



Maski wybranych krawędziowych filtrów Laplace'a w przetwarzaniu danych cyfrowych

KAROLINA KRAWCZYK, IRENEUSZ WINNICKI, JANUSZ JASIŃSKI,
KRZYSZTOF KROSCZYŃSKI, SŁAWOMIR PIETREK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
Zakład Systemów Informacji Geograficznej, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2,
kkrawczyk@wat.edu.pl, ireneusz.winnicki@wat.edu.pl, janusz.jasinski@wat.edu.pl,
kkroszczyński@wat.edu.pl, spietrek@wat.edu.pl

Streszczenie. W artykule omówiono własności najczęściej wykorzystywanych masek filtrów krawędziowych (operatorów kontekstowych) Laplace'a stopnia trzeciego i piątego wraz ze schematami różnicowymi, które stanowią podstawę ich wyprowadzenia. Do konstrukcji wykorzystano metody różnic skończonych i elementu skończonego (MES) z aproksymacją rozwiązania funkcjami biliniowymi (przestrzeń Lagrange'a elementu skończonego). Zaproponowano nowe maski konwolucyjne indukowane przez schematy różnicowe operatora Laplace'a.

Każdej z omawianych dziesięciu masek przypisano tzw. II-formę pierwszego przybliżenia różniczkowego. Na jej podstawie można określić rząd schematu różnicowego aproksymującego operator ∇^2 , a tym samym — rząd maski (rząd maski i stopień maski są różnymi wskaźnikami). Ponadto (i to jest najważniejsze), można jednoznacznie stwierdzić, czy dana maska jest rzeczywiście maską Laplace'a. W pracy wyjaśniono matematyczne podstawy i pochodzenie kilku stosowanych w praktyce filtrów Laplace'a oraz zwrócono uwagę na pewne nieścisłości (powielane w literaturze) pojawiające się w ich opisach dyskretnych. Ich konsekwencje przedstawiono na kilku wybranych zdjęciach satelitarnych pól zachmurzenia zawierających rozbudowaną chmurę *Cumulonimbus* oraz na wygenerowanym w pakiecie Matlab[®] fragmencie grafiki dwu- i trójwymiarowej. Wskazano elementy, które obowiązkowo powinny być uwzględniane w procedurze porównywania własności masek filtrów liniowych.

Praca ma charakter teoretyczny. Prowadzone tu badania na poziomie podstawowym odwołują się do kilku przykładów praktycznych, które pełnią funkcję ilustracji wyprowadzanych wniosków. Zdajemy sobie sprawę z faktu, że jednoznaczne, a nawet katagoryczne sformułowania końcowe oraz wskazanie obszarów zastosowania wyników zawsze związane jest długotrwałymi doświadczeniami oraz z częstym upowszechnianiem rezultatów. Przedstawiamy zatem wyłącznie zwartą procedurę określania matematycznych własności masek filtrów krawędziowych Laplace'a.

Ważnym celem prezentowanych tu rozważań jest również spojrzenie na maski filtru Laplace'a od strony metod numerycznych. Każda maska to w konsekwencji inny schemat różnicowy możliwy do wykorzystania w metodach obliczeniowych. To inna metoda przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu, w których występuje operator ∇^2 (równania dyfuzji, falowe, Laplace'a lub jeszcze inne) — patrz [2-6, 12, 13]. Przy takim podejściu własności badanych masek, nawet na pozór podobne w procesie filtrowania obrazów cyfrowych, powinny być uwzględniane przy rozwiązywaniu wybranych zagadnień fizyki matematycznej. Do własności tych zaliczamy: spektralny operator przejścia, rząd aproksymacji oraz relację zjawisk dyfuzja–kreacja, o której jest mowa w [9, 10].

Słowa kluczowe: maski liniowych filtrów Laplace'a trzeciego i piątego stopnia, metody różnicowe, forma przybliżenia różniczkowego

1. Wprowadzenie

Detekcja krawędzi jest istotnym zagadnieniem w dziedzinie cyfrowego przetwarzania i analizy obrazów. Ich wykrywanie należy do algorytmów pierwszego poziomu analizy, nazywanego często wstępną transformacją obrazów. Poprawne wydzielenie krawędzi i konturów ułatwia lokalizację obiektów (patrz np. [7]), rozpoznawanie kształtów oraz wyróżnianie ich charakterystycznych cech.

Na obrazach cyfrowych krawędzie powstają w miejscach, w których występuje duża lokalna zmiana jasności między grupami pikseli, czyli w miejscach występowania znacznych zmian orientacji, współczynnika odbicia lub oświetlenia obiektów przedstawionych na obrazie. Powszechnie stosowana metoda wyznaczania lokalnych nieciągłości w poziomach jasności obrazu oraz granic zobrazowanych obiektów wykorzystuje jeden z wariantów krawędziowego filtru Laplace'a. Na tym etapie bardzo często sięga się do narzędzi analizy matematycznej, w tym badania przebiegu funkcji pod kątem zachowania się funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w obszarach występowania dużych gradientów jasności pikseli. Znanych jest kilka programów wykorzystywanych w przetwarzaniu zdjęć cyfrowych, które mają wbudowane funkcje i procedury wykrywania krawędzi i konturów. Należą do nich Matlab[®] i ERDAS IMAGINE oraz w ograniczonym zakresie BlueNote [11]. Wymienione systemy są używane przez autorów.

W niektórych źródłach występuje wyraźny podział na filtry krawędziowe, do których zalicza się tylko filtry Laplace'a, oraz filtry konturowe — obejmujące wszystkie filtry gradientowe Sobela, Prewitta, Robertsa i inne. Z drugiej strony wielu autorów, w tym Tadeusiewicz i Korohoda [14], do filtrów krawędziowych zalicza wszystkie te filtry, które umożliwiają lokalizację krawędzi i konturów. Dopiero podczas analizy konkretnych przykładów (patrz [14]) wykorzystują oni termin: filtry konturowe (Sobela, Prewitta lub Robertsa). Autorzy niniejszej publikacji również prowadzą badania w obszarze masek i odpowiadających im filtrów konturowych. Wnioski z tych prac są już przygotowane do publikacji.

Prezentowana dyskusja ogranicza się wyłącznie do aproksymacji pełnego dwuwymiarowego operatora Laplace'a, który jest podstawą konstruowania krawędziowych

filtrów Laplace'a nieparzystego stopnia. Autorzy, wychodząc z założenia, że każde zdjęcie cyfrowe jest obiektem przedstawianym na płaszczyźnie (x, y) , zrezygnowali z opisu przypadków, w których badania prowadzone są jednokierunkowo — tylko wzdłuż osi x lub tylko wzdłuż osi y . Te przypadki, znane z różnych źródeł pod nazwą pionowego i poziomego filtru Laplace'a, stanowią oddzielne zagadnienie. Jego analiza często kończy się stwierdzeniem, że należy kontynuować badania w odniesieniu do operatora dwuwymiarowego.

W artykule przedstawiono opisy dziesięciu wybranych masek (znanych i proponowanych) filtru Laplace'a wykorzystywanych w przetwarzaniu i interpretacji danych cyfrowych o różnym pochodzeniu. Mogą to być dane nawigacyjne [1, 2]; geodezyjno-kartograficzne, nazywane w [11] teledetekcyjnymi; meteorologiczne [7] — obejmujące, między innymi, informacje o zachmurzeniu, w tym jego kształcie, rozmiarach, wewnętrznej strukturze, a także wzajemnej relacji położenia różnych typów chmur. Mogą to być również cyfrowe zobrazowania elementów infrastruktury budowlanej [2, 15] oraz techniki, w tym wojskowej [2, 14]. W każdym z wymienionych tu obszarów badań fotogrametrycznych pojawia się wspólny cel: poprawna detekcja krawędzi analizowanych obiektów.

Należy pamiętać, że filtr kontekstowy to przede wszystkim wieloelementowa maska opisywana macierzą kwadratową stopnia nieparzystego. Z tego też względu wyprowadzone tu zostaną końcowe postacie większości stosowanych masek filtru Laplace'a wraz z ich Π -formą pierwszego przybliżenia różniczkowego. Te informacje zawarte są w tabeli 1 (na końcu artykułu).

2. Tworzenie masek krawędziowego filtru Laplace'a

Maski filtru indukowane przez dwuwymiarowy operator Laplace'a

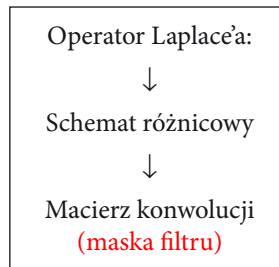
$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1)$$

swoją postać zawdzięczają metodzie aproksymacji tego operatora (metoda różnic skończonych) lub metodzie aproksymacji rozwiązania $u(x, y)$, na które ten operator działa (metoda elementu skończonego, np. w najprostszej swojej postaci, czyli w przestrzeniach Lagrange'a):

$$u(x, y) = \sum_{i,j} u_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y), \quad (2)$$

gdzie: u_{ij} — wartość aproksymowanego rozwiązania w węzle (i, j) — w przypadku obrazów cyfrowych są to wartości jasności przypisane poszczególnym pikselom; $\varphi_i(x)$, $\psi_j(y)$ — funkcje bazowe o nośniku zwartym, głównie wielomiany zależne tylko od jednej zmiennej przestrzennej.

Jak wiemy, oba przedstawione tu podejścia prowadzą do schematów różnicowych, które w większości przypadków różnią się swoją budową, a więc i własnościami. W przypadku schematu różnicowego bardzo ważny jest jego rząd dokładności (rząd aproksymacji). Poniżej omówimy kilka propozycji masek filtrów Laplace'a z jednoczesnym wprowadzeniem do ich nazwy informacji o rzędzie schematu, który je indukuje. Stąd w stosowanej tu terminologii mogą pojawić się pojęcia: maska drugiego (czwartego) rzędu filtru Laplace'a stopnia trzeciego lub piątego.



Należy pamiętać, że konstrukcja maski dowolnego filtru kontekstowego (Laplace'a, gradientowego lub innego) odbywa się zgodnie z algorytmem przedstawionym poniżej.

Maski filtrów konwolucyjnych są generowane przez schematy różnicowe.

2.1. Maski drugiego rzędu filtrów Laplace'a trzeciego stopnia indukowane przez metody różnicowe

W pierwszym przypadku — aproksymacji operatora ∇^2 — otrzymujemy rodzinę wielopunktowych masek filtru Laplace'a w postaci macierzy trzeciego lub piątego stopnia. Najbardziej znana jest maska oparta na szablonie „krzyż”, wynikająca z klasycznej różnicowej aproksymacji operatora Laplace'a. Ma ona postać:

$$Lap_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

i odpowiada schematowi różnicowemu drugiego rzędu:

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2}, \quad (4)$$

gdzie: $u(x, y)$ — pewna funkcja, na którą działa operator Laplace'a, na przykład jasność obrazu, h — odległość między węzłami siatki regularnej (ze względu na operację konwolucji regularność siatki jest podstawową zasadą konstruowania masek). Wielkość ta w procesie transformacji obrazów cyfrowych nie jest brana

pod uwagę. Zastępuje ją teoretyczna odległość między pikselami (w pionie i w poziomie). Dlatego w dalszej części rozważań wyraz h^2 występujący w mianowniku współczynnika stojącego przed każdą macierzą będziemy pomijali (zakładając, że jest równy 1). W pracy przyjęto, że odległości poziome i pionowe między pikselami są stałe, równe h .

Zauważmy, że między (3) i (4) zachodzi zgodność z dokładnością do znaku (-). Ta sama zasada dotyczy każdej konstrukcji macierzy prezentowanej w niniejszej pracy.

W literaturze dotyczącej tego obszaru badań oraz w części specjalistycznego oprogramowania maski filtrów krawędziowych Laplace'a są przedstawiane z dodatnią wartością elementu centralnego, analogicznie do (3). W pakiecie ERDAS IMAGINE — wykorzystywanym w tych analizach — użytkownik może sam zdefiniować macierz maski. W innych pakietach taka otwartość nie funkcjonuje.

Zmiana znaku maski wywołuje jedynie przejście: negatyw — pozytyw lub pozytyw — negatyw i nie zmienia jego podstawowych własności, w tym rozłożenia poszczególnych elementów obrazu cyfrowego.

Aproksymacja (4) charakteryzuje się drugim rzędem dokładności. Jej II-forma pierwszego przybliżenia różniczkowego — jest następująca (nie występują w niej pochodne mieszane):

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 0(h^4). \quad (5)$$

Tym samym rzędem charakteryzuje się kolejny schemat (patrz np. [12, 13])

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + 4(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 20u_{ij}}{6h^2}. \quad (6)$$

Odpowiada mu maska tworząca dziewięciopunktowy filtr Laplace'a trzeciego stopnia w postaci macierzy:

$$Lap_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

II-forma pierwszego przybliżenia różniczkowego schematu (6) jest równa:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 0(h^4). \quad (8)$$

Pewną modyfikacją maski (7) jest maska nieopisywana dotąd (w takiej postaci) w literaturze dotyczącej przetwarzania zdjęć cyfrowych:

$$Lap_{-3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

którą autorzy niniejszej pracy wyprowadzili na podstawie schematu różnicowego drugiego rzędu zaproponowanego w [12]:

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{-u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} + 4(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 12u_{ij}}{2h^2}. \quad (10)$$

Schemat ten aproksymuje równanie różniczkowe (Π — forma)

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + O(h^4). \quad (11)$$

Bez szczegółowej analizy trudno jest ocenić tę maskę. Pojawia się w niej wyraz $-\frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y}$ odpowiedzialny za kreację. Może więc okazać się, że w szczególnych sytuacjach jej stosowanie będzie uzasadnione, czy wręcz wskazane. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do [9, 10].

2.2. Maski filtrów Laplace'a piątego stopnia

W celu podniesienia dokładności obliczeń w praktyce często wykorzystuje się schematy różnicowe wyższego rzędu. Przykładem może być dziewięciopunktowy schemat typu „krzyż”. Ma on postać (patrz [5, 13]):

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{-u_{i-2,j} - u_{i+2,j} - u_{ij+2} - u_{ij-2} + 16(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 60u_{ij}}{12h^2}. \quad (12)$$

Jest to jedyny prezentowany w tej pracy schemat czwartego rzędu, który indukuje maskę krawędziowego filtru Laplace'a piątego stopnia:

$$Lap_{-4} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 1 & -16 & 60 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Postaci tej maski również nie znajdujemy w dostępnej literaturze.

Z operatora różnicowego (12) wynika poniższa Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego (nie występują w niej pochodne mieszane):

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + 0(h^4). \quad (14)$$

Inną maskę filtru Laplace'a piątego stopnia konstruujemy na podstawie trzynastopunktowego schematu różnicowego w postaci (patrz [12]):

$$16h^2 \overline{\nabla^2 u} = -u_{i-2j} - u_{ij+2} - u_{i+2j} - u_{ij-2} - 2u_{i-1j+1} - 2u_{i-1j-1} + \\ -2u_{i+1j+1} - 2u_{i+1j-1} + 24(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 84u_{ij}. \quad (15)$$

Jej budowa jest następująca:

$$Lap_5 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -24 & 2 & 0 \\ 1 & -24 & 84 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & -24 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Maska (16) również jest nową maską, niestosowaną dotychczas w analizie obrazów cyfrowych.

Bardzo szczegółowy opis konstrukcji aproksymacji (15) można znaleźć w [12]. Według Ogury schemat (15) charakteryzuje się czwartym rzędem dokładności. Z analizy przeprowadzonej przez autorów artykułu wynika, że aproksymacja badanego schematu jest nie czwartego, a drugiego rzędu:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4). \quad (17)$$

W tej masce, podobnie jak w (9), pojawia się wyraz odpowiedzialny za kreację (patrz [9, 10]).

W programie BlueNote [11] wykorzystuje się maskę filtru Laplace'a piątego stopnia, której elementy są odpowiednio równe:

$$Lap_6 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Maska ta była stosowana w trakcie analizy zachmurzenia konwekcyjnego krótko omówionej w [8]. Natomiast w [10] zaproponowaliśmy dla niej nazwę: maska KKM.

Pomimo tego, że schemat różnicowy rozpięty jest na tak dużej liczbie węzłów, to jego rząd aproksymacji jest równy tylko 2. Ten rząd dokładności otrzymujemy na podstawie rozwinięcia poszczególnych wyrazów $u_{i\pm r, j\pm r}$ (dla $r = -2, -1, 0, +1, +2$) schematu różnicowego (z którego wynika (18)) w szereg Taylora wokół punktu (i, j) i wyznaczenia z otrzymanej Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego wyjściowego operatora Laplace'a. W ten sposób określaliśmy wcześniejsze Π -formy. W efekcie dochodzimy do stwierdzenia, że tak skonstruowany schemat różnicowy $\nabla^2 u$ aproksymuje równanie Laplace'a $\nabla^2 u$

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{17}{60} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4) \quad (19)$$

z dokładnością do małej rzędu drugiego. Wielkość $0(h^2)$ uwzględnia wszystkie wyrazy rzędu h^2 zależne od pochodnych mieszanych (co najmniej czwartego rzędu) funkcji u .

Informacje o jeszcze innych schematach różnicowych, na podstawie których można konstruować maski filtrów Laplace'a, są zawarte w [3, 4].

2.3. Metoda elementu skończonego i maski drugiego rzędu filtru Laplace'a trzeciego stopnia

Innym podejściem do konstrukcji schematów różnicowych jest podejście wariacyjne, a w szczególności jego wariant nazywany metodą elementu skończonego (MES).

Stosując metodę elementu skończonego z aproksymacją rozwiązania szeregiem biliniowym

$$u(x, y) = \sum_{i,j} u_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y), \quad (20)$$

w którym funkcje $\varphi_i(x)$, $\psi_j(y)$ są definiowane następująco — tzw. *hat functions*:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1}) / h & \text{dla } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x) / h & \text{dla } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{dla } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (21)$$

($\psi_j(y)$) — przez analogię), otrzymujemy dziewięciopunktową maskę krawędziowego filtru Laplace'a trzeciego stopnia:

$$Lap_7 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Indukujący ją schemat różnicowy drugiego rzędu ma postać:

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{u_{i-1j+1} + u_{i+1j+1} + u_{i-1j-1} + u_{i+1j-1} + u_{ij+1} + u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} - 8u_{ij}}{3h^2}. \quad (23)$$

Maska ta jest wykorzystywana w analizach prezentowanych w różnych pracach, m.in. w [1, 14, 15] — jednak bez podania jej podstaw matematycznych. Poniżej przedstawiamy Π -formę pierwszego przybliżenia różniczkowego (23):

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + O(h^4). \quad (24)$$

Aproksymacja (20) jest bardzo wygodna w programowaniu i prowadzi do metod ekonomicznych. Wynika to z faktu, że funkcjami bazowymi w metodzie elementu skończonego są wielomiany o tak zwanym zwartym nośniku, czyli różne od zera tylko w punkcie (i, j) . Dodatkową zaletą tej aproksymacji jest tworzenie rzadkich macierzy wstępowych, których elementy są zawarte w (22). W wielu publikacjach ten rodzaj filtru często nazywany jest zmodyfikowanym filtrem Laplace'a. W rzeczywistości jest to filtr standardowy, bez żadnych celowych modyfikacji. Wynika on z bezpośredniego wykorzystania metody powszechnie znanej i stosowanej w matematyce — metody elementu skończonego w przestrzeni Lagrange'a. Jego maskę buduje się nie na aproksymacji operatora Laplace'a ∇^2 , a na aproksymacji rozwiązania $u(x, y)$ jego równania. Poprawna (bardzo opisowa) nazwa maski (22) powinna brzmieć: *maska krawędziowego filtru Laplace'a zbudowanego w przestrzeni Lagrange'a elementu skończonego z aproksymacją rozwiązania funkcjami liniowymi*. Autorzy zdają sobie sprawę z braku akceptacji dla tak długiej nazwy i nie proponują wprowadzenia jej do powszechnego obiegu. Nie o nazewnictwo tu jednak chodzi, tylko o umiejętność wyprowadzenia tej zależności i umiejscowienia jej w teorii cyfrowego przetwarzania i analizy obrazów. Maskę można nazwać krótko: maska filtru Laplace'a oparta na MES (lub: MES-owska maska Laplace'a).

Uwzględniając w (20) wielomiany wyższego stopnia, możemy konstruować kolejną grupę schematów różnicowych, a tym samym kolejną grupę masek filtrów Laplace'a. Ich stopień będzie równy $n = 2m + 1$, gdzie m — stopień wielomianu.

2.4. Inne maski drugiego rzędu filtrów Laplace'a trzeciego i piątego stopnia

W literaturze przytaczane są inne typy masek charakteryzujących dwuwymiarowy operator Laplace'a. W [1] Borawski przytacza przykład dziewięciopunktowej maski filtru Laplace'a trzeciego stopnia (niestety bez odpowiedniego współczynnika $\frac{1}{4}$, współczynnik ten jest uwzględniany w analizie prowadzonej w [6]):

$$Lap_8 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Maska ta jest indukowana przez różnicowy operator Laplace'a, którego Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego jest następująca:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4). \quad (26)$$

Odpowiadający jej schemat różnicowy (postać pomijamy) charakteryzuje się więc dokładnością drugiego rzędu.

Natomiast w [14] Tadeusiewicz i Korohoda, a w [15] Wróbel i Koprowski przedstawiają inną maskę. Ma ona postać:

$$Lap_9 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Własności maski (27) są zaskakujące. Co prawda wszyscy wymienieni powyżej autorzy nazywają ją maską filtru Laplace'a, ale po szczegółowej analizie okazuje się, że nie indukuje jej operator Laplace'a — pomimo tak charakterystycznej dla niego symetrii oraz zerowania się sumy elementów macierzy (27). Przypisany jej operator różnicowy aproksymuje jeden z wyrazów równania biharmonicznego (i to nawet nie z najwyższą dokładnością), mianowicie:

$$Lap_9 \rightarrow Lu = h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + (h^6), \quad (28)$$

a nie standardowy operator Laplace'a:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

W następnym punkcie ten problem zostanie omówiony szerzej.

W [14] przedstawiona jest również maska filtru Laplace'a piątego stopnia w postaci

$$Lap_{-10}_{[14]} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -8 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Po szczegółowej analizie dochodzimy do wniosku, że maska (29) rzeczywiście związana jest z operatorem Laplace'a i indukowana jest przez schemat różnicowy, którego Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego — ma postać:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{7h^2}{20} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{31h^2}{30} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + o(h^4). \quad (30)$$

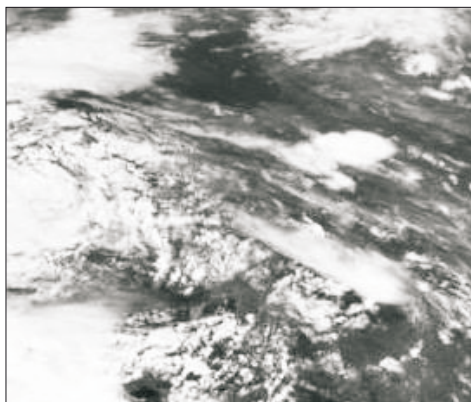
Biorąc pod uwagę dotychczasowy algorytm postępowania, wyprowadzamy poprawną (pełną) postać maski (29). Jest ona następująca:

$$Lap_{-10} = -\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -8 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Zwracamy uwagę nie tylko na inną wartość współczynnika stojącego przed macierzą, ale również na jego znak. W literaturze dotyczącej cyfrowego przetwarzania i analizy obrazów przyjęło się używać maski indukowane nie przez operator ∇^2 , ale przez operator $(-\nabla^2)$ — porównaj (3) i (4). Pozostajemy zatem przy tym tradycyjnym podejściu. Maskę Lap_{-10} indukuje zatem operator $(-\nabla^2)$.

Warto podkreślić, że cechą szczególną prezentowanej tu analizy jest uwzględnianie w wyprowadzeniach (o ile wynika to z obliczeń) współczynników przed macierzami definiującymi omawiane maski filtru Laplace'a.

W ocenie autorów takie szczegółowe podejście do tego zagadnienia (z uwzględnieniem schematów różnicowych oraz ich Π -form pierwszego przybliżenia różniczkowego) nie było dotychczas publikowane w literaturze.

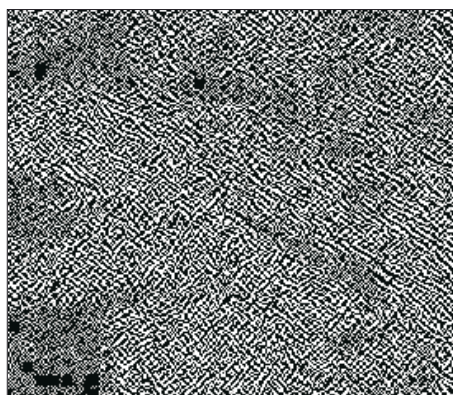


Rys. 1. Satelitarne zdjęcie zachmurzenia nad Europą w kanale widzialnym (VIS)

3. Uwagi ogólne dotyczące (nie tylko) masek krawędziowych filtrów Laplace'a

Jak zauważono, bardzo ważnym elementem przytoczonych masek są współczynniki stojące przed macierzami. W większości źródeł są one pomijane. Należy wyraźnie podkreślić, że chcąc porównywać między sobą różne maski, oceniać jakość filtrów, a następnie walory ich masek, musimy te współczynniki uwzględnić. Dopiero wtedy otrzymywane i porównywane wyniki odnoszą się do tego samego dwuwymiarowego operatora Laplace'a (1). Istotę tego niezwykle ważnego problemu zilustrowano na rysunkach 2 i 3.

Na rysunku 1 zamieszczono satelitarne zdjęcie cyfrowe zachmurzenia zalegającego nad Europą Środkową otrzymane z satelity MSG-2 (*Meteosat Second*



Rys. 2. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji ($Lap_2 - Lap_3$)



Rys. 3. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji ($Lap_2' - Lap_3'$)

Generation) będuącego własnością European Organisation for the Exploitation of Meteorological Satellites (EUMETSAT). Podobne zdjęcia w wielu kanałach są odbierane od połowy 2010 roku przez stację zainstalowaną w Zakładzie Systemów Informacji Geograficznej Wydziału Inżynierii Lądowej i Geodezji WAT. Jako jeden z przykładów zdjęcia cyfrowego może ono stanowić podstawę dowolnej analizy (w szczególności testowania filtrów), o której mówiliśmy we wprowadzeniu do niniejszego artykułu. Równie dobrze mógłby to być każdy inny obraz cyfrowy: linia brzegowa, obiekt na dnie akwenu morskiego, czołg, samolot itp.

Na rysunku 2 przedstawiono różnicę między transformacjami obrazu wejściowego (rys. 1) po zastosowaniu filtrów Laplace'a Lap_2 (7) i Lap_3 (9). Oznacza to, że na obraz z rysunku 1 działa różnica filtrów ($Lap_2 - Lap_3$), której prawidłowa maska ma postać

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \overset{Lap_2}{-1} & \overset{Lap_2}{-4} & \overset{Lap_2}{-1} \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overset{Lap_3}{1} & \overset{Lap_3}{-4} & \overset{Lap_3}{1} \\ -4 & 12 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Odnosząc prawą stronę (32) do schematu różnicowego

$$\frac{2}{3} [(-u_{i-1j+1} - u_{i+1j+1} - u_{i-1j-1} - u_{i+1j-1}) + 2(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}) + -4u_{ij}] = 0(h^4), \quad (33)$$

a następnie rozwijając ją w szereg Taylora względem węzła (i, j) , dochodzimy do wniosku, że różnica ta jest równoważna małej rzędu czwartego, tzn.: $(Lap_2 - Lap_3) \rightarrow 0(h^4)$. Jego Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego — jest następująca:

$$(Lap_2 - Lap_3)_{(32)} \rightarrow h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + (h^6) \quad (34)$$

(indeks dolny po lewej stronie równania (34) oznacza numer wzoru maski (32)). Oznacza to, że ani maska (32), ani schemat (33) nie mają związku z operatorem Laplace'a. Na rysunku 2 przedstawiono zatem jakieś niewielkie szumy, będuące konsekwencją stosowania różnych aproksymacji różnicowych (7) i (9) tego samego rzędu.

Maska (32) jest maską (z dokładnością do współczynnika $(-2/3)$), którą już cytowaliśmy w tym artykule za Tadeusiewiczem i Korohodą [14] oraz za Wróblem i Koprowskim [15] — patrz (27). Okazuje się więc, że wymienieni autorzy nie przytaczają pełnej postaci maski Laplace'a, tylko różnicę dwóch różnych masek, w tym przypadku Lap_2 i Lap_3 (lub jeszcze zupełnie innych).

Wykonując tę samą operację (rys. 3) na macierzach bez współczynników (nazwijmy je Lap_2' i Lap_3'), dochodzimy do wyrażenia

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

które przedstawia jakąś zdegenerowaną różnicową postać operatora Laplace'a, całkowicie błędną, niemającą nic wspólnego z omawianym procesem. Bowiern w tym przypadku otrzymuje się:

$$(Lap_2' - Lap_3')_{(35)} \rightarrow 4\nabla^2 u + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 2h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4). \quad (36)$$

Na rysunku 3 zobrazowano więc pole wejściowe poddane transformacji filtrem indukowanym przez rzadko używaną aproksymację różnicową operatora Laplace'a, wzmacnione czterokrotnie ($4\nabla^2 u$), na siatce pięciopunktowej typu „kwadrat”.

Biorąc jednak za podstawę powyższy wynik, możemy wprowadzić do teorii cyfrowego przetwarzania obrazów kolejną nową maskę filtru Laplace'a. Ma ona postać:

$$Lap_9a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Jej Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego — jest następująca (z dokładnością do znaku -):

$$(Lap_9a)_{(37)} \rightarrow \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4). \quad (38)$$

Maski (32) i (37) poddane zostaną jeszcze jednemu testowi. Na rysunku 4 przedstawiono przykładowe figury zawierające krawędzie pionowe, poziome, ukośne i rozłożone nieregularnie — wzdłuż linii reprezentującej okrąg.

Na rysunku 5 zamieszczono obrazy tych figur po transformacji filtrem Lap_9 lub, co jest równoważne z dokładnością do współczynnika ($-2/3$), maską (32).

Widzimy, że ten typ filtru nie spełnia swoich podstawowych zadań (lub spełnia je z nadmiarem). Wszystkie krawędzie pionowe i poziome są całkowicie odfiltrowane. Z kwadratu pozostały tylko jego wierzchołki (w każdym wierzchołku wartości tylko czterech <górnych> lub pięciu <dolnych> pikseli są różne od zera); z trójkąta



Rys. 4. Wybrane rodzaje krawędzi

Rys. 5. Trójkąt, kwadrat i okrąg po filtracji filtrem Lap_9 (maską (32))

tylko boki (bez podstawy). Jest to wynik operacji splotu funkcji stałej, jaką są boki kwadratu z rysunku 4 z maską, której sumy elementów poszczególnych wierszy i kolumn zerują się. To samo dotyczy krawędzi pionowych. Pozostanie wierzchołków kwadratu związane jest z tak zwanym problemem brzegu. Na ogół przyjmuje się, że wartości pikseli poza obrazem są równe zero. Przedłużenie krawędzi poza kwadrat spowoduje odfiltrowanie również naroży. Byłoby to jednak zbyt sztuczna ingerencja w proces przetwarzania obrazów cyfrowych. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w [10].

Z obwodu okręgu odfiltrowanych jest po kilka punktów znajdujących się w sąsiedztwie stycznych pionowych i poziomych (nie widać tego na rysunku, ale w zapisie cyfrowym jest to widoczne — są to pojedyncze piksele).

Strukturę maski (32) przypominamy poniżej:

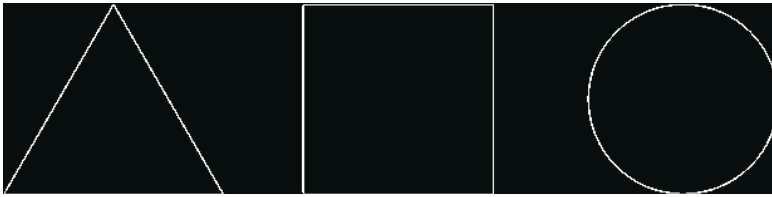
$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Krawędzie ukośne (trójkąt) i nieregularne (punkty okręgu) pozostają więc lekko zniekształcone. Nie oznacza to jednak, że maska Lap_9 nie może być wykorzystywana do transformacji zdjęć cyfrowych. Z całą pewnością znajdą się takie problemy, w których jej charakterystyczne własności staną się istotną zaletą. Wymaga to jednak dalszej analizy.

Dodatkową cechą maski Lap_9 jest wprowadzenie do obrazu będącego wynikiem filtrowania podwójnych krawędzi. Zjawiska tego nie obserwujemy w przypadku innych filtrów (porównaj rysunek 5 z rysunkami 6 i 7).



Rys. 6. Trójkąt, kwadrat i okrąg po filtracji maską (37)



Rys. 7. Trójkąt, kwadrat i okrąg po filtracji maską Kupidury-Kozy-Marciniaka (KKM)

Na rysunku 6 zamieszczamy obrazy analizowanych krawędzi (rys. 4) po filtracji maską (37)

$$Lap_9a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a na rysunku 7 — maską KKM. Wszystkie analizowane linie pozostają bez istotnych zmian. Nie pojawiają się „dziury” na żadnym obwodzie analizowanych figur. Niewielkie różnice w zapisie cyfrowym rysunków 6 i 7 na tym etapie analizy są do pominięcia. Transformacja figur z rysunku 4 pozostałymi maskami prowadzi do wyników analogicznych do tych prezentowanych na rysunkach 6 i 7.

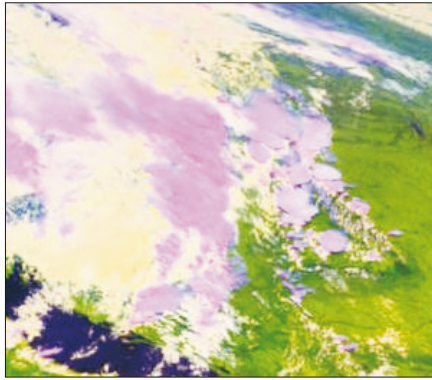
Warto pamiętać, że aproksymacja

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} - 4u_{ij}}{2h^2} \quad (39)$$

indukująca maskę Lap_9a (37) była stosowana w wielu modelach numerycznego prognozowania pogody. Służyła ona do obliczania wartości laplasjanu zmierzonego pola geopotencjału ziemskiego. Na jego podstawie wyznaczano następnie wartości nieznannej funkcji prądu będącej rozwiązaniem równań modeli barotropowych w przybliżeniach geostroficznym i solenoidalnym, tzw. równania bilansu dywergencji pędu — szczególnego typu w pełni nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu o nazwie równania Monge’a-Ampère.

Z powyższego opisu wynika, że maska (37), związana ze schematem różnicowym (39), znana jest w literaturze dotyczącej metod numerycznych. Jednak ze względu na swoje własności nie znalazła szerszego zastosowania w obszarze przetwarzania zdjęć cyfrowych.

Na rysunku 8 przedstawiono przykładowe pole zachmurzenia na zdjęciu o wymiarach (261×301) pikseli oraz to samo pole poddane transformacji filtrami Lap_2 i Lap_3 z współczynnikami przed macierzami definiującymi ich filtry (rys. 9 i 10) oraz filtrami Lap_2' i Lap_3' bez tych współczynników (rys. 11 i 12).



Rys. 8. Satelitarny obraz zachmurzenia nad Europą w kanale RGB

Z bezpośredniej analizy załączonych rysunków (rys. 9-12) płynie jeden istotny wniosek: poza różnym nasyceniem barw nie zauważa się znaczących różnic w zobrazowaniach otrzymanych po zastosowaniu wspomnianych filtrów. Każdy synoptyk fotointerpretator, nawet z dużym doświadczeniem, będzie miał trudności



Rys. 9. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji Lap_2



Rys. 10. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji Lap_3



Rys. 11. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji *Lap_2*



Rys. 12. Obraz zachmurzenia po zastosowaniu transformacji *Lap_3*

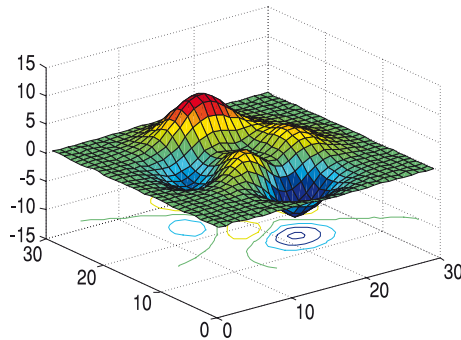
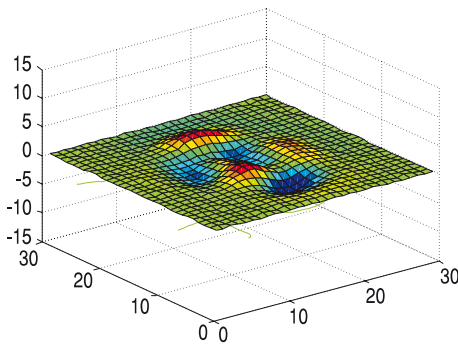
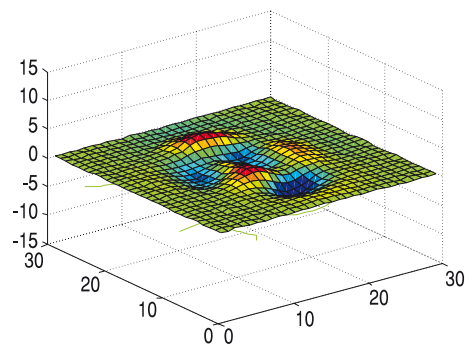
z określeniem charakteru tych różnic. W najlepszym przypadku może jedynie wskazać położenie obszarów, w których je zauważa. Chociaż i taka diagnoza może być niejednoznaczna (rys. 9-12).

Różnice w działaniu poszczególnych filtrów jednak występują i przyjmują znaczne wartości. Na podstawie analizy kilku zdjęć (monochromatycznych i barwnych) nie będziemy wyciągać wiążących wniosków odnośnie do wykorzystywania możliwości, jakie daje filtracja zdjęć meteorologicznych w operacyjnej służbie pogody. To zagadnienie dopiero zaczyna się rozwijać. Profesjonalną stacją odbioru zdjęć dysponujemy dopiero od połowy 2010 roku. W chwili obecnej ograniczamy się do przedstawienia działania filtrów liniowych na obszarach o znacząco różnych powierzchniach oraz zawierających różne obiekty (patrz kolejne zobrazowania graficzne).

Z punktu widzenia prezentowanej analizy zachmurzenie jest obiektem bardzo trudnym w interpretacji i wyjątkowo wymagającym.

Na rysunku 13 przytoczono jedną z metod wyznaczania graficznej prezentacji oraz właściwej oceny różnic masek Laplace'a. Należy zaznaczyć, że w przypadku zdjęcia satelitarnego wymiar obrazu wejściowego (rys. 8) jest zbyt duży, żeby w sposób czytelny przedstawić graficznie różnice wartości pikseli w całym obszarze. Analizie poddamy więc pewien nieduży fragment grafiki 3D, która może być przekonującym przykładem poprawności podejścia do omawianego problemu.

Do pakietu Matlab dołączony jest skrypt *peaks.m* generujący pewne nieregularne pola (rys. 13). Amplituda zmian wartości prezentowanej funkcji zawiera się w przedziale $(-6,43-8,02)$, a wymiar pola jest równy (30×30) pikseli. Symulowane pole poddane zostanie transformacji filtrami *Lap_2* oraz *Lap_3*. Wyniki tych operacji przedstawiono na rysunkach 14 i 15. Widzimy, że oba pola otrzymane w ten sposób są podobne, a amplitudy zmian wartości przypisanych do odpowiednich pikseli obrazów pokrywają się.

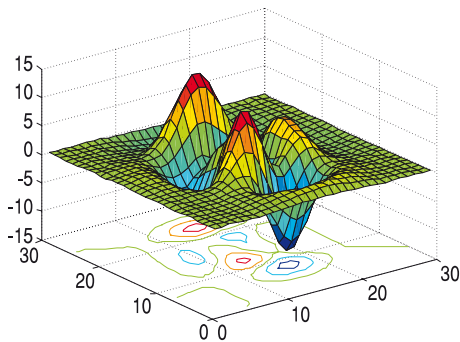
Rys. 13. Pole wejściowe wygenerowane przez zbiór *peaks.m*Rys. 14. Pole *peaks.m* po transformacji *Lap_2*. Amplituda wartości funkcji $(-2,04-2,00)$ Rys. 15. Pole *peaks.m* po transformacji *Lap_3*. Amplituda wartości funkcji $(-2,10-2,06)$

Wartości (*Lap_2* – *Lap_3*) (porównaj (32)) w poszczególnych punktach mieszczą się w przedziale $(-0,08-0,08)$. Obie maski mają podobne własności konwolucyjne, są tego samego rzędu i stopnia. Za ich pomocą można transponować obrazy cyfrowe oraz, co najważniejsze, wyniki tych operacji porównywać.

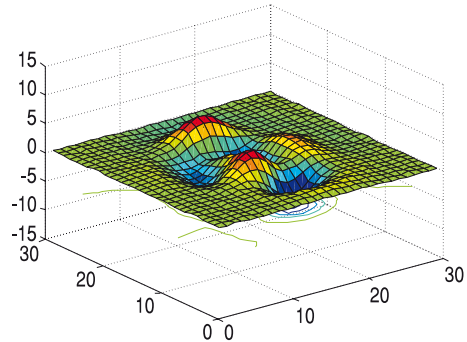
Zupełnie inne wnioski płyną z analizy rysunków 16 i 17, przedstawiających pole wejściowe poddane oddziaływaniu filtrów, których maski oznaczyliśmy jako *Lap_2'* i *Lap_3'* (patrz (35)).

Tutaj wynik operacji (*Lap_2'* – *Lap_3'*) — czyli różnice w amplitudzie zmian wartości pikseli — zawierają się w przedziale $(-8,01-7,86)$, są więc na poziomie amplitudy pola wejściowego (rys. 13). Te odwzorowania przedstawiono również na rysunkach 2 i 3.

Biorąc za podstawę powyższą analizę, odniesiemy wnioski z niej płynące do badanego pola zachmurzenia z rysunku 1. W tym celu wyznaczmy różnicę transformacji *Lap_2* (rys. 14) i *Lap_3* (rys. 15) zastosowanych do symulowanego pola (rys. 13). Jest ona przedstawiona na rysunku 18. Wynik działania obu filtrów na początkowe pole zachmurzenia powtarzamy na rysunku 19.



Rys. 16. Pole *peaks.m* po transformacji *Lap_2*.
Amplituda wartości funkcji (-12,20-2,00)



Rys. 17. Pole *peaks.m* po transformacji *Lap_3*.
Amplituda wartości funkcji (-4,22-4,13)

Na rysunku 20 przytaczamy różnicę transformacji *Lap_2* (rys. 16) i *Lap_3* (rys. 17). Otrzymane pole zawiera w sobie pole początkowe, praktycznie nie zmieniając go. Nie stanowi więc podstawy do prowadzenia dalszych prac badawczych w tym zakresie. Wynik działania obu filtrów prezentujemy na rysunku 21 (powtórzenie rys. 3).

Wniosek jest jednoznaczny: *analizę porównawczą filtrów konwolucyjnych (z uwzględnieniem ich własności, również innych niż te omawiane tutaj) powinno się prowadzić wyłącznie w odniesieniu do masek indukowanych przez operator Laplace'a.*

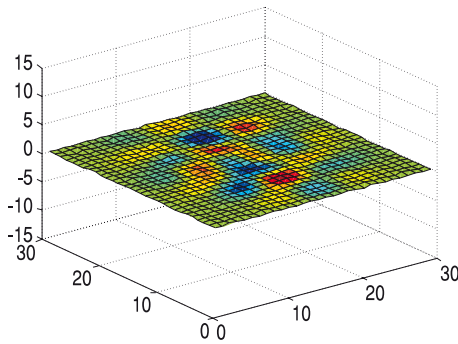
Oznacza to więc, że prowadzenie badań porównawczych (odnoszących się do własności filtrów) bez uwzględniania poprawnej budowy maski jest błędne i może skutkować niepoprawnymi wnioskami.

W literaturze dotyczącej przetwarzania obrazów cyfrowych prezentowanych jest wiele masek. Na ogół występują one pod wspólną nazwą: *maski filtrów Laplace'a*. Należy jednak zaznaczyć, że nie każda z nich odnosi się do tego rodzaju filtru.

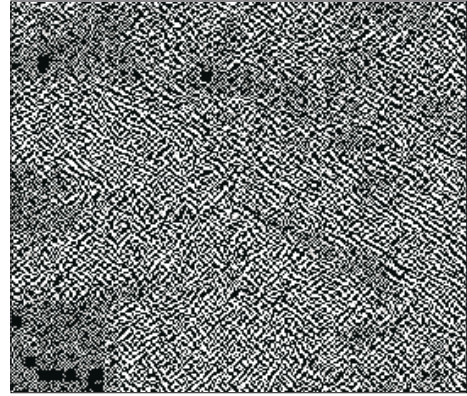
Z opisów przedstawionych w [14] (str. 109) oraz w [15] (rys. 7.10, str. 183) wynika, że czytelnik ma do czynienia z maskami reprezentującymi filtry Laplace'a. Maski, o których mowa, to:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

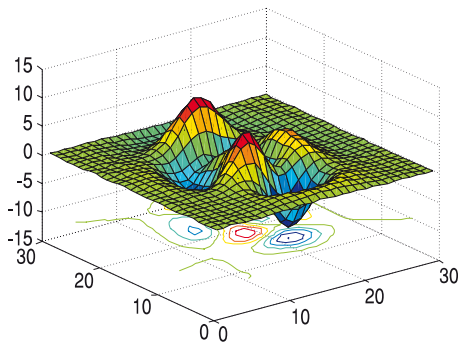
Jak wiemy, cechą charakterystyczną filtrów Laplace'a (obok symetrii) jest zerowanie się sumy wszystkich elementów jego masek. Słusznie zauważa Borawski w [1], że grupa filtrów (40), która nie spełnia tego warunku, to powszechnie znane filtry górnoprzepustowe nienależące do grupy masek Laplace'a. W niektórych źródłach maski, do których odnosimy się w tej uwadze, są nazywane maskami zmodyfikowanych filtrów Laplace'a. Jest to pewne wyjście z tej niezręczności, chociaż niepoprawne z matematycznego punktu widzenia. Tak więc, maski (40)



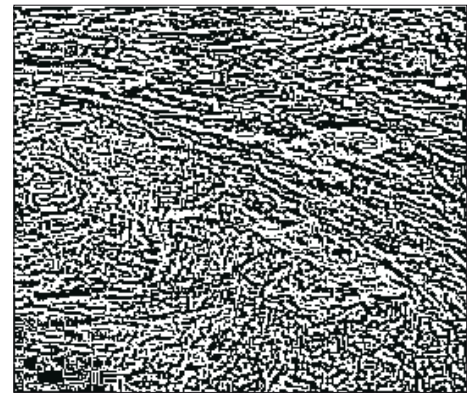
Rys. 18. Pole *peaks.m* po transformacji (*Lap_2* — *Lap_3*). Amplituda $(-0,08 \pm 0,08)$



Rys. 19. Obraz wejściowy po filtrowaniu (patrz rys. 2)



Rys. 20. Pole *peaks.m* po transformacji (*Lap_2'* — *Lap_3'*). Amplituda $(-8,01 \pm 7,86)$



Rys. 21. Obraz wejściowy po filtrowaniu (patrz rys. 3)

nie reprezentują filtru Laplace'a. Dwie pierwsze są indukowane przez stacjonarny operator Kleina-Gordona i pomimo tego, że jest to też równanie typu eliptycznego, to nie jest jednak równaniem Laplace'a i ma inne własności.

Zachowując formalizm matematyczny, dwie pierwsze maski (37) należałoby nazywać maskami filtrów Kleina-Gordona. Ich Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego, są następujące:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \widehat{ABC} \quad \overline{\nabla^2 u} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{h^2} \right) u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 0(h^4)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \overline{\nabla^2 u} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{h^2} \right) u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + O(h^4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Lu = -\frac{1}{h^2} u + h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + (h^6).$$

gdzie: $(\nabla^2 - m^2)$ — stacjonarny operator Kleina-Gordona, $m^2 = 1/h^2$, $m > 0$.

Inne pochodzenie mają natomiast maski prezentowane poniżej:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\nabla^2 u} = \left(\nabla^2 + \frac{1}{h^2} \right) u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + O(h^4)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \overline{\nabla^2 u} = \left(\nabla^2 + \frac{1}{h^2} \right) u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + O(h^4).$$

Są one indukowane przez operator Helmholtza $(\nabla^2 + k^2)$ (eliptycznego typu) i też można je zaliczyć do grupy filtrów górnoprzepustowych, $k^2 = 1/h^2$, $k > 0$.

4. Zestawienie masek filtru Laplace'a

Na zakończenie przedstawiamy zwarty opis omówionych tu masek indukowanych przez operator Laplace'a (tab. 1). W zestawieniu zawarta jest pełna postać maski oraz Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego.

TABELA 1

Filtry, maski oraz Π -formy pierwszych przybliżeń różniczkowych

Filtr	Maska	Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego
Klasyczny pięciopunktowy	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + O(h^4)$

cd. tabeli 1

Dziewięciopunktowy (7)	$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4)$
Dziewięciopunktowy (9)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4)$
Dziewięciopunktowy piątego stopnia czwartego rzędu $0(h^4)$	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 1 & -16 & 60 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + 0(h^4)$
Trzynastopunktowy piątego stopnia	$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -24 & 2 & 0 \\ 1 & -24 & 84 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & -24 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4)$
25-punktowy piątego stopnia (Kupidury, Kozy i Marciniaka)	$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{17h^2}{60} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4)$
Dziewięciopunktowy MES	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4)$
Trzeciego stopnia (25)	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4)$
Trzeciego stopnia (27) (nie jest to maska Laplace'a)	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$	$Lu = h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + (h^6)$
Piątego stopnia (31)	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 8 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{7h^2}{20} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{31h^2}{30} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4)$

cd. tabeli 1

Trzeciego stopnia (37)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4)$
------------------------	---	--

5. Podsumowanie

W pracy omówiono wybrane własności dziesięciu masek konwolucyjnych filtrów Laplace'a. Przedstawiono ich Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego — i na ich podstawie określono rząd dokładności każdej z nich. Podjęto również próbę uporządkowania terminologii — nie zawsze precyzyjnej. Zaproponowano procedurę porównywania masek.

Maski wielu krawędziowych filtrów Laplace'a charakteryzują się tym, że połowa sumy bezwzględnych wartości ich elementów (czyli wag) przypada na wagę punktu środkowego. Widzimy to w opisach (3), (7), (18), (22) i (25). W pozostałych opisach relacja ta kształtuje się następująco: opis (9) — $^{12}/_{32}$, (16) — $^{14}/_{32}$ —, (13) — $^{15}/_{32}$. Najmniejszą wartość — $^8/_{56}$ — charakteryzuje się opis *Lap*₁₀ (31). Oznacza to, że po zastosowaniu maski (31) charakterystyka danego piksela w procesie konwolucji będzie najslabiej zachowana. W oddziaływaniu kontekstowym wartości punktu centralnego zawsze są tworzone przez punkty sąsiednie. W związku z tym: im większa wartość wagi punktu centralnego, tym bardziej jego charakterystyka wpływa na wynik procesu filtrowania, czyli tym bardziej zbliża się do bezkontekstowej (punktowej) transformacji wartości pikseli.

Maska *Lap*₉ (27) z wartością $^8/_{32}$ i brakiem korelacji z operatorem Laplace'a nie powinna być używana w opisanych tu badaniach. Chociaż jej własności mogą być wykorzystywane w innych obszarach.

Artykuł wpłynął do redakcji 9.12.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2011 r.

LITERATURA

- [1] M. BORAWSKI, *Obróbka wstępna obrazów*, [w:] *Metody Nawigacji Porównawczej*, pod red. A. Statecznego, Gdańskie Towarzystwo Naukowe, Gdynia, 2004.
- [2] W. BURGER, M.J. BURGE, *Digital Image Processing. An Algorithmic Introduction Using Java*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
- [3] G.C. COHEN, *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equation*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] D.R. DURRAN, *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] A. ISERLES, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, University Press, Cambridge, 2009.

- [6] B. JÄHNE, *Digital Image Processing*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [7] J.M. JASIŃSKI, K. KROSZCZYŃSKI, Cz. RYMARZ, I. WINNICKI, *Satelitarne obrazy procesów atmosferycznych kształtujących pogodę*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.
- [8] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, *Kompozycje barwne w interpretacji zachmurzenia konwekcyjnego*, Biul. WAT, 61, 1, 2012.
- [9] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, S. PIETREK, J. JASIŃSKI, K. KROSZCZYŃSKI, *Spektralne własności filtrów Laplace'a trzeciego stopnia w przetwarzaniu danych cyfrowych*, Biul. WAT, 61, 1, 2012.
- [10] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, K. KROSZCZYŃSKI, S. PIETREK, J. JASIŃSKI, *Spektralne własności filtrów Laplace'a piątego stopnia w przetwarzaniu danych cyfrowych*, Biul. WAT (złożony do druku).
- [11] P. KUPIDURA, P. KOZA, J. MARCINIĄK, *Morfologia matematyczna w teledetekcji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2010.
- [12] Y. OGURA, *On the truncation error which arises from the use of finite differences in the Laplacian Operator*, Journal of Meteorology, 15, 1958, 475-478.
- [13] J.C. STRIKWERDA, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [14] R. TADEUSIEWICZ, P. KOROHODA, *Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów*, Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków, 1997. Monografia dostępna również pod adresem internetowym: <http://winntbg.bg.agh.edu.pl/skrypty2/0098/>.
- [15] Z. WRÓBEL, R. KOPROWSKI, *Praktyka przetwarzania obrazów z zadaniami w programie Matlab*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2008.

K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, J. JASIŃSKI,
K. KROSZCZYŃSKI, S. PIETREK

Matrices of selected Laplace contour filters used for digital data processing

Abstract. The paper presents the properties of the most commonly used third and fifth order Laplace contour filters (context operators) including the differential schemes used for deriving them. The finite differences and finite element (MES) methods with the solution approximation by means of the bilinear functions (Lagrange space of the finite element) are used to construct the schemes. New convolution matrices, induced by the differential schemes of the Laplace operator, are proposed.

A Π — form of the first differential approximation of the scheme is attributed to each of the ten discussed matrices. Using it enables us to determine the order of the differential scheme approximating the ∇^2 operator, and hence — the order of the matrix (matrix order and matrix grade are different indicators). Furthermore, (and this is the most important issue) it unambiguously enables us to determine whether a matrix is really a Laplace one. The paper explains the mathematical basics and origin of a few practically applied Laplace filters and it draws attention to some inaccuracies (repeated in some publications) occurring in their discrete descriptions. The consequences of the inaccuracies are presented on a few selected satellite images of cloud cover fields including a well developed Cumulonimbus cloud (treated as digital objects recorded with significant compression) and on 2D and 3D graphs generated in Matlab[®]. Elements which should compulsorily be taken into account in the procedure of linear filters matrices comparison are indicated.

This is a theoretical work. The basic research conducted here refers to a few practical examples which are illustrations of the derived conclusions. We are aware of the fact that unambiguous and even categorical final statements as well as indication of areas of the results application always require long term experiments and frequent dissemination of the results. Therefore, we present only a concise procedure of determination of the mathematical properties of the Laplace contour filters matrices.

Laplace filters matrices consideration from the point of view of numerical methods is another important aspect of the discussion presented here. Each matrix is another differential scheme applicable to computational methods. It is a different method of approximated solving of second order differential equations in which the ∇^2 operator occurs (diffusion, wave, Laplace and other equations) — see [2-6, 12, 13]. With this approach, the properties of the analyzed matrices, even seemingly alike in the process of digital images filtering, should be taken into account during solving selected issues of the mathematical physics. These properties include: spectral transfer operator, approximation order and the diffusion-creation relation which is discussed in [9, 10].

Keywords: matrices of third and fifth order linear Laplace filters, differential methods, differential approximation form