



Dynamiczne zachowanie się metalowego pręta ze wzmocnieniem potęgowym uderzającego w sztywną tarczę

II. Analiza mechanicznych charakterystyk wyżarzonego pręta miedzianego Cu-ETP

EDWARD WŁODARCZYK, MARCIN SARZYŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa, 00-908 Warszawa,
ul. Kaliskiego 2, edward.wlodarczyk@wat.edu.pl, marcin.sarzyński@wat.edu.pl

Streszczenie. Dokonano teoretycznej i eksperymentalnej analizy mechanicznych parametrów miedzianego (Cu-ETP) pręta uderzającego w nieodkształcalną tarczę. W tym celu przeprowadzono na kilku prętach testy Taylora z różnymi początkowymi wartościami prędkości uderzenia, zawartymi w przedziale ($60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$). Ponadto wykorzystano analityczne rozwiązanie tego problemu zamieszczone w pracy [1]. Wartości parametrów badano podczas przebiegu procesu zderzenia i po jego zakończeniu. Różnice między teoretycznymi i eksperymentalnymi wartościami badanych parametrów zmieniają się wraz ze wzrostem prędkości uderzenia, w wymienionym wyżej przedziale, od kilku do kilkunastu procent. Zatem w tym zakresie prędkości uderzenia pominięcie wpływu szybkości odkształcenia na dynamikę badanego miedzianego pręta, w celu uzyskania analitycznego rozwiązania problemu, jest dopuszczalne.

Słowa kluczowe: dynamika, dynamika pręta, obciążenie udarowe, potęgowe wzmocnienie odkształceniowe

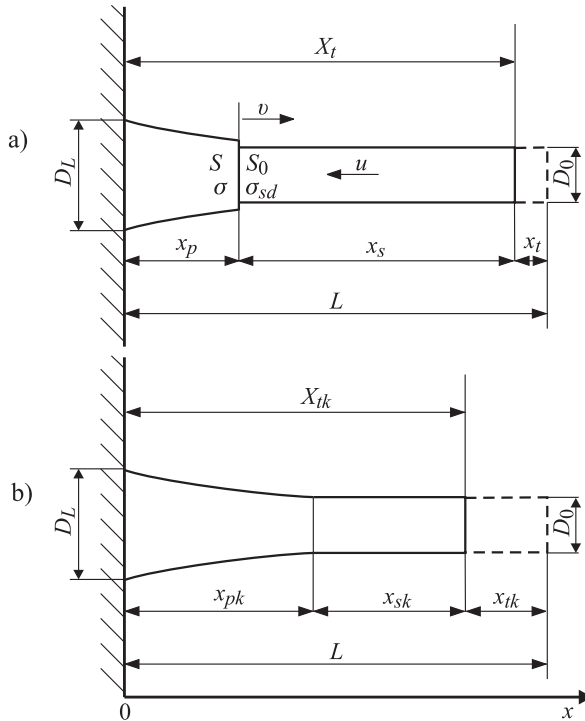
1. Wprowadzenie

Przedstawione w pierwszej części pracy [1] analityczne rozwiązanie problemu uderzeniowego testu Taylora dotyczy smukłych prętów, których materiał jest nieściśliwy, sztywno-plastyczny z potęgowym wzmocnieniem odkształceniowym. Ponadto, podobnie jak w pracach [2-5], założono, że zachowanie się materiału pręta

w strefie odkształceń plastycznych nie zależy od szybkości odkształcenia, tj. $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, gdzie σ i ε oznaczają naprężenie i odkształcenie nominalne.

Przy prostopadłym uderzeniu sztywno-plastycznego pręta w nieodkształcalną przegrodę, z dostatecznie dużą prędkością U , generuje się w nim plastyczna fala naprężenia. Fala ta przemieszcza się w pręcie względem płaszczyzny kolizji w kierunku tylnego jego końca z bezwzględną, zmienną z upływem czasu prędkością $v = v(t)$. W sztywno-plastycznym modelu materiału pręta tylna jego część o chwilowej długości $x_s(t)$, położona przed frontem fali plastycznej, jest nieodkształcona i przemieszcza się podczas procesu zderzenia w kierunku przegrody jak ciało sztywne z bezwzględną prędkością $u = u(t)$. Pozostały, odkształcony plastycznie fragment pręta, zawarty między frontem fali i sztywną przegrodą, z powodu braku odkształceń sprężystych ($\varepsilon_s = 0$) jest nieruchomy. Jednym słowem, każdy element pręta po przekroczeniu frontu fali plastycznej nagle rozszerza się w kierunku radialnym i jest w sposób momentalny wyhamowany za jej frontem do prędkości zerowej ($u = 0$).

Opisany wyżej fizyczny model dynamiki deformacji pręta podczas procesu zderzenia, na którym oparto konstrukcję rozwiązania problemu, pokazany jest schematycznie na rysunku 1.



Rys. 1. Postacie deformacji sztywno-plastycznego pręta: a) podczas procesu zderzenia; b) po zakończeniu procesu zderzenia

Dla uzupełnienia jakościowego opisu fizycznego modelu rozwiązanego w [1] problemu, oznaczono literami S i σ odpowiednio: pole przekroju poprzecznego pręta i naprężenie nominalne występujące w nim tuż za frontem fali plastycznej, natomiast symbolami S_0 i σ_{sd} te same wielkości tuż przed frontem fali; ρ jest gęstością materiału pręta.

Pozostałe symbole zamieszczone na rysunku 1 oznaczają:

x_p — bieżącą długość odkształcanej plastycznie części pręta,

x_s — bieżącą długość sztywnej części pręta,

x_t — bieżące przemieszczenie swobodnego końca pręta,

X_t — bieżącą całkowitą długość pręta podczas procesu zderzenia,

D_0 — początkową średnicę pręta,

D_L — maksymalną średnicę pręta po odkształceniu,

L — początkową długość pręta,

x — współrzędną Lagrange'a.

Dodatkowy indeks k oznacza końcowe wartości wymienionych wyżej parametrów po zakończeniu procesu zderzenia (rys. 1b), np. x_{pk} jest końcową długością odkształcanej plastycznie części pręta itd.

W oparciu o teorię przedstawioną w [1] dokonano teoretycznej i eksperymentalnej analizy mechanicznych charakterystyk pręta wykonanego z wyżarzonej miedzi elektrolitycznej (Cu-ETP) i obciążonego według testu Taylora. Z porównania wyników teoretycznych i eksperymentalnych określono zakres stosowalności przedstawionej w pracy [1] teorii do praktycznych obliczeń i analiz.

2. Statyczne charakterystyki wyżarzonej miedzi Cu-ETP

Do testów Taylora stosowano pręty o długości $L = 0,048$ m i średnicy $D_0 = 0,012$ m wykonane z wyżarzonej (500°C , 1 h) miedzi elektrolitycznej Cu-ETP o następujących parametrach: gęstość $\rho = 8900$ kg/m³; moduł Younga $E = 130$ GPa; prędkość podłużnej fali sprężystej $c_0 = \sqrt{E/\rho} = 3820$ m/s; umowna statyczna granica plastyczności $\sigma_s = R_{0,2} = 84$ MPa; maksymalne umowne odkształcenie sprężyste $\varepsilon_s = (R_{0,2}/E) = 0,00065 \approx 0$; graniczna prędkość uderzenia, po przekroczeniu której następuje odkształcanie plastyczne pręta $U_g = c_0\varepsilon_s = 3820 \cdot 0,0006 = 2,3$ m/s.

Przebieg statycznej krzywej wzmocnienia wyżarzonej miedzi Cu-ETP wyznaczono w próbie spęczania próbek o wymiarach: wysokość $h_0 = 0,01$ m, średnica $d_0 = 0,01$ m. Próbkę posiadały płytkie wgłębienia na ich powierzchniach czołowych wypełnione parafiną w celu redukcji wpływu siły tarcia podczas spęczania na jednorodność rozkładu normalnego naprężenia w próbce. Naprężenie rzeczywiste określono za pomocą wzoru:

$$\sigma_R = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4Ph}{\pi d_0^2 h_0}, \quad (2.1)$$

gdzie P oznacza chwilową siłę ściszającą, d — chwilową średnicę, h — chwilową wysokość ściszanej próbki.

Logarytmiczne odkształcenie zdefiniowane jest wyrażeniami:

$$\varphi = \ln \frac{S}{S_0} = \ln \frac{d^2}{d_0^2} = 2 \ln \frac{d}{d_0} = \ln \frac{h_0}{h}. \quad (2.2)$$

Eksperymentalny statyczny związek między naprężeniem rzeczywistym σ_R i odkształceniem logarytmicznym φ aproksymowano wyrażeniem potęgowym w postaci:

$$\sigma_R - \sigma_S = C \varphi^n, \quad (2.3)$$

gdzie stałe C i n określone jako średnie wartości z kilku prób wynoszą:

$$C = 409 \text{ MPa}, \quad n = 0,36 \text{ (rys. 2)}.$$

Związek $\sigma_R - \sigma_S = 409\varphi^{0,36}$, MPa, po transformacji do układu nominalnego (inżynierskiego), $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, można przekształcić do postaci:

$$\sigma - \sigma_s = (h_0/h)(\sigma_R - \sigma_s) = \frac{409}{1-\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{0,36}, \text{ MPa}, \quad (2.4)$$

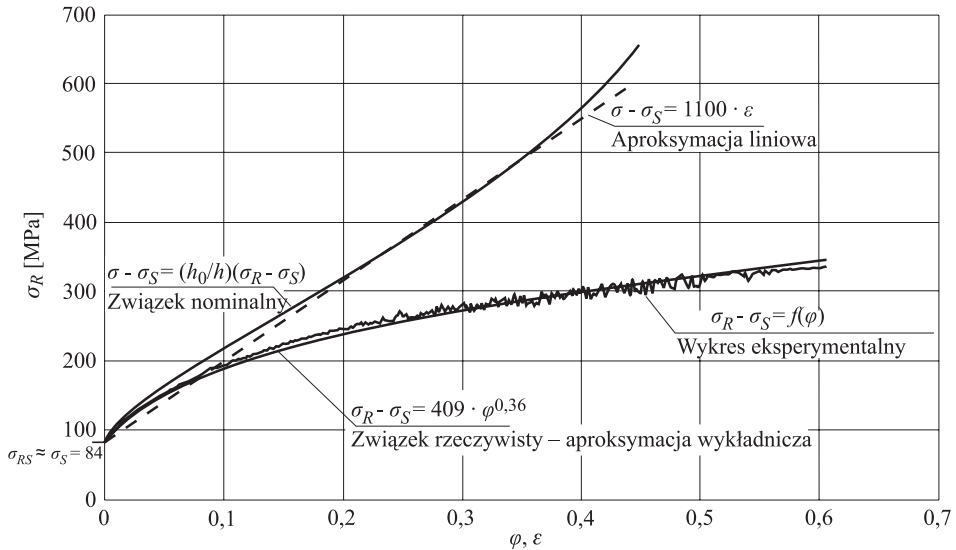
gdzie odkształcenie nominalne ε określone jest wzorem:

$$\varepsilon = 1 - \frac{S_0}{S} = 1 - \frac{h}{h_0}. \quad (2.5)$$

Okazuje się, że funkcję (2.4) dla odkształceń $\varepsilon < 0,4$ można aproksymować z dokładnością do kilku procent linią prostą (linia przerywana na rysunku 2):

$$\sigma - \sigma_s = E_w \varepsilon, \quad E_w = 1100 \text{ MPa}. \quad (2.6)$$

Mając na uwadze liniową aproksymację związku $\sigma - \varepsilon$, przytoczymy z pracy [1] analityczne rozwiązanie problemu dla wykładnika $m = 1$.



Rys. 2. Statyczne związki naprężenie–odkształcenie; w układzie rzeczywistym $\sigma_R - \varphi$ i w układzie nominalnym $\sigma - \varepsilon$

3. Rozwiązanie problemu dla liniowego związku $\sigma - \sigma_{sd} = E_w \varepsilon$

Dla $m = 1$, zgodnie z teorią przedstawioną w [1], otrzymuje się:

$$x = ct, \quad c = \sqrt{\frac{E_w}{\rho}}, \quad (3.1)$$

gdzie x jest współrzędną Lagrange'a, a przez t oznaczono czas;

$$\frac{x_s}{L} = 1 - \frac{ct}{L}; \quad (3.2)$$

$$\frac{x_l}{L} = \left(\frac{U}{c} - \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \right) \frac{ct}{L} - \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \left(1 - \frac{ct}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right); \quad (3.3)$$

$$\frac{x_p}{L} = \left(1 - \frac{U}{c} + \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \right) \frac{ct}{L} + \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \left(1 - \frac{ct}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right); \quad (3.4)$$

$$\varepsilon = \frac{u}{c} = \frac{U}{c} + \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \ln \left(1 - \frac{ct}{L} \right), \quad \varepsilon_L = \varepsilon_{\max} = \frac{U}{c}; \quad (3.5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = -\frac{\sigma_{sd}}{E_w} \frac{c}{x_s} = -\frac{\sigma_{sd}}{E_w} \frac{c}{L-ct}; \quad (3.6)$$

$$\sigma = \sigma_{sd} + E_w \varepsilon, \quad \sigma_L = \sigma_{\max} = \sigma_{sd} + E_w \frac{U}{c}; \quad (3.7)$$

$$u = c\varepsilon = U + c \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right); \quad (3.8)$$

$$v = c - u = c - U - c \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right); \quad (3.9)$$

$$u + v = c = \text{const}; \quad (3.10)$$

$$D_p = D_0 \left[1 - \frac{U}{c} - \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \ln\left(1 - \frac{ct}{L}\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad D_L = D_{p\max} = D_0 \left(1 - \frac{U}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Proces zderzenia kończy się w chwili

$$t_k = \frac{L}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_w U}{\sigma_{sd} c}\right) \right] \quad (3.12)$$

i wówczas mamy:

$$\frac{x_{sk}}{L} = \exp\left(-\frac{E_w U}{\sigma_{sd} c}\right); \quad (3.13)$$

$$\frac{x_{tk}}{L} = \frac{U}{c} - \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \left(1 - \frac{x_{sk}}{L}\right); \quad (3.14)$$

$$\frac{x_{pk}}{L} = \left(1 - \frac{x_{sk}}{L}\right) \left(1 + \frac{\sigma_{sd}}{E_w}\right) - \frac{U}{c}; \quad (3.15)$$

$$\frac{X_{tk}}{L} = 1 - \frac{x_{tk}}{L} = 1 - \frac{U}{c} + \frac{\sigma_{sd}}{E_w} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_w U}{\sigma_{sd} c}\right) \right]. \quad (3.16)$$

Dynamiczna granica plastyczności, σ_{sd} , określona jest za pomocą relacji:

$$\sigma_{sd} = \frac{E_w (U/c)}{\ln(L/x_{sk})}, \quad (3.17)$$

natomiast uproszczony wzór Taylora ma postać [3]:

$$\sigma_{sd} = \frac{(L - x_{sk})}{2(L - X_{tk})} \frac{\rho U^2}{\ln(L/x_{sk})}. \quad (3.18)$$

W oparciu o powyższe zależności (3.1)-(3.16) dokonano teoretycznych obliczeń charakterystyk pręta miedzianego (Cu-ETP) podczas procesu zderzenia i po jego zakończeniu oraz porównano je z danymi eksperymentalnymi.

4. Teoretyczna i eksperymentalna analiza parametrów prętów po zakończeniu testów Taylora

W celu otrzymania danych eksperymentalnych dla porównania z wynikami obliczeń teoretycznych uzyskanych za pomocą zamieszczonych wyżej relacji analitycznych, wykonano testy Taylora na prętach miedzianych o jednakowej długości $L = 0,048$ m i średnicy $D_0 = 0,012$ m przy kilku różnych prędkościach uderzenia. Fotografie cylindrów odkształconych plastycznie po testach Taylora pokazane są na rysunku 3.



Rys. 3. Kształty cylindrów odkształconych plastycznie po testach Taylora. Początkowe wymiary cylindrów jednakowe: długość $L = 0,048$ m, średnica $D_0 = 0,012$ m

TABELA 1

Teoretyczne i eksperymentalne dyskretne wartości wybranych parametrów prętów po zakończeniu testów Taylora dla kilku prędkości uderzenia

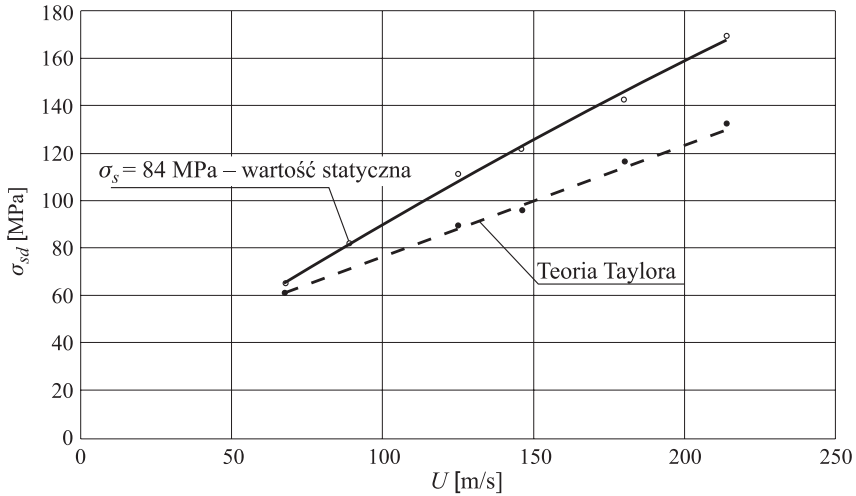
U [m/s]		68	125	146	180	214
σ_{sd} [MPa]	Praca (3.17)	65	111	122	142	169
	Taylor (3.18)	61	89	96	112	133
$t_k \cdot 10^3$ [s]		0,13200	0,13315	0,13400	0,13457	0,13458
Wartości: $\bar{x}_{sk} = x_{sk}/L$	eksperymentalne	0,03752	0,02910	0,02292	0,01877	0,01873
	teoretyczne	0,03733	0,02904	0,02325	0,01860	0,01869
$ \Delta x_{sk} $ [%]		0,5	0,2	1,5	0,9	0,2
Wartości: $\bar{X}_{tk} = X_{tk}/L$	eksperymentalne	0,901	0,790	0,744	0,682	0,622
	teoretyczne	0,863	0,741	0,691	0,613	0,539
$ \Delta \bar{X}_{tk} $ [%]		4,3	6,2	7,2	10,1	13,3
Wartości: $\bar{x}_{pk} = x_{pk}/L$	eksperymentalne	0,864	0,757	0,721	0,663	0,603
	teoretyczne	0,825	0,712	0,668	0,594	0,521
$ \Delta x_{pk} $ [%]		4,5	5,9	7,4	10,4	13,7
Wartości: D_L/D_0	eksperymentalne	1,11	1,31	1,43	1,65	1,97
	teoretyczne	1,12	1,25	1,31	1,44	1,60
$ \Delta(D_L/D_0) $ [%]		1,06	4,97	8,58	13,03	18,48
$\varepsilon_L = 1 - (D_0/D_L)^2$	eksperymentalne	0,19	0,42	0,51	0,63	0,74
$\varepsilon_L = U/c$	teoretyczne	0,19	0,36	0,42	0,51	0,61
$ \Delta \varepsilon_L $ [%]		0	13,7	17,8	19,4	17,8

Wyniki pomiarów i teoretycznych obliczeń dyskretnych wartości wybranych parametrów prętów (Cu-ETP) po testach Taylora dla kilku różnych prędkości uderzenia zamieszczono w tabeli 1. Zwróćmy uwagę na krótki czas trwania procesu zderzenia, rzędu 0,13 ms, który praktycznie nie zależy od wartości prędkości uderzenia. Wynik ten potwierdzają rezultaty badań przedstawionych w [5].

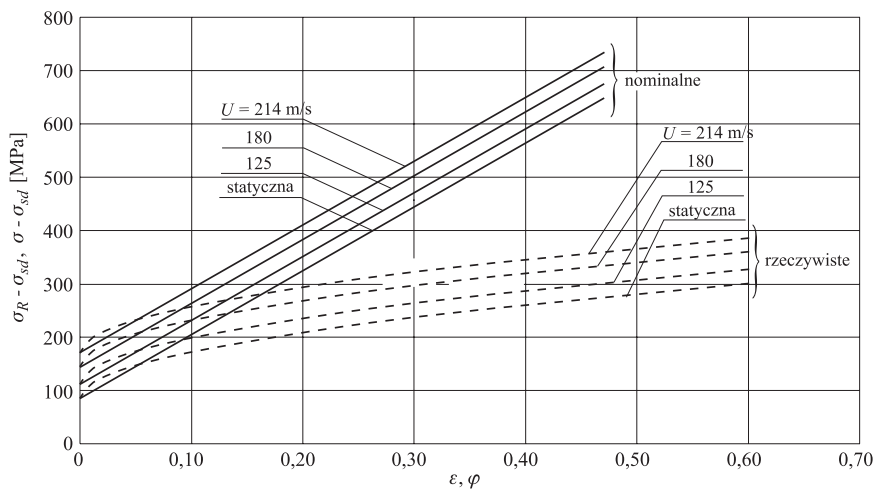
Ponadto wymienione w tabeli 1 niektóre parametry w postaci interpolowanych wykresów w funkcji ciągłej zmiany prędkości uderzenia U przedstawiono na rysunkach 4-6.

Na rysunku 4 prezentowana jest zmiana dynamicznej granicy plastyczności wyżarzanej miedzi Cu-ETP, σ_{sd} , w funkcji prędkości uderzenia, U — linia ciągła. Jak widać, granica ta rośnie w przybliżeniu liniowo wraz ze wzrostem prędkości U . W przedziale prędkości od 60 m/s do 220 m/s można ją aproksymować związkami

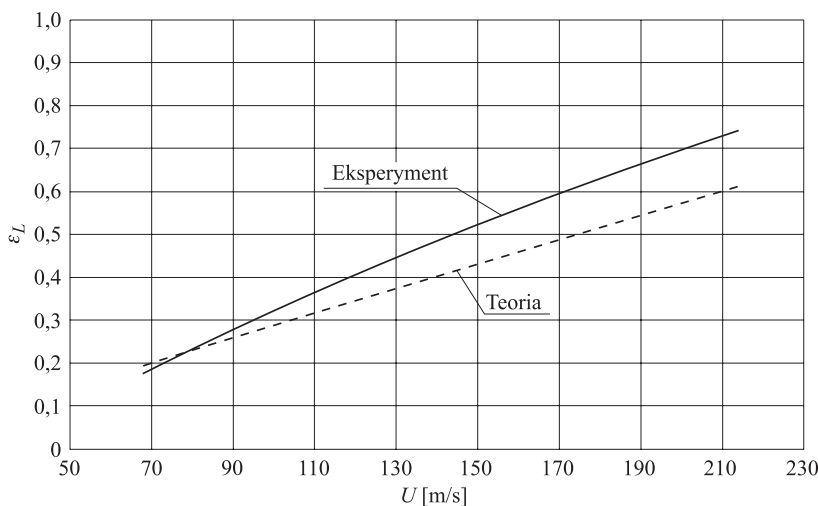
$$\sigma_{sd} = 65 + 0,712 [U, \text{m/s} - 68] \text{ MPa}. \quad (4.1)$$



Rys. 4. Zmiana dynamicznej granicy plastyczności wyżarzanej miedzi Cu-ETP, σ_{sd} , w funkcji prędkości uderzenia U określonej za pomocą wzorów (3.17) — linia ciągła i (3.18) — linia przerywana



Rys. 5. Związki $\sigma_R - \sigma_{sd} = 409\varphi^{0,36}$ MPa i $\sigma - \sigma_{sd} = 1100\varepsilon$ MPa dla wyżarzanej miedzi Cu-ETP przy kilku prędkościach uderzenia U



Rys. 6. Zmiana maksymalnego nominalnego odkształcenia pręta ε_L , teoretycznego i eksperymentalnego w funkcji prędkości uderzenia U

Istotny jest fakt, że dla prędkości uderzenia $U < 90$ m/s dynamiczna granica plastyczności wyżarzanej miedzi Cu-ETP jest mniejsza od granicy statycznej, $\sigma_{sd} < \sigma_s$. Dla porównania linią przerywaną pokazano zmianę σ_{sd} uzyskaną wg teorii Taylora — jest ona zaniżona około kilkadziesiąt procent. Przedstawione na rysunku 4 wyniki są zgodne z danymi literaturowymi [6-10].

Mając na uwadze wzrost dynamicznej granicy plastyczności, σ_{sd} , wraz ze wzrostem prędkości uderzenia, U , związki $\sigma_R - \sigma_{sd} = 409\varphi^{0,36}$, MPa i $\sigma - \sigma_{sd} = 1100\varepsilon$, MPa, bez uwzględniania wpływu na ich kształt szybkości odkształcenia, można przedstawić w postaci rodzin wykresów pokazanych na rysunku 5.

Z kolei na rysunku 6 prezentowana jest zmiana maksymalnego odkształcenia, ε_L , teoretycznego i eksperymentalnego, w funkcji prędkości uderzenia, U , uzyskanego po zakończeniu testu Taylora. Eksperymentalną wartość ε_L obliczono za pomocą wzoru:

$$\varepsilon_L = 1 - \left(\frac{D_0}{D_L} \right)^2. \quad (4.2)$$

Bezwzględna różnica między wartościami eksperymentalnymi i teoretycznymi $|\Delta\varepsilon_L|$ rośnie wraz ze wzrostem prędkości uderzenia; od 0% przy $U = 68$ m/s do 19% przy $U = 180$ m/s. Spowodowane to jest przede wszystkim zwiększonym wpływem radialnej bezwładności rozszerzających się w strefie odkształceń plastycznych elementów pręta, wraz ze wzrostem prędkości uderzenia, na osiowe charakterystyki pręta, co ogranicza zakres stosowania jednowymiarowej teorii przedstawionej w pracy [1].

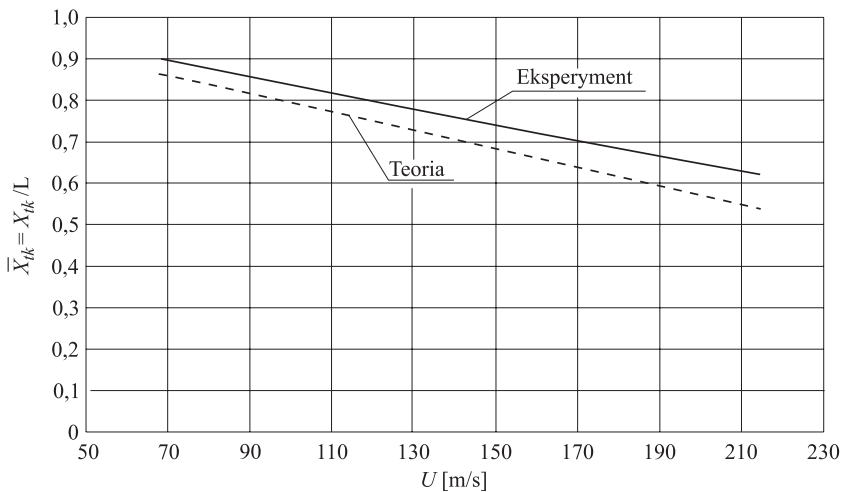
Na rysunku 7 przedstawiono w analogicznym układzie jak na rysunku 6 interpolowane wykresy zmian całkowitej względnej długości pręta, $\bar{X}_{tk} = X/L$, w funkcji prędkości uderzenia, po zakończeniu testów Taylora. Obydwie względne długości, \bar{X}_{tk} , eksperymentalna (linia ciągła) i teoretyczna (linia przerywana) maleją ze wzrostem prędkości uderzenia w przybliżeniu liniowo i w przedziale zmian prędkości $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$ można je określić explicite za pomocą następujących relacji:

— eksperymentalna

$$\bar{X}_{tk} = 0,001911 [214 - U, \text{ m/s}] + 0,622; \quad (4.3)$$

— teoretyczna

$$\bar{X}_{tk} = 0,002219 [214 - U, \text{ m/s}] + 0,539. \quad (4.4)$$



Rys. 7. Zmiana końcowej względnej długości pręta $\bar{X}_{tk} = X_{tk}/L$ w funkcji prędkości uderzenia U

Różnica między tymi wynikami $\Delta\bar{X}_{tk}$ zmienia się w granicach od 4,3% przy $U = 68 \text{ m/s}$ do 13,3% przy $U = 214 \text{ m/s}$.

Zmiana względnej długości odkształconej plastycznie części pręta, \bar{x}_{pk} , w funkcji prędkości U jest analogiczna jak wielkości \bar{X}_{tk} i w przedziale prędkości $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$ można ją określić relacjami:

— eksperymentalna

$$\bar{x}_{pk} = x_{pk}/L = 0,001788 [214 - U, \text{ m/s}] + 0,603; \quad (4.5)$$

— teoretyczna

$$\bar{x}_{pk} = x_{pk}/L = 0,002082 [214 - U, \text{ m/s}] + 0,521. \quad (4.6)$$

Obecnie przejdziemy do analizy mechanicznych parametrów dynamiki pręta podczas trwania testu Taylora. Wykorzystamy do tego celu związki analityczne (3.1)-(3.18), zamieszczone w części 3.

5. Teoretyczna analiza mechanicznych parametrów dynamiki pręta podczas testu Taylora

W tabeli 2 zamieszczono dyskretne wartości mechanicznych parametrów obliczone w wybranych chwilach, które charakteryzują dynamiczny stan pręta podczas całego procesu plastycznego odkształcania dla kilku prędkości uderzenia U . Niektóre parametry przedstawiono na rysunkach w postaci wykresów w funkcji bezwymiarowej współrzędnej Lagrange'a $(x/L) = (ct/L)$.

TABELA 2
Wartości wybranych mechanicznych parametrów pręta w dyskretnych chwilach podczas procesu zderzenia

	$t \cdot 10^3$ [s]	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	$t_k = 0,13200$
$U = 68$ m/s	$(x/L) = ct/L$	0	0,1458	0,2917	0,4375	0,5833	0,7292	0,8750	0,9625
	x_s/L	1	0,8542	0,7083	0,5625	0,4167	0,2708	0,1250	0,0375
	x_p/L	0	0,1182	0,2378	0,3592	0,4829	0,6097	0,7414	0,8252
	v/c	0,8057	0,8150	0,8261	0,8398	0,8575	0,8830	0,9288	1
	$(u/c) = \varepsilon$	0,1943	0,1850	0,1739	0,1602	0,1425	0,1170	0,0712	0
	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}$ [s^{-1}]	432	505	609	767	1036	1593	3452	11502
	σ [MPa]	279	269	256	241	222	194	143	0
	$t \cdot 10^3$ [s]	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	$t_k = 0,13315$
$U = 125$ m/s	$(x/L) = ct/L$	0	0,1458	0,2917	0,4375	0,5833	0,7292	0,8750	0,9709
	x_s/L	1	0,8542	0,7083	0,5625	0,4167	0,2708	0,1250	0,0291
	x_p/L	0	0,0949	0,1923	0,2927	0,3971	0,5067	0,6246	0,7118
	v/c	0,6429	0,6588	0,6777	0,7010	0,7313	0,7748	0,8528	1
	$(u/c) = \varepsilon$	0,3571	0,3412	0,3223	0,2990	0,2687	0,2252	0,1472	0
	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}$ [s^{-1}]	736,25	861,95	1039,41	1308,88	1766,99	2718,45	5889,97	25302,35
	σ [MPa]	325	315	302	287	268	240	189	0
	$t \cdot 10^3$ [s]	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	$t_k = 0,13400$

cd. tabeli 2

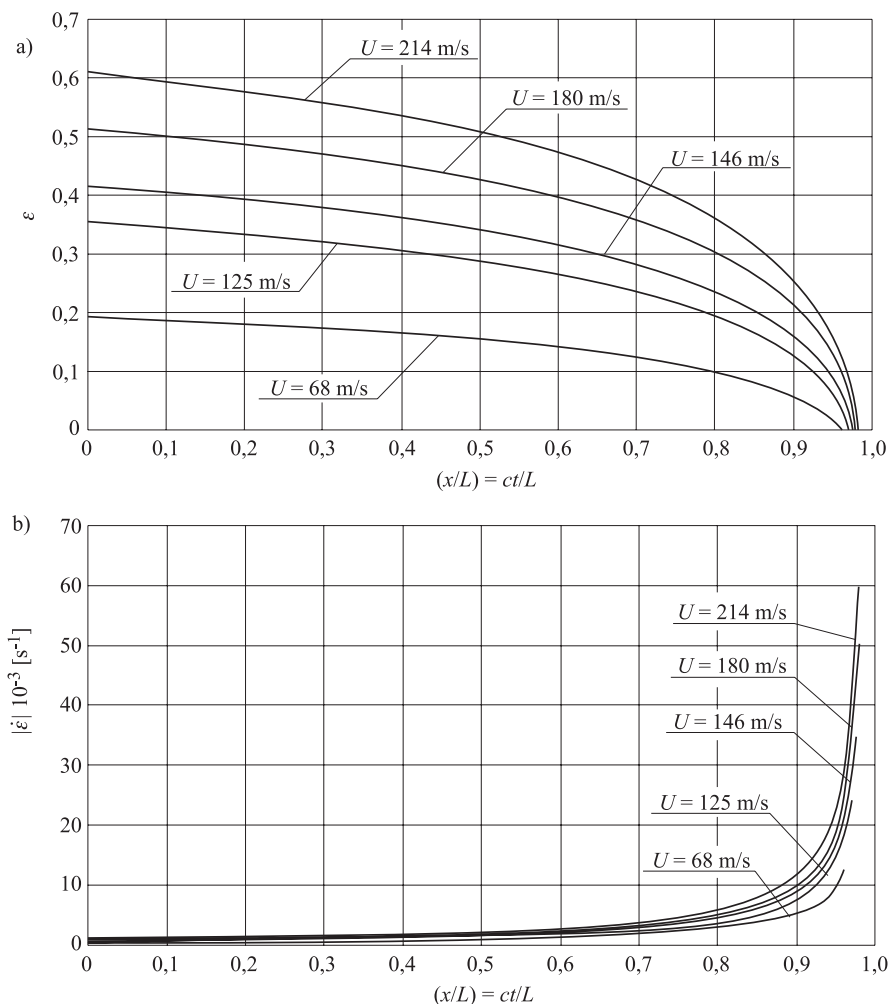
$U = 146 \text{ m/s}$	$(x/L) = ct/L$	0	0,1458	0,2917	0,4375	0,5833	0,7292	0,8750	0,9771
	x_s/L	1	0,8542	0,7083	0,5625	0,4167	0,2708	0,1250	0,0229
	x_p/L	0	0,0862	0,1752	0,2676	0,3641	0,4665	0,5779	0,6679
	v/c	0,5829	0,6003	0,6210	0,6464	0,6796	0,7272	0,8126	1
	$(u/c) = \varepsilon$	0,4171	0,3997	0,3790	0,3536	0,3204	0,2728	0,1874	0
	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} [s^{-1}]$	805,53	943,06	1137,22	1432,05	1933,27	2974,26	6444,24	35153,60
	$\sigma [\text{MPa}]$	335	325	313	298	278	250	200	0
$t \cdot 10^3 [s]$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	$t_k = 0,134569$	
$U = 180 \text{ m/s}$	$(x/L) = ct/L$	0	0,1458	0,2917	0,4375	0,5833	0,7292	0,8750	0,9812
	x_s/L	1	0,8542	0,7083	0,5625	0,4167	0,2708	0,1250	0,0188
	x_p/L	0	0,0723	0,1478	0,2272	0,3116	0,4027	0,5046	0,5939
	v/c	0,4857	0,5061	0,5303	0,5601	0,5990	0,6547	0,7547	1
	$(u/c) = \varepsilon$	0,5143	0,4939	0,4697	0,4399	0,4010	0,3453	0,2453	0
	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} [s^{-1}]$	943,29	1104,34	1331,70	1676,96	2263,89	3482,91	7546,31	50252,92
	$\sigma [\text{MPa}]$	356	346	334	319	299	271	221	0
$t \cdot 10^3 [s]$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	$t_k = 0,134574$	
$U = 214 \text{ m/s}$	$(x/L) = ct/L$	0	0,1458	0,2917	0,4375	0,5833	0,7292	0,8750	0,9813
	x_s/L	1	0,8542	0,7083	0,5625	0,4167	0,2708	0,1250	0,0187
	x_p/L	0	0,0584	0,1206	0,1875	0,2603	0,3410	0,4345	0,5207
	v/c	0,3886	0,4128	0,4416	0,4770	0,5231	0,5894	0,7082	1
	$(u/c) = \varepsilon$	0,6114	0,5872	0,5584	0,5230	0,4769	0,4106	0,2918	0
	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} [s^{-1}]$	1120,84	1312,20	1582,36	1992,60	2690,01	4138,48	8966,72	59844,60
	$\sigma [\text{MPa}]$	383	373	360	345	326	298	247	0

Jako pierwsze w kolejności prezentowane są odkształcenie ε (rys. 8a) i szybkość jego zmiany z upływem czasu $\dot{\varepsilon}(t)$ (rys. 8b) w funkcji x/L .

Z zamieszczonych na rysunku 8 wykresów wynika, że odkształcenie ε intensywnie maleje do zera w końcowej odkształconej plastycznie części pręta, a jego szybkość zmian gwałtownie rośnie i osiąga maksymalną wartość w chwili zakończenia procesu zderzenia, różną dla każdej prędkości uderzenia, np. $|\dot{\varepsilon}(t_k)|_{\max} = 11502 \text{ 1/s}$ dla $U = 68 \text{ m/s}$, a dla $U = 214 \text{ m/s}$ jest $|\dot{\varepsilon}(t_k)|_{\max} = 59845 \text{ 1/s}$. Wynika to z faktu małej masy sztywnej

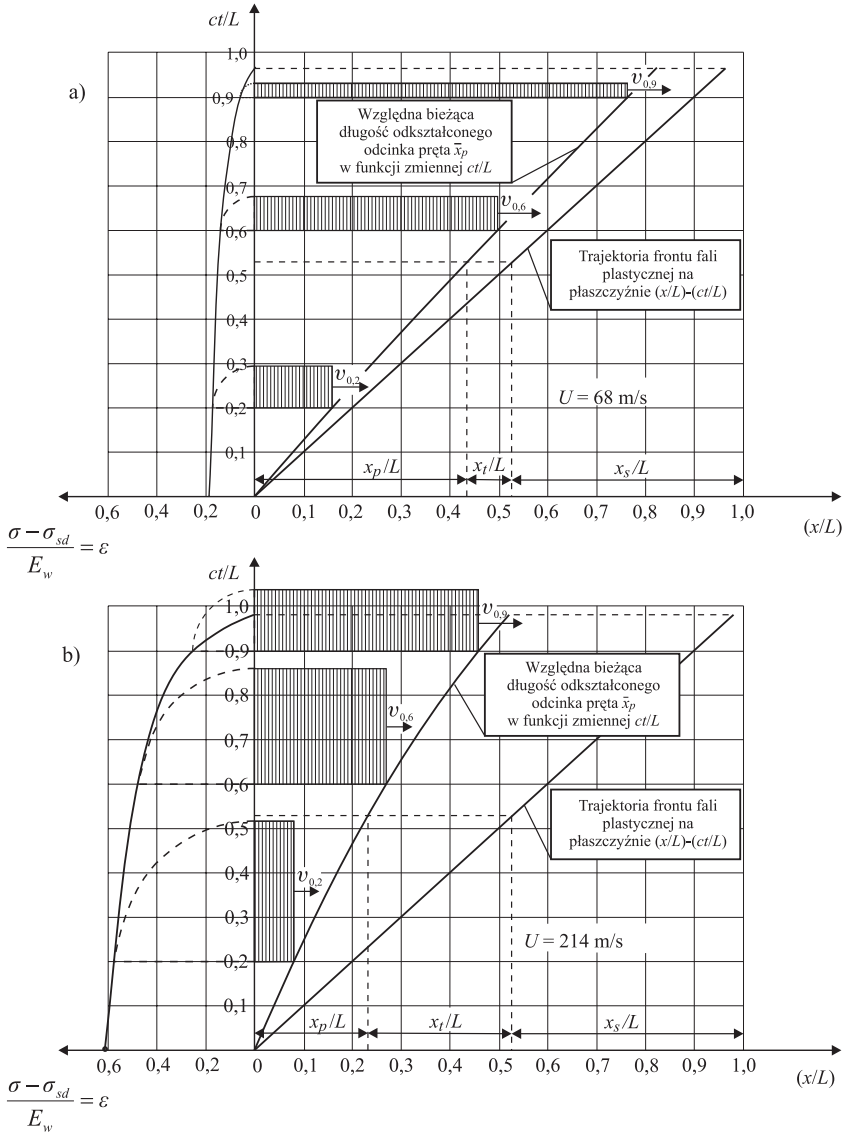
części pręta (mała bezwładność) pod koniec procesu zderzenia, która jest intensywnie hamowana przez front fali plastycznej do prędkości zerowej ($u = 0$).

Z analizy tych parametrów wynika wniosek, że tylko mała część pręta ($\sim 0,1 L$) przy istotnie zredukowanym obciążeniu jest odkształcana z dużymi szybkościami odkształceń, natomiast pozostała część jest deformowana w przybliżeniu quasi-statycznie i dlatego założenie związku $\sigma = \sigma(\epsilon)$ w badanym problemie dla umiarkowanego zakresu prędkości uderzenia (dla miedzi Cu-ETP do 250 m/s) jest dopuszczalne.



Rys. 8. Zmiana odkształcenia ϵ — (a) i szybkości odkształcenia $|\dot{\epsilon}|$ — (b) w funkcji względnej współrzędnej Lagrange'a $(x/L) = (ct)/L$

Z kolei na rysunku 9 przedstawiono falowy obraz propagacji względnego naprężenia ściskającego $(\sigma - \sigma_{sd})/E_w$ w odkształconej plastycznie części pręta w wybranych chwilach względnego czasu: $(ct/L) = 0,2; 0,6; 0,9$ dla dwóch prędkości uderzenia: $U = 68 \text{ m/s}$ — rys. 9a



Rys. 9. Falowy obraz propagacji względnego naprężenia ściskającego $(\sigma - \sigma_{sd})/E_w$ w odkształconej części pręta w chwilach względnego czasu $(ct/L) = 0,2; 0,6; 0,9$ dla dwóch prędkości uderzenia: $U = 68 \text{ m/s}$ — a) i $U = 214 \text{ m/s}$ — b)

i $U = 214$ m/s — rys. 9b. Naprężenie w danej chwili jest stałe w całej odkształconej w tym okresie części pręta i równa się wartości osiągniętej na froncie fali plastycznej od strony przegrody. W chwili zakończenia procesu zderzenia, tj. dla $t = t_k$, naprężenie w pręcie redukuje się do zera (pręt oddziela się od przegrody). Wykres wielkości $(\sigma - \sigma_{sd})/E_w$ wzdłuż frontu fali pokrywa się z wykresem odkształcenia ε (rys. 8a).

6. Uwagi końcowe

1. Przedstawione w pierwszej części pracy [1] analityczne rozwiązanie problemu jednowymiarowej dynamiki okrągłego pręta, uderzającego w sztywną tarczę, stanowi rozszerzenie uproszczonej teorii Taylora stosowanej dla nieściśliwych materiałów sztywno-idealnie plastycznych na nieściśliwe materiały sztywno-plastyczne z potęgowym wzmocnieniem odkształceniowym.
2. Rozszerzona teoria uwzględnia skok nominalnego naprężenia na froncie fali plastycznej w równaniu zmiany pędu. W modelu Taylora zakłada się ciągłość naprężenia na froncie tej fali, co jest sprzeczne z zasadami fizyki.
3. W niniejszej drugiej części pracy, sprzężonej z częścią pierwszą, dokonano teoretycznej i eksperymentalnej analizy dyskretnych wartości mechanicznych parametrów pręta miedzianego (Cu-ETP) uzyskanych po testach Taylora wykonanych dla wybranych początkowych wartości prędkości uderzenia zawartych w przedziale $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$.
4. Dla wyżarzanej miedzi Cu-ETP statyczny wykres eksperymentalny naprężenie-odkształcenie w układzie rzeczywistym $(\sigma_R - \varphi)$, w zakresie zmian odkształcenia logarytmicznego $\varphi < 0,6$, można aproksymować z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością, funkcją potęgową $\sigma_R - \sigma_s = 409\varphi^{0,36}$ [MPa], a w układzie nominalnym (inżynierskim) wyrażeniem liniowym $\sigma - \sigma_s = 1100 \varepsilon$ [MPa] (rys. 2). Do analizy teoretycznej zastosowano związek liniowy.
5. Dynamiczna granica plastyczności dla badanej wyżarzanej miedzi Cu-ETP rośnie w przybliżeniu liniowo wraz ze wzrostem prędkości uderzenia i dla $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$ można ją aproksymować wyrażeniem:

$$\sigma_{sd} = 65 + 0,712 [U, \text{m/s} - 68] \text{ MPa.}$$

6. Bez względu na wartości różnic między teoretycznymi i eksperymentalnymi parametrami $(|\Delta \bar{x}_{sk}|, |\Delta \bar{x}_{pk}|, |\Delta \bar{X}|, |\Delta(D_L/D_0)|, |\Delta \varepsilon_L| - \text{tab. 1})$ zmieniają się wraz ze wzrostem prędkości uderzenia (w wymienionym wyżej przedziale) od kilku do kilkunastu procent. Zatem w tym zakresie prędkości uderzenia wpływ szybkości odkształcenia na jednowymiarową dynamikę badanego miedzianego pręta można pominąć.

7. Odkształcenie nominalne ε intensywnie maleje do zera w końcowej odkształconej części pręta, a jego szybkość zmian gwałtownie rośnie i osiąga maksymalną wartość w chwili zakończenia procesu zderzenia, różną dla każdej prędkości uderzenia, np. $|\dot{\varepsilon}(t_k)|_{\max} = 11502$ 1/s dla $U = 68$ m/s, a dla $U = 214$ m/s jest $|\dot{\varepsilon}(t_k)|_{\max} = 59845$ 1/s (rys. 8). Wynika to z małej masy sztywnej części pręta pod koniec procesu uderzenia, która jest intensywnie hamowana przez front fali plastycznej do zerowej prędkości ($u = 0$).
8. Z analizy parametru $\dot{\varepsilon}(t)$ wynika, że tylko kilkuprocentowy fragment odkształconej części pręta przy istotnie zredukowanym obciążeniu jest deformowany z dużą szybkością, natomiast pozostała część deformuje się w przybliżeniu quasi-statycznie i dlatego założenie związku $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ w badanym problemie jest dopuszczalne.
9. Sztywno-plastyczny model ośrodka nieściśliwego z odkształceniowym wzmocnieniem dla umiarkowanych odkształceń nominalnych ($\varepsilon < 0,5$) zapewnia wystarczającą dla celów technicznych dokładność wyników i w sposób istotny upraszcza rozwiązanie problemu.
10. Zdaniem autorów wyniki przedstawione w pracy mają aplikacyjne i poznawcze walory. Wyprowadzone zamknięte relacje zapisane elementarnymi funkcjami dają badaczom i inżynierom bezpośredni wgląd we wzajemne oddziaływania między parametrami pręta podczas procesu zderzenia i po jego zakończeniu.

Artykuł wpłynął do redakcji 15.10.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lutym 2013 r.

LITERATURA

- [1] E. WŁODARCZYK, M. SARZYŃSKI, *Dynamiczne zachowanie się metalowego pręta ze wzmocnieniem wykładniczym uderzającego w sztywną przegrodę*, I. Rozważania teoretyczne, Biul. WAT, 62, 1, 2013.
- [2] E. WŁODARCZYK, A. JACKOWSKI, M. SARZYŃSKI, *Dynamic behavior of a metallic cylinder striking a rigid target*, Biul. WAT, 61, 4, 2012.
- [3] G.I. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress*, I. *Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc., Series a, London, 194, 1948, 289.
- [4] E.H. LEE, S.J. TUPPER, *Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 21, 1954, 63.
- [5] A.C. WHIFFIN, *The use flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress*, II. *Tests on various metallic materials*, Proc. Roy. Soc., Series a, London, 194, 1948, 300.
- [6] D.S. CLARK, *The behavior of metals under dynamic loading*, Trans. Amer. Soc. Metals, 46, 1954, 34.
- [7] H. KOLSKY, L.S. DOUCH, *Experimental studies in plastic wave propagation*, J. Mech. Physic. Solids, 10, 1962, 175.
- [8] P. PERZYNA, *Termodynamika materiałów niesprężystych*, PWN, Warszawa, 1978.

- [9] S.E. JONES, P. GILLIS, *On the equation of motion of the undeformed section of a Taylor impact specimen*, J. Appl. Phys., 61 (2), 1967, 499.
- [10] S.E. JONES, P.J. MAUDLIN, J.C. FOSTER, *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Engng, 19, 2, 1997, 95.

E. WŁODARCZYK, M. SARZYŃSKI

**Dynamic behavior of a metallic cylindrical rod with power strain hardening
striking a rigid target**

II. Analysis of mechanical parameters of annealed copper (Cu-ETP) rod

Abstract. The theoretical and experimental analysis of some of mechanical parameters of annealed copper (Cu-ETP) rod, striking a rigid target, has been carried out. For this purpose, the Taylor impact tests on some the rods at various values of impact velocity contained in the range, $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$ were performed. Furthermore, presented in paper [1] the analytical solution of the Taylor impact problem has been used. The parameters of the rods were studied during the impact and post-impact. Differences between theoretical and experimental values of the tested parameters of the rod increase from several to over dozen per cent together with increase in the impact velocity in the range of $60 \text{ m/s} < U < 220 \text{ m/s}$. So, in the range values of the velocity U , the influence of a strain rate on dynamics of the studied copper rod can be neglected.

Keywords: dynamics, rod dynamics, impact loading, power strain hardening