągłych połączeniach modelujących pasma nadproży i złączy podatnych; $\mathbf{f}(z)$ jest wektorem zbudowanym na podstawie zadanych obciążeń poziomych; $\mathbf{n}_R(z)$ jest wektorem zawierającym zadane funkcje obciążeń pionowych; $\mathbf{t}_K(z)$ jest znanym wektorem funkcji sił poprzecznych i momentów skręcających wynikającym z działania na budynek obciążeń poziomych: $\mathbf{t}_K(z) = \text{col} [t_X(z), t_Y(z), m_S(z)]$ oraz $\mathbf{v}_G(z)$ jest wektorem zawierającym poszukiwane funkcje przemieszczeń poziomych budynku mierzone w globalnym układzie współrzędnych OXYZ: $\mathbf{v}_G(z) = \text{col} [v_X(z), v_Y(z), \varphi(z)]$.

Macierze i wektory występujące w równaniach (1), (2) są opisane następującymi zależnościami [13]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_E^T \mathbf{K}_S \mathbf{S}_E - \mathbf{C}_N^T \mathbf{L} \mathbf{V}_N, \quad (4a)$$

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{F}_R \mathbf{n}_R(z) + \mathbf{F}_T \mathbf{t}_K(z), \quad (4b)$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{S}_E^T \mathbf{K}_S \mathbf{S}_R - \mathbf{C}_N^T \mathbf{L} \mathbf{V}_R, \quad \mathbf{F}_T = \mathbf{C}_N^T \mathbf{L} \mathbf{V}_T, \quad (4c)$$

$$\mathbf{V}_T = (\mathbf{L}^T \mathbf{K}_Z \mathbf{L})^{-1}, \quad \mathbf{V}_N = \mathbf{V}_T \mathbf{L}^T \mathbf{C}_N, \quad \mathbf{V}_R = \mathbf{V}_T \mathbf{L}^T \mathbf{C}_R, \quad (4d)$$

gdzie: \mathbf{S}_E $n_e \times n_w$ — macierz boolowska, opisująca przyleganie elementów usztywniających i ciągłych połączeń;
 \mathbf{K}_S $n_e \times n_e$ — macierz diagonalna, zawierająca sztywności na ściskanie i rozciąganie poszczególnych pionowych elementów usztywniających, $\mathbf{K}_S = \text{diag}(1/EA_i)$;
 \mathbf{K}_Z $3n_e \times 3n_e$ — macierz zawierająca sztywności na zginanie poszczególnych elementów usztywniających w ich lokalnych układach współrzędnych, tj. w układach głównych osi bezwładności elementów usztywniających, $\mathbf{K}_Z = \text{diag}(-EJ_{y1}, \dots, -EJ_{x1}, \dots, -EJ_{\omega1}, \dots)$;
 \mathbf{C}_N $3n_e \times n_w$ — macierz zawierająca współrzędne punktów przegięcia odkształconych osi nadproży w lokalnych układach współrzędnych $\mathbf{C}_N = (\mathbf{C}_{Nx}, \mathbf{C}_{Ny}, \mathbf{C}_{N\omega})^T$;
 \mathbf{L} $3n_e \times 3$ — macierz transformacji globalnego układu współrzędnych OXYZ do lokalnych układów współrzędnych elementów usztywniających;
 \mathbf{S}_R $n_e \times n_v$ — macierz boolowska wskazująca przynależność obciążeń pionowych do elementów usztywniających;
 \mathbf{C}_R $3n_e \times n_v$ — macierz zawierająca współrzędne punktów przyłożenia obciążeń pionowych.

Warunki brzegowe dla równań (1) i (2) w utwierdzeniu i na szczycie konstrukcji usztywniającej mają następującą postać:

$$\mathbf{n}_{N(1)}(0) = -\mathbf{B}_{(1)}^{-1} \mathbf{S}_E^T \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{n}'_{N(nh)}(H) = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_{G(1)}(0) = 0, \quad \mathbf{v}'_{G(1)}(0) = 0, \quad \mathbf{v}''_{G(nh)}(H) = 0, \quad (6)$$

gdzie \mathbf{z}_0 jest wektorem zawierającym pionowe osiadania elementów usztywniających, a H jest wysokością konstrukcji.

Warunki brzegowe dla nieznanymi funkcji $\mathbf{n}_N(z)$ na brzegu segmentów o indeksach k i $(k + 1)$ zostały wyprowadzone na podstawie rozważenia zgodności przemieszczeń w środkowym punkcie nadproży w następującej postaci:

$$\mathbf{n}_{N(k)}(h_k) = \mathbf{B}_{(k)}^{-1} \mathbf{B}_{(k+1)} \mathbf{n}_{N(k+1)}(h_k). \quad (7)$$

Udoskonalone warunki brzegowe dla pierwszych pochodnych funkcji intensywności sił tnących w ciągłych połączeniach $\mathbf{n}_N(z)$ na powierzchniach, w których występują skokowe zmiany przekroju poprzecznego elementów usztywniających, zostały wyprowadzone na podstawie równania równowagi sił normalnych i momentów zginających, w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{N(k)}(h_k) = & \mathbf{B}_{(k)}^{-1} \mathbf{B}_{(k+1)} \mathbf{n}'_{N(k+1)}(h_k) + \\ & + \mathbf{B}_{(k)}^{-1} (\mathbf{C}_{N(k)}^T \mathbf{L}_{(k)} \mathbf{v}''_{G(k)}(h_k) - \mathbf{C}_{N(k+1)}^T \mathbf{L}_{(k+1)} \mathbf{v}''_{G(k+1)}(h_k)) + \\ & + \mathbf{B}_{(k)}^{-1} \mathbf{S}_{E(k)}^T (\mathbf{K}_{S(k+1)} - \mathbf{K}_{S(k)}) \mathbf{n}_{E(k)}(h_k), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{n}_E(z)$ jest wektorem zawierającym siły normalne w elementach usztywniających.

Założono, że środki nadproży w poszczególnych segmentach leżą na jednej pionowej prostej. Wyprowadzenie warunków brzegowych (7), (8) przedstawiono w pracy [13].

Warunki brzegowe dla funkcji przemieszczeń poziomych $\mathbf{v}_G(z)$ na brzegu segmentów k -tego oraz $(k+1)$ -tego mogą zostać zapisane na podstawie rozpatrzenia zgodności przemieszczeń w następującej postaci:

$$\mathbf{v}_{G(k)}(h_k) = \mathbf{v}_{G(k+1)}(h_k), \quad \mathbf{v}'_{G(k)}(h_k) = \mathbf{v}'_{G(k+1)}(h_k). \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę, że środki ciężkości elementów usztywniających leżą w poszczególnych segmentach na tych samych prostych pionowych, z warunków równowagi wynika następująca zależność:

$$\mathbf{m}_{E(k)}(h_k) = \mathbf{m}_{E(k+1)}(h_k), \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{m}_E(z)$ jest wektorem momentów zginających w elementach usztywniających, wyrażonym przez następującą zależność:

$$\mathbf{m}_E(z) = \mathbf{K}_Z \mathbf{L} \mathbf{v}''_G(z). \quad (11)$$

Podstawiając równanie (11) do równania (10) i po lewostronnym przemnożeniu przez $\mathbf{V}_{T(k)} \mathbf{L}_{(k)}^T$, otrzymuje się następującą zależność:

$$\mathbf{v}''_{G(k)}(h_k) = \mathbf{S}_{V(k+1,k)} \mathbf{v}''_{G(k+1)}(h_k), \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{S}_{V(k+1,k)} = \mathbf{V}_{T(k)} \mathbf{L}_{(k)}^T \mathbf{K}_{Z(k+1)} \mathbf{L}_{(k+1)}.$$

Podczas analizy kondygnacje zawierające dodatkowe sztywne belki są uwzględniane jako segmenty o stałej sztywności.

3. Metoda rozwiązania

W proponowanej metodzie algorytm rozwiązywania układów równań różniczkowych, zastosowany dla układów usztywniających o stałym przekroju poprzecznym [12], został rozszerzony w celu umożliwienia realizacji obliczeń konstrukcji o zmiennym przekroju.

W celu rozdzielenia układów równań różniczkowych (1) wprowadzono pomocnicze funkcje $\mathbf{g}_{(k)}(z)$ w następującej postaci:

$$\mathbf{n}_{\mathbf{N}(k)}(z) = \mathbf{B}_{(k)}^{-1/2} \mathbf{Y}_{(k)} \mathbf{g}_{(k)}(z), \quad (13)$$

gdzie $\mathbf{Y}_{(k)}$ jest macierzą, której kolumny są wektorami własnymi macierzy symetrycznej

$$\mathbf{P}_{(k)} = \mathbf{B}_{(k)}^{-1/2} \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{B}_{(k)}^{-1/2}.$$

W konsekwencji otrzymano dla k -tego segmentu n_w równań różniczkowych drugiego rzędu w następującej postaci:

$$\begin{aligned} z \in (h_{k-1}, h_k) & \quad \mathbf{g}_{i(k)}''(z) - \lambda_{i(k)} \mathbf{g}_{i(k)}(z) = F_{Bi(k)}(z) \\ F_{Bi(k)}(z) & = \mathbf{Y}_{i(k)}^T \mathbf{B}_{(k)}^{-1/2} \mathbf{f}_{(k)}(z), \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $\lambda_{i(k)}$ jest i -tą wartością własną macierzy $\mathbf{P}_{(k)}$, a $\mathbf{Y}_{i(k)}$ jest odpowiadającym jej wektorem własnym.

W obliczeniach wykorzystano postać wielomianową funkcji $\mathbf{f}_{(k)}(z)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(k)}(z) & = \mathbf{F}_{(k)} \mathbf{w}_S(z), \quad F_{Bi(k)}(z) = \mathbf{f}_{Bi(k)} \mathbf{w}_S(z), \\ \mathbf{w}_S(z) & = \text{col}(z^0, \dots, z^{(s-1)}). \end{aligned} \quad (15)$$

W celu aproksymacji funkcji obciążeń wielomianami ortogonalnymi wykorzystano algorytm najmniejszych kwadratów.

Wartości własne oraz wektory własne macierzy symetrycznej $\mathbf{P}_{(k)}$ są wyznaczone przez zestaw podprogramów realizujących trójdiagonalizację Householdera i algorytm QL, które były włączone do zbioru [14] i później zapisane w języku Pascal. Macierz \mathbf{A} jest dodatnio półokreślona, stąd macierz \mathbf{P} może mieć także wartości własne zerowe.

Rozwiązania rozdzielonych równań różniczkowych (14), odpowiadających zerowym wartościom własnym, mają następującą postać:

$$g_{i(k)}(z) = \mathbf{f}_{\mathbf{Bi}(k)} \operatorname{col}(z^2 / 2, z^3 / 6, \dots, z^{(s+1)} / (s(s+1))) + C_{1i(k)} z + C_{2i(k)}. \quad (16)$$

Postać rozwiązań odpowiadających niezerowym wartościom własnym λ_i jest następująca:

$$g_{i(k)}(z) = C_{1i(k)} e^{\sqrt{\lambda_{i(k)}} z} + C_{2i(k)} e^{-\sqrt{\lambda_{i(k)}} z} + \mathbf{r}_{\mathbf{Si}(k)} \mathbf{w}_s(z), \quad (17)$$

gdzie $C_{1i(k)}$, $C_{2i(k)}$ są stałymi całkowania oraz $\mathbf{r}_{\mathbf{Si}(k)}$ są współczynnikami rozwiązań szczególnych, wyznaczanymi metodą współczynników nieoznaczonych.

Wprowadzając rozwiązania rozdzielonych równań różniczkowych do zależności (13), a następnie uwzględniając warunki brzegowe, opisane równaniami (5), (7) i (8), otrzymuje się układ $2n_h n_w$ liniowych równań algebraicznych dla wyznaczenia wszystkich stałych całkowania w postaci:

$$\mathbf{R}_w \mathbf{c} = \mathbf{p}_s, \quad (18)$$

gdzie \mathbf{R}_w jest macierzą niesymetryczną, a \mathbf{p}_s jest wektorem zależnym od obciążeń. Wektor \mathbf{c} zawiera kolejno, odpowiednio dla każdego segmentu: stałe całkowania C_1 odpowiadające zerowym i niezerowym wartościom własnym, a następnie stałe całkowania C_2 odpowiadające zerowym i niezerowym wartościom własnym. Rozwiązania są obliczane przy wykorzystaniu procedur, realizujących rozkład LU zaczerpniętych ze zbioru [14], gdzie \mathbf{L} jest macierzą dolną trójkątną, a \mathbf{U} jest macierzą górną trójkątną.

Po wyznaczeniu stałych całkowania \mathbf{c} , wartości niewiadomych funkcji intensywności sił ścinających w ciągłych połączeniach dla każdego segmentu są obliczane w zadanej liczbie punktów. Na ich podstawie wyznacza się przez interpolację postacie wielomianowe poszukiwanych funkcji intensywności sił ścinających w ciągłych połączeniach $\mathbf{n}_N(z)$. Umożliwia to ich proste różniczkowanie i całkowanie oraz pozwala na łatwe wyliczanie końcowych rozwiązań na dowolnych, zadanych przez użytkownika programu, rzędnych wysokości konstrukcji usztywniającej.

Następnym krokiem obliczeń jest wyznaczenie funkcji przemieszczeń poziomych $\mathbf{v}_G(z)$ oraz ich pochodnych niezbędnych do wyliczenia sił przekrojowych i naprężeń, przy wykorzystaniu równania (2) z warunkami brzegowymi (6), (9), (12).

Udoskonalone warunki brzegowe dla pochodnych funkcji intensywności sił ścinających $\mathbf{n}_N'(z)$, dane równaniami (8), są spełniane na drodze iteracyjnej. Dla otrzymania pierwszego przybliżenia zakłada się, że ostatnie dwa człony równania (8) są równe zeru. Na podstawie tej analizy mogą być wyznaczone wartości pochodnych funkcji przemieszczeń $\mathbf{v}_G''(k)(h_k)$, $\mathbf{v}_G''(k+1)(h_k)$ oraz sił normalnych

$\mathbf{n}_{E(k)}(h_k)$ na brzegach segmentów i wówczas, zgodnie z równaniem (8), otrzymuje się poprawione wartości prawych stron \mathbf{p}_S równań (18). Iteracje są powtarzane aż do osiągnięcia rozwiązań funkcji przemieszczeń globalnych konstrukcji $\mathbf{v}_G(H)$ z odpowiednią zbieżnością. Rozwiązania są zwykle zbieżne z dokładnością czterech cyfr znaczących po około 5-10 iteracjach. Pomimo tego że dla wyznaczenia rozwiązań wymagane są iteracje, obliczenia są bardzo szybkie.

Na podstawie opisanego algorytmu zostało przygotowane oprogramowanie w języku Object Pascal w środowisku Delphi 5, włączone następnie do pakietu programów przeznaczonego dla analiz ścianowych konstrukcji usztywniających budynki wysokie [12, 13].

4. Przykłady obliczeniowe

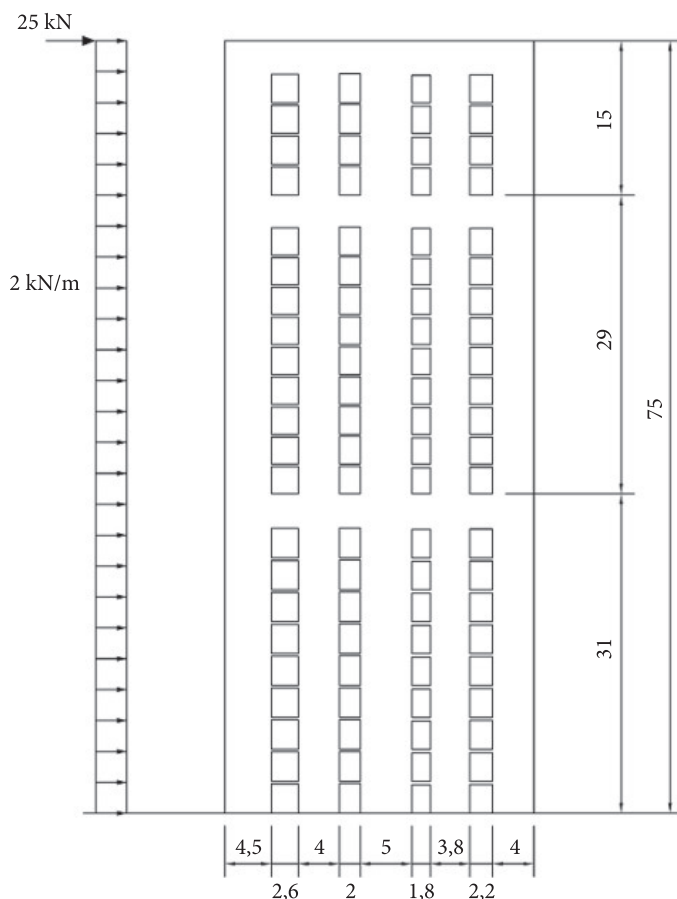
Poniżej przedstawiono kilka przykładów ilustrujących zakres zastosowania oraz dokładność i możliwości proponowanej metody.

4.1. Przykład 1: Płaska ściana usztywniająca z czterema rzędami otworów i trzema belkami usztywniającymi [Bikce i in., 2004]

Pierwszym przykładem jest ściana płaska z wieloma pasmami nadproży, usztywniona trzema belkami (rys. 1), analizowana poprzednio w pracy Bikce i in. [1] przy wykorzystaniu metody ciągłych połączeń (CCM) oraz programu SAP2000. Wartości liczbowe dla 25-kondygnacyjnej konstrukcji o wysokości 75 m są następujące, dla kolejnych segmentów, rozpoczynając od podstawy: grubości ścian 0,30 m, 0,25 m, 0,20 m; wysokości kondygnacji 3,1 m, 2,9 m, 3,0 m, wysokości sztywnych belek: 2,85; 2,65; 2,75 m. Wysokości nadproży, od lewego do prawego rzędu otworów, wynoszą odpowiednio: 0,25 m, 0,20 m, 0,35 m, 0,30 m. Moduł sprężystości wynosi $E = 28,76$ GPa [1]. Założono utwierdzenie konstrukcji w fundamencie.

W tabeli 1 przedstawiono wartości sił normalnych w elementach usztywniających na poziomie utwierdzenia konstrukcji w fundamencie oraz przemieszczenia poziome szczytu konstrukcji. Dwie pierwsze kolumny zawierają wyniki otrzymane przez Bikce z współautorami i przedstawione w pracy [1]; pierwsza przy wykorzystaniu metody ciągłych połączeń (CCM) oraz druga przy wykorzystaniu programu SAP2000. W kolumnie trzeciej zestawiono wyniki na podstawie przedstawionego algorytmu, przy przyjęciu współczynnika Poissona o wartości $\nu = 0,2$.

Można zauważyć zadowalającą zgodność pomiędzy wynikami obecnej analizy, uzyskanymi metodą ciągłych połączeń, oraz wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu programu SAP2000, podanymi w pracy [1]. W przedstawionym przykładzie wprowadzenie sztywnych belek spowodowało zmniejszenie maksymalnych przemieszczeń na szczycie o 67% oraz zredukowanie naprężeń u podstawy o 29%.



Rys. 1. Przykład 1: Płaska ściana usztywniająca z czterema rzędami otworów i trzema belkami usztywniającymi [1]

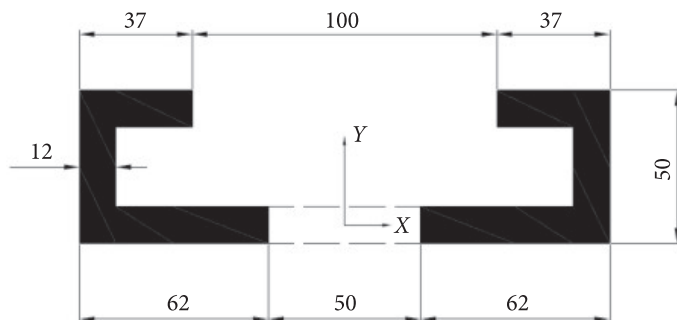
TABELA 1

Przykład 1: Płaska ściana usztywniająca z czterema rzędami otworów i trzema belkami usztywniającymi — siły normalne w utwierdzeniu i przemieszczenia szczytu konstrukcji

Siły normalne i przemieszczenie	Metoda analizy		
	Bikce i in. [1] CCM	SAP2000 [1]	Obecna analiza CCM
$N_{e1}(0)$ [kN]	172,4	174,1	172,6
$N_{e2}(0)$ [kN]	70,9	71,8	71,3
$N_{e3}(0)$ [kN]	37,1	35,8	36,5
$N_{e4}(0)$ [kN]	-109,7	-108,7	-104,1
$N_{e5}(0)$ [kN]	-172,2	-172,9	-176,3
$v_x(H)$ [mm]	2,22	2,21	2,16

4.2. Przykład 2: Przestrzenne elementy usztywniające z jedną sztywną belką na szczycie konstrukcji [Coull i Low, 1979]

W celu sprawdzenia poprawności zastosowanej metody przeanalizowano przestrzenne elementy usztywniające połączone pasmem nadproży oraz dodatkową sztywną belką na szczycie, badane poprzednio w pracy Coulla i Lowa [7] (model 4). W pracy [7] przedstawiono rozwiązania teoretyczne na bazie teorii Własowa i metody ciągłych połączeń oraz wyniki badań doświadczalnych dla modeli wykonanych z plexiglasu o grubości 12 mm. Model miał 18 kondygnacji o wysokości 25 mm, a wysokość nadproży była równa 6 mm. Belka usztywniająca na szczycie składała się z dwóch stalowych ceowników o wymiarach $25,4 \times 10 \times 2,64$ mm, przykręconych po obu stronach środka [7]. Na rysunku 2 przedstawiono przekrój analizowanego modelu.

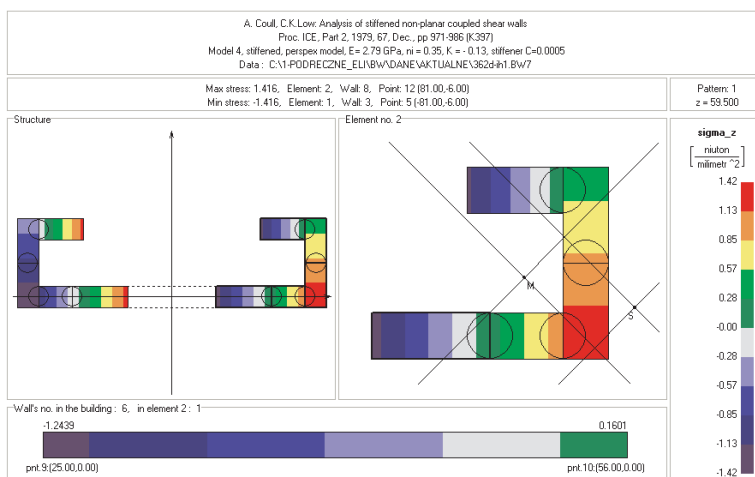


Rys. 2. Przykład 2: Model z plexiglasu przestrzennego układu usztywniającego [7]

Równomiernie rozłożone obciążenie poprzeczne $q_x = 1$ N/mm było przyłożone w płaszczyźnie środka (w kierunku osi X). Pomierzono odkształcenia podłużne przy wykorzystaniu tensometrów elektrooporowych, rozmieszczonych w 16 punktach na wysokości $z = 59,5$ mm.

Na rysunku 3 przedstawiono otrzymany z obliczeń rozkład naprężeń normalnych od obciążenia działającego w płaszczyźnie środka dla modelu z jedną sztywną belką na szczycie. Uzyskano rozsądną zgodność wyników z doświadczalnym rozkładem naprężeń, pokazanym w pracy Coulla [7], zarówno z jak i bez sztywnej belki na szczycie konstrukcji.

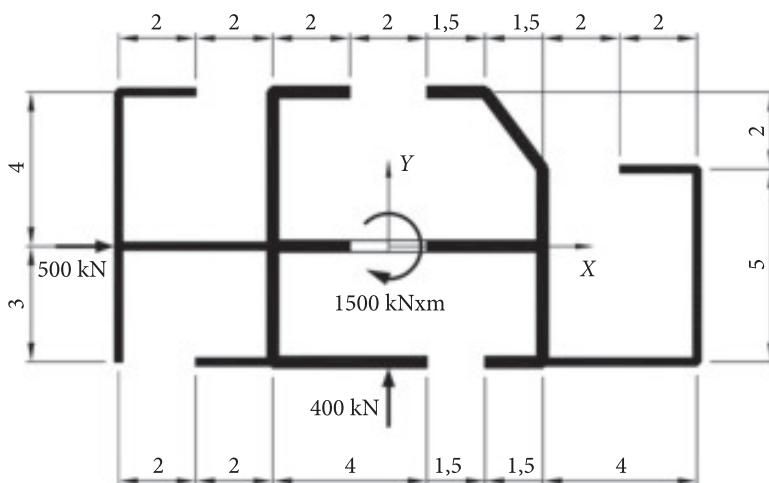
W tym przypadku sztywna belka na szczycie spowodowała zredukowanie przemieszczeń wierzchołka v_x o 36%, a naprężeń normalnych o 14%.



Rys. 3. Przykład 2: Rozkład naprężeń normalnych na rzędnej $z = 59,5$ mm w przestrzennych elementach usztywniających z jedną sztywną belką na szczycie

4.3. Przykład 3: Przestrzenny niesymetryczny układ usztywniający z czterema sztywnymi belkami [Emsen i in., 2009]

Przestrzenny niesymetryczny układ usztywniający z jednym pasmem nadproży i czterema sztywnymi belkami (rys. 4) był analizowany poprzednio w pracy Emsena i in. [8] przy wykorzystaniu metody ciągłych połączeń oraz programu SAP2000. Całkowita wysokość konstrukcji wynosi 72 m, wysokość kondygnacji jest równa

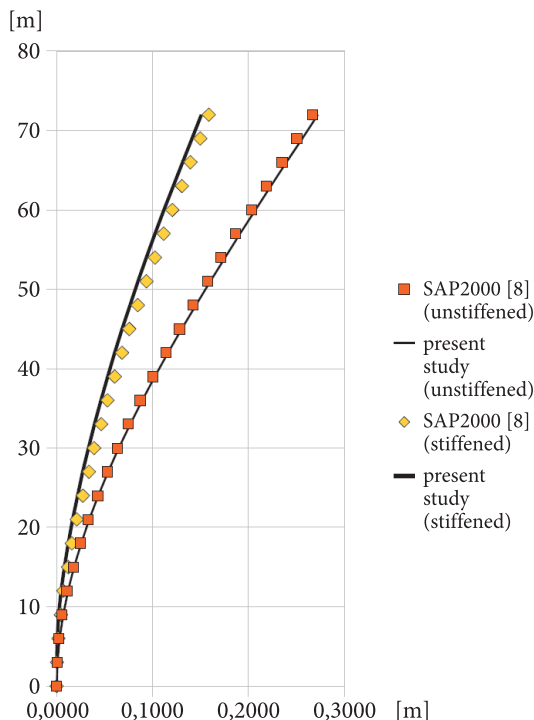


Rys. 4. Przykład 3: Przestrzenny niesymetryczny ścianowy układ usztywniający z czterema sztywnymi belkami [8]

3 m, a wysokość nadproża 0,4 m. Trzy sztywne belki o wysokości 3 m są umieszczone na poziomie 9., 13. oraz 17. kondygnacji, a ostatnia, o wysokości 2 m, na szczycie budynku. Grubości ścian w części centralnej są równe 0,3 m, a w częściach zewnętrznych, lewej i prawej, 0,2 m. Moduły sprężystości, podłużny i poprzeczny, podane w pracy [8], są równe odpowiednio $E = 2,85$ GPa i $G = 1,056$ GPa.

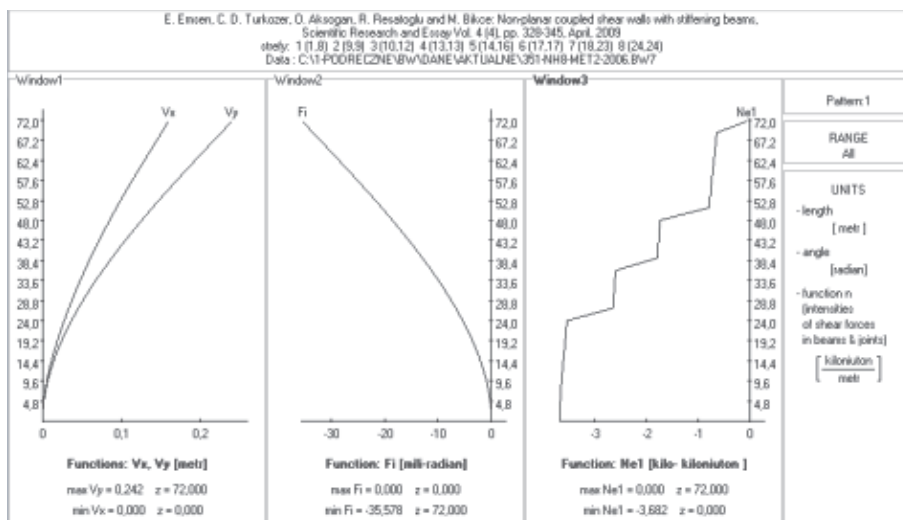
Obciążeniami układu są siły poziome $P_x = 500$ kN, $P_y = 400$ kN i moment skręcający $M_S = -1500$ kN m przyłożone na szczycie konstrukcji usztywniającej.

Na rysunku 5 zestawiono dla porównania przemieszczenia poziome v_x punktów konstrukcji znajdujących się na pionowej osi Z , wyznaczone opisaną metodą ciągłych połączeń (CCM) z podanymi w pracy [8], otrzymanymi przy wykorzystaniu programu dla analizy konstrukcji SAP2000 dla modelu ramowego, obliczonymi dla konstrukcji usztywniających zawierających sztywne belki (*stiffened*) i bez nich (*unstiffened*). Można zauważyć dobrą zgodność wyników.

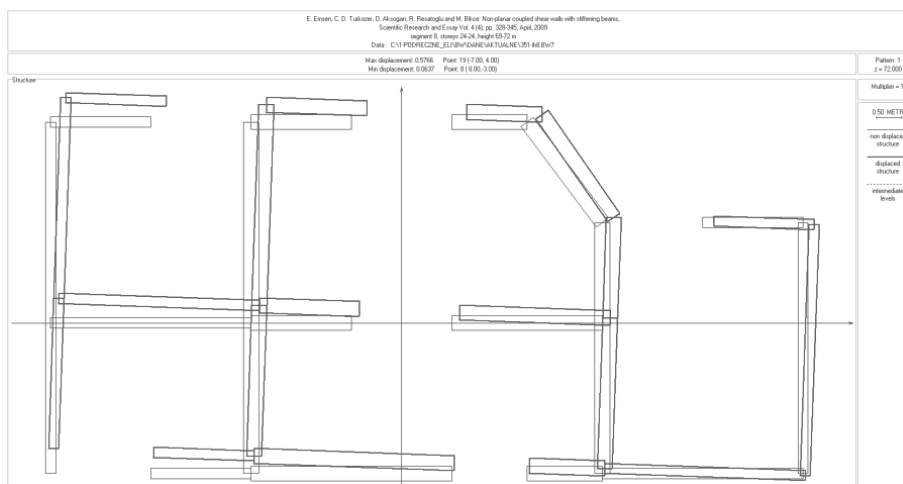


Rys. 5. Przykład 3: Porównanie przemieszczeń poziomych w kierunku x dla przypadku usztywnionej oraz nieusztywnionej konstrukcji

Rysunek 6 zawiera wykresy poziomych przemieszczeń liniowych i kątów obrotu konstrukcji oraz siły normalnej w elemencie usztywniającym nr 1. Na rysunku 7 pokazany jest widok przemieszczonych ścian na szczycie konstrukcji (linia gruba) na tle rzutu konstrukcji w poziomie utwierdzenia (linia cienka).



Rys. 6. Przykład 3: Wykresy poziomych przemieszczeń liniowych i kątów obrotu oraz siły normalnej w elemencie 1 usztywnionej konstrukcji



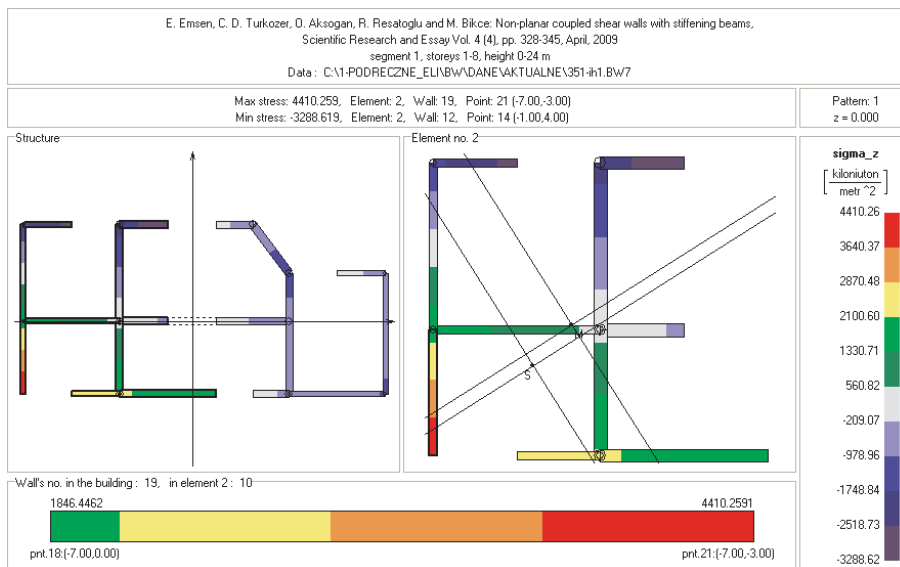
Rys. 7. Przykład 3: Widok przemieszczonych ścian na szczycie usztywnionej konstrukcji przestrzennej (linia gruba) na tle konstrukcji w poziomie utwierdzenia (linia cienka)

W przedstawionym przykładzie zastosowanie sztywnych belek redukuje maksymalne przemieszczenia konstrukcji v_x na jej szczycie o 41%, przemieszczenia v_y i kąt obrotu ϕ o 9% i maksymalne naprężenia normalne u podstawy konstrukcji o 12%.

Dalsze przeprowadzone analizy pokazały, że wprowadzenie w konstrukcji bez belek sztywnych dwóch dodatkowych pionowych pasm nadproży pomiędzy zewnętrznymi ścianami w części centralnej konstrukcji spowodowało znaczący

wzrost sztywności całego układu usztywniającego na skręcanie. Wyniki obliczeń dla nadproży o wysokości 0,4 m wykazały redukcję przemieszczeń v_x o 24%, kątów obrotu o 77% i maksymalnych naprężeń normalnych o 25%.

Rozkład naprężeń normalnych w miejscu utwierdzenia usztywnionej konstrukcji ścianowej w fundamencie, otrzymany przy wykorzystaniu zaprezentowanej metody, przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 8. Przykład 3: Rozkład naprężeń normalnych w utwierdzeniu usztywnionej konstrukcji ścianowej

4.4. Przykład 4: Przestrzenny niesymetryczny układ usztywniający zrealizowanego budynku

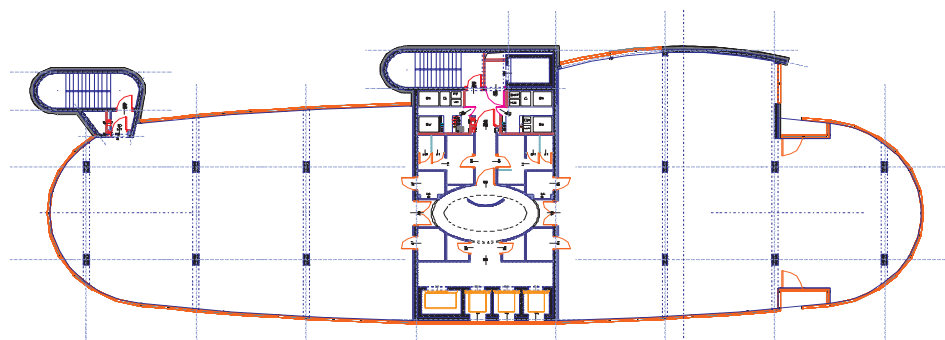
Analizowany 15-kondygnacyjny budynek o wysokości 61 m, przedstawiony na rysunku 9, został zaprojektowany dla Poznańskiej Grupy Kapitałowej i zrealizowany na terenie Poznania. Rzut typowej kondygnacji budynku pokazano na rysunku 10.

Pewną trudność stanowiło właściwe zaprojektowanie konstrukcji usztywniającej dla budynku zawierającego powierzchnie biurowe nieograniczone ścianami i słupami, a jednocześnie dobrze doświetlone. Rzut ostatecznie zrealizowanej konstrukcji żelbetowej, zawierającej 12 pasm nadproży, wraz z rozkładem przemieszczeń poziomych na szczycie budynku na skutek parcia wiatru w kierunku osi X, przedstawiono na rysunku 11.

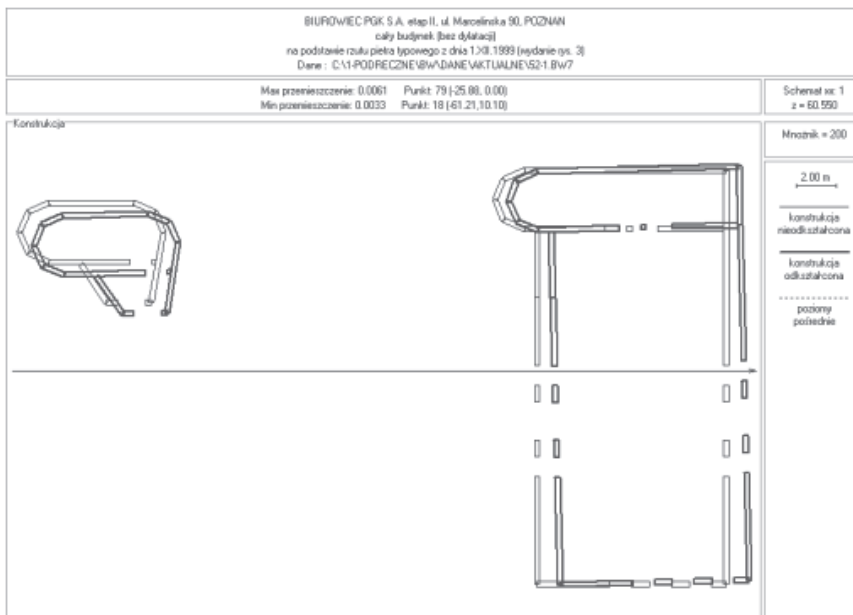
W celu zilustrowania możliwości zastosowania przedstawionej metody wprowadzono do analizowanej konstrukcji sztywne belki, zastępując na wysokości siódmej



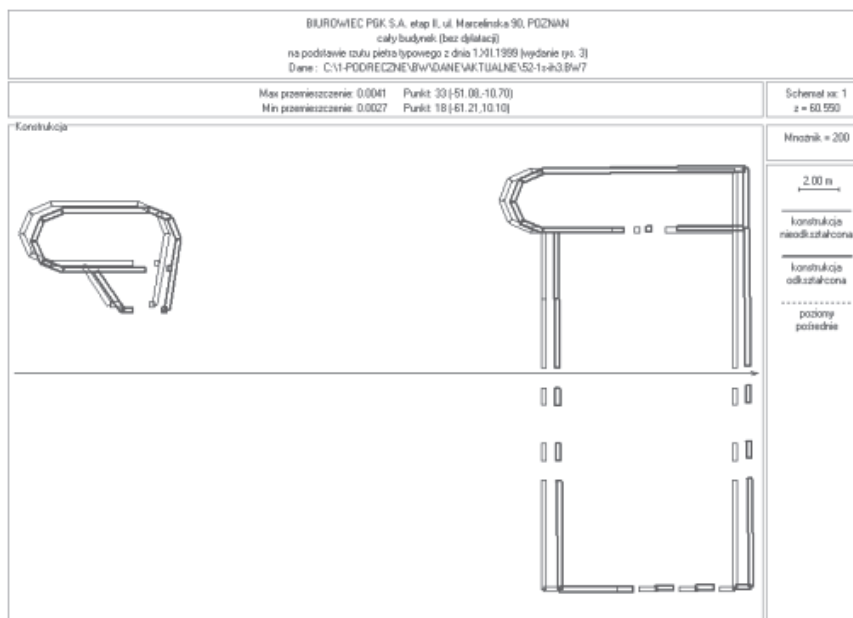
Rys. 9. Przykład 4: Widok budynku od południowego zachodu



Rys. 10. Przykład 4: Rzut typowej kondygnacji budynku



Rys. 11. Przykład 4: Przesunięcia poziome na szczycie zrealizowanej konstrukcji od parcia wiatru w kierunku osi X

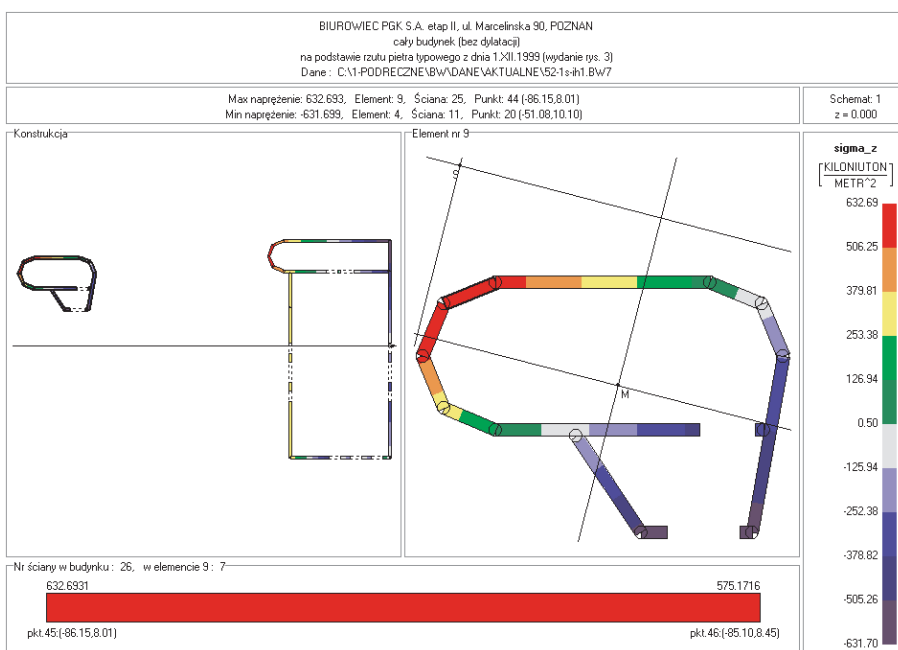


Rys. 12. Przykład 4: Przesunięcia poziome na szczycie konstrukcji usztywnionej belkami na skutek parcia wiatru w kierunku osi X

kondygnacji pięć nadproży (o numerach 2, 6, 10, 11, 12) ścianami o wysokości 4,2 m, odpowiadającej wysokości kondygnacji. Model obliczeniowy budynku podzielono na trzy segmenty o stałej sztywności:

- segment 1 zawierający typowe kondygnacje od 1 do 6,
- segment 2 zawierający kondygnację 7 ze sztywnymi belkami,
- segment 3 zawierający typowe kondygnacje od 8 do 15.

Na rysunku 12 pokazano przemieszczenia poziome na szczycie tak usztywnionej konstrukcji, spowodowane parciem wiatru w kierunku osi X. Widoczne jest, że maksymalne przemieszczenia zmniejszyły się o 33%. Odpowiadające im maksymalne naprężenia normalne u podstawy (rys. 13) uległy przy tym zredukowaniu o 18%.



Rys. 13. Przykład 4: Rozkład naprężeń normalnych u podstawy usztywnionej konstrukcji na skutek parcia wiatru w kierunku osi X

Można zauważyć, że zastosowanie belek sztywnych, np. na kondygnacjach technicznych, może pozwolić na zwiększenie całkowitej wysokości budynku.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono analizę przestrzennych, niesymetrycznych ścianowych konstrukcji usztywniających z dowolną liczbą pasm nadproży oraz dowolną liczbą

sztywnych belek, w której wykorzystano pewien wariant metody ciągłych połączeń dla konstrukcji o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Do opisanej analizy włączono udokładnione warunki brzegowe dla pochodnych funkcji intensywności sił ścinających w pasmach łączących. Wyniki uzyskane przy wykorzystaniu przedstawionej metody zostały porównane z wynikami badań doświadczalnych i obliczeń metodami dyskretnymi, podanymi w literaturze, przy czym zaobserwowano ich dobrą zgodność. Przykłady numeryczne wykazały, że włączenie belek usztywniających może znacznie zmniejszyć przemieszczenia poziome konstrukcji oraz naprężenia normalne w elementach usztywniających. Proponowana metoda jest efektywna i może być bardzo przydatna, szczególnie na wstępnym etapie projektowania, kiedy potrzebne jest szybkie sprawdzenie wielu różnych konfiguracji i wymiarów konstrukcji.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2012 r.

LITERATURA

- [1] A. BIKCE, O. AKSOGAN, H.M. ARSLAN, *Stiffened multi-bay coupled shear walls on elastic foundation*, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, 28, 1, 2004, 43-51.
- [2] J.K. BISWAS, W.K. TSO, *Three-dimensional analysis of shear wall buildings to lateral load*, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, 100, ST5, 1974, 1019-1036.
- [3] H.C. CHAN, J.S. KUANG, *Stiffened coupled shear walls*, JEM, 115, 4, 1989, 689-703.
- [4] H.C. CHAN, J.S. KUANG, *Elastic design charts of stiffened coupled structural walls*, Journal of Structural Engineering, 115, 2, 1989, 247-267.
- [5] B.S. CHOO, G.Q. LI, *Structural analysis of multi-stiffened coupled shear walls on flexible foundations*, Computers & Structures, 64, 1-4, 1997, 837-848.
- [6] A. COULL, L. BENSMAIL, *Stiffened, coupled shear walls*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, 117, 8, 1991, 2205-2223.
- [7] A. COULL, C.K. LOW, *Analysis of stiffened non-planar coupled shear walls*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 67, 4, 1979, 971-986.
- [8] E. EMSEN, C.D. TURKOZER, O. AKSOGAN, R. RESATOGLU, M. BIKCE, *Non-planar coupled shear walls with stiffening beams*, Scientific Research and Essay, 4, 4, 2009, 328-345.
- [9] G.Q. LI, B.S. CHOO, *A continuous-discrete approach to the free vibration analysis of stiffened pierced walls on flexible foundations*, Int. J. Solids and Structures, 33, 2, 1996, 249-263.
- [10] W. SAVASSI, E. MANCINI, *One-dimensional finite element solution for non-uniform tall building structures and loading*, Struct. Design Tall Spec. Build. 18, 4, 2009, 441-453.
- [11] B. STAFFORD SMITH, A. COULL, *Tall Building Structures: Analysis and Design*, Wiley: New York, 1991.
- [12] J. WADOWICKI, E. WADOWICKA, *System of programs for analysis of three-dimensional shear wall structures*, The Structural Design of Tall Buildings, 2, 4, 1993, 295-305.
- [13] J. WADOWICKI, E. WADOWICKA, *Analysis of shear wall structures of variable cross section*, The Structural Design of Tall and Special Buildings, 21, 1, 2012, 1-15.
- [14] J.H. WILKINSON, C. REINSCH, *Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

J. WADOWICKI, E. WADOWICKA

Analysis of non-planar shear wall structures with stiffening beams

Abstract. The paper presents the analysis of non-planar asymmetric shear wall structures with stiffening beams. The stiff deep beams incorporated at various levels of coupled shear walls improve the stiffness of the structural system of a tall building. The analysis is based on a variant of the continuous connection method for three-dimensional shear wall structures having stepwise changes in a cross-section. In the continuous approach, the connecting beams are replaced by equivalent continuous connections. The compatibility equations have been written at the midpoints of connecting and stiffening beams. The differential equation systems for shear wall structure segments of the constant cross-section are uncoupled by orthogonal eigenvectors. The results obtained by the presented method have been compared with those obtained experimentally and analytically, given in literature, and a good match has been observed.

Keywords: computational mechanics, shear wall structures, stiffening beams, continuous connection method, tall buildings

