



# Dynamiczne parametry mechaniczne materiału sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem.

## I. Rozważania teoretyczne

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ MAGIER<sup>1</sup>

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

<sup>1</sup>Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,  
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

**Streszczenie.** Przedstawiono teoretyczną analizę określania dynamicznych parametrów mechanicznych materiałów sztywno-plastycznych z liniowym wzmocnieniem. Wykorzystano do tego celu test Taylora, tj. prostopadłe zderzenie płasko zakończonego długiego pręta wykonanego z testowanego materiału ze sztywną płaską tarczą. Wyprowadzono analityczne przestępne równania, z których określa się explicite dynamiczną granicę plastyczności  $Y_w$  i odkształcenie trwałe (plastyczne) za pomocą zmierzonych długości nieodkształconej części pręta  $l_j$  i odcinka odkształconego plastycznie  $h_p$ . Praca stanowi skromny wkład uzupełniający wiedzę z zakresu dynamicznej plastyczności i ma walory aplikacyjne w inżynierii materiałowej.

**Słowa kluczowe:** dynamiczne właściwości metali, obciążenie udarowe — test Taylora, dynamiczna granica plastyczności

**Symbole UKD:** 539.4.014

## 1. Wprowadzenie

Poczynając od drugiej połowy ubiegłego wieku, ciągle rośnie zainteresowanie dynamicznymi zagadnieniami teorii plastyczności i efektami rozprzestrzeniania się fal naprężeń w ośrodkach ciągłych. Już w 1953 roku problematyka ta pojawiła się w monografii poświęconej falom naprężenia [1], a następnie stała się przedmiotem rozważań zamieszczonych w wielu opracowaniach monograficznych [2-11]. Potrzeba prowadzenia takich badań wynika z chęci zapewnienia niezawodności

działania różnych części maszyn i obiektów specjalnego przeznaczenia, narażonych na dynamiczne obciążenia w warunkach ekstremalnych.

Wysiłki badaczy rozpatrujących te zagadnienia skoncentrowały się w dużej mierze na opracowaniu związków konstytutywnych w oparciu o zjawiska towarzyszące propagacji fal plastycznych w ośrodkach stałych, np. w metalach. W licznych eksperymentach przeprowadzonych przez wielu badaczy wykazano, że w niektórych metalach obciążonych udarowo stan plastyczny osiągany jest przy znacznie większych naprężeniach niż dla obciążenia statycznego. Zjawisko to zauważone zostało po raz pierwszy przez J. Hopkinsona [12] i jego syna, B. Hopkinsona [13]. Autorzy tych prac wykazali, że dynamiczna granica plastyczności dla stali jest prawie dwa razy większa od granicy statycznej.

Ważne miejsce w tych zagadnieniach zajmuje uderzeniowy test Taylora. W 1948 r. G. Taylor opracował jednowymiarową teorię plastycznych odkształceń płasko zakończonogo, długiego pręta po prostopadłym uderzeniu nim w nieodkształcalną przegrodę (płytkę) [14]. Pozwala ona za pomocą geometrycznych pomiarów odzyskanego po udarze odkształconego pręta oszacować w przybliżeniu dynamiczną granicę plastyczności jego materiału. Obszerną eksperymentalną ilustrację metody przedstawiono w [15].

Od tego czasu pojawiło się szerokie zainteresowanie badaniami udarowymi i szacowaniem dynamicznej granicy plastyczności [16-34]. Prezentowany w literaturze pogląd wskazuje, że jednowymiarowa teoria Taylora charakteryzuje się pewnymi brakami w dokładnym szacowaniu dynamicznej granicy plastyczności, szczególnie w przypadku dużych prędkości uderzenia. Z tej przyczyny wielu badaczy koreluje wyniki eksperymentalne z nowoczesnymi analizami komputerowymi, które umożliwiają stosowanie skomplikowanych postaci równań konstytutywnych opisujących materiał pręta. Za pomocą tych programów można aproksymować, uzyskane po badaniach, geometryczne wymiary próbki i dość dokładnie określić dynamiczne właściwości jej materiału. Wadą metod komputerowych jest znaczny koszt programów i to, że bardzo często wymagają one dużo czasu do ich realizacji.

Pomimo ogromnych możliwości współczesnych technik obliczeniowych, proste jednowymiarowe teorie inżynierskie, dające możliwości analitycznych rozwiązań, nie straciły na znaczeniu. Takie teorie często dają badaczom możliwości wglądu we wzajemne oddziaływanie fizycznych parametrów badanego problemu i ich relację do wyniku zdarzenia przypadkowego. Te wzajemne oddziaływania są często trudne do określenia za pomocą obliczeń komputerowych. Ponadto, proste teorie inżynierskie dostarczają również podstaw do projektowania eksperymentów i fizycznej interpretacji ich wyników.

Klasyczna teoria Taylora [14] oparta jest na wielu założeniach upraszczających i dlatego jej zastosowanie jest ograniczone do małych prędkości uderzenia. Na przykład w równaniu ruchu nieodkształconej części pręta nie uwzględniono ubytku masy jej elementu, który przechodzi w procesie udaru do strefy odkształceń plastycznych.

Poprawne równanie wyprowadzono w publikacjach [24] i [27], które wykorzystamy w niniejszej pracy.

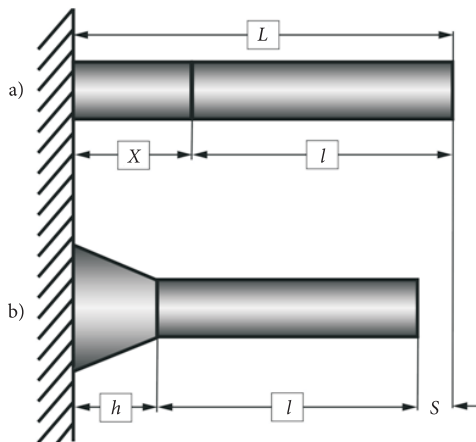
Prezentowana praca zawiera analityczne rozwiązanie zagadnienia prostopadłego uderzenia pręta w sztywną płaską płytę. Pozwala to określić *explicit*e dynamiczną granicę plastyczności materiału pręta i trwałe jego odkształcenie.

Materiał pręta aproksymowano modelem sztywno-plastycznym z liniowym wzmocnieniem.

## 2. Sformułowanie problemu

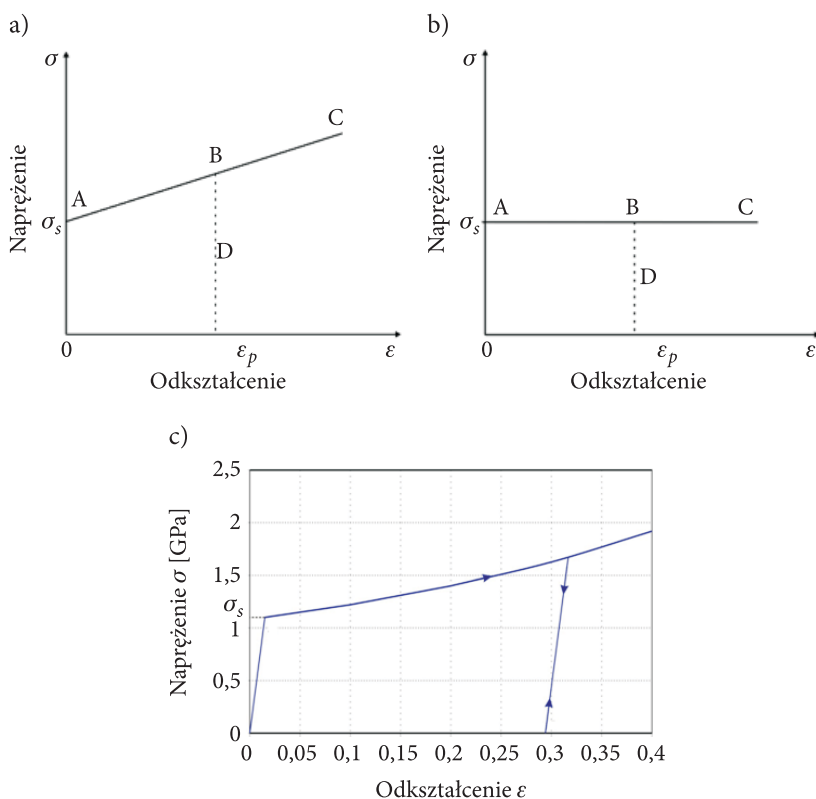
Jak już zaznaczono wcześniej, w niniejszej pracy stosujemy teorię przedstawioną w publikacji [24].

Rozważmy jednorodny pręt (pocisk) o początkowej długości  $L$  i polu poprzecznego przekroju  $A_0$ , który uderza prostopadle w sztywną przegrodę z początkową prędkością  $V$ . Niech  $x$  oznacza współrzędną Lagrange'a skierowaną wzdłuż osi pręta i mającą początek na jego końcu przeciwnym do końca uderzającego. Końce pręta są płaskie. Zakładając, że prędkość uderzenia jest dostatecznie duża, część pręta będzie odkształcać się plastycznie. Niech  $X(t)$  reprezentuje zmienny w czasie rozmiar strefy plastycznej zmierzony względem konfiguracji początkowej (rys. 1a),  $S(t)$  – zależne od czasu przemieszczenie tylnego końca pręta i  $h(t)$  – zmienny w czasie rozmiar strefy odkształconej plastycznie zmierzonej względem zdeformowanej konfiguracji pręta (rys. 1b). Dodatkowo oznaczymy przez  $l(t)$  długość strefy nieodkształconej pręta, tak że  $l(t) = L - X(t)$  lub  $l(t) + X(t) = S(t) + l(t) + h(t) = L = \text{const}$ .



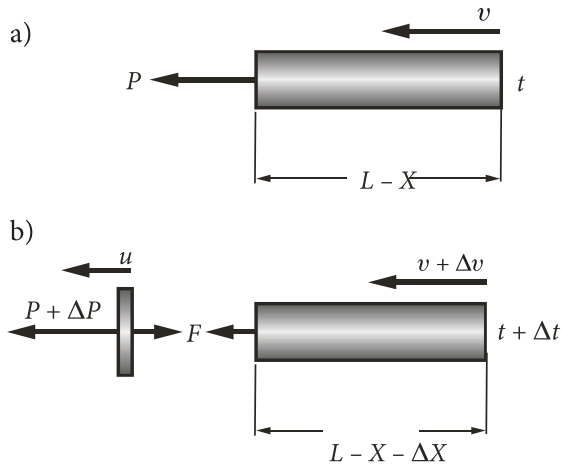
Rys. 1. Schematyczna ilustracja pocisku uderzającego w sztywną przegrodę: a) konfiguracja początkowa pocisku; b) konfiguracja pocisku zdeformowanego

Założmy, że materiał pręta jest aproksymowany sztywno-plastycznym modelem z liniowym wzmocnieniem (rys. 2a) i jego gęstość nie zmienia się ( $\rho = \text{const}$ ). Sztywno-idealnie plastyczny materiał (rys. 2b) rozpatrzono w pracach [14] i [24].



Rys. 2. Zależności  $\sigma$ – $\varepsilon$  dla materiałów sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznego; a) wzmocnienie liniowe; b) idealna plastyczność; c) sprężysto-plastyczny (stal chromowo-niklowa)

Rozważmy ruch sztywnej części pręta. W dowolnej chwili  $t$ , podczas odkształcania pręta w procesie zderzenia przyjmujemy, że długość nieodkształconej jego części jest  $L-X(t)$  i zakładamy, że  $(dS/dt) = \dot{S}(t) = v(t)$  jest jej bieżącą prędkością przemieszczania się w kierunku osiowym (rys. 3a). Jak pokazano na rysunku 3b, element sztywnej części pręta  $\Delta l$  w przedziale czasu  $\Delta t$  uległ odkształceniu plastycznemu i ma nowe pole przekroju poprzecznego  $A_1$ . Prędkość tego elementu jest oznaczona przez  $u$  i różni się od prędkości pozostałej sztywnej części pręta  $(v + \Delta v)$ . Siły, które działają na plastycznie odkształcony element, generowane są przez jego wzajemne oddziaływanie z sekcją nieodkształconą, oznaczono je przez  $F$  na rysunku 3b, oraz jego wzajemne oddziaływanie z uprzednio zdeformowanym materiałem, oznaczone jako  $(P + \Delta P)$ .



Rys. 3. Schematyczna ilustracja transferu masy elementu  $\Delta l$  z sekcji sztywnej do części odkształconej w przedziale czasu  $\Delta t$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona liniowa zmiana pędu rozpatrywanego układu w przedziale czasu  $\Delta t$  równa się całkowitemu impulsowi działających nań sił, mamy zatem:

$$\rho A_0 \Delta X u + \rho A_0 (L - X - \Delta X)(v + \Delta v) - \rho A_0 (L - X)v = 1/2(2P + \Delta P)\Delta t,$$

gdzie  $(2P + \Delta P)/2$  jest średnią wartością sił  $2P$  i  $\Delta P$ .

Po podzieleniu obydwóch stron tego równania przez  $\Delta t$ , i określeniu granic dla  $\Delta t \rightarrow 0$  oraz pominięciu małych wyższego rzędu, otrzymuje się:

$$(L - X)\dot{v} - (v - u)\dot{X} = P/\rho A_0, \quad (2.1)$$

gdzie  $\dot{v} = dv/dt$  i  $\dot{X} = dX/dt$ .

Oznaczmy przez  $\sigma$  i  $\epsilon_p$  nominalne (inżynierskie) naprężenie i odkształcenie w przekroju  $A_1$  odkształconego pręta. Wówczas  $P = \sigma A_1$ , a ponieważ  $\epsilon_p = (A_0/A_1) - 1$  dla materiału ze stałą gęstością, więc:

$$P = \sigma(\epsilon_p)A_0/(1 + \epsilon_p). \quad (2.2)$$

Dalej, zgodnie z rysunkiem 3a jest

$$l = L - X \quad \text{lub} \quad X = L - l. \quad (2.3)$$

Po uwzględnieniu (2.2) i (2.3), równanie (2.1) można przekształcić do postaci:

$$l\dot{v} + \dot{l}(v - u) = f(\varepsilon_p) / \rho, \quad (2.4)$$

gdzie  $f(\varepsilon_p) = \sigma(\varepsilon_p) / (1 + \varepsilon_p), \quad \dot{l} = dl/dt. \quad (2.5)$

Wyrażenie (2.4) jest ścisłym równaniem ruchu sztywnej (nieodkształconej) części pręta. Będziemy je rozwiązywać w dalszym ciągu rozważań.

### 3. Ogólne rozwiązanie uproszczonego ( $u = 0$ ) równania ruchu (2.4)

Wcześniej założyliśmy, że materiał pręta jest sztywno-plastyczny z liniowym wzmocnieniem (rys. 2a). Pręt uderza prostopadle z dostatecznie dużą prędkością  $V$  w sztywną płaską tarczę. W takich warunkach w przecie generowana jest podczas zderzenia fala plastyczna [34]. Fala ta propaguje się od tarczy w kierunku swobodnego końca pręta z prędkością

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}, \quad (3.1)$$

gdzie  $E_1$  jest modułem liniowego wzmocnienia materiału pręta.

Z danych eksperymentalnych i obliczeń numerycznych [26] oraz z zamkniętych, analitycznych rozwiązań falowych [34] wynika, że moduł  $E_1$  słabo zależy od prędkości uderzenia  $V$  i można przyjąć, że prędkość  $a_1 \approx \text{const}$ .

Odształcona plastycznie część pręta, zawarta między tarczą i frontem fali plastycznej, dla materiału sztywno-plastycznego, podczas procesu zderzenia jest nieruchoma [34], tj.  $u = 0$ .

Dla  $u = 0$  z równania (2.4) wynika, że

$$d(lv) / dt = f(\varepsilon_p) / \rho. \quad (3.2)$$

Dalej, z ciągłości przemieszczenia Langrange'a na froncie fali plastycznej mamy:

$$U[X(t), t] = -S$$

i po zróżniczkowaniu względem czasu  $t$ , otrzymuje się:

$$-\varepsilon_p \dot{X} + u = \varepsilon_p \dot{l} + u = \dot{S} = v, \quad (3.3)$$

gdzie

$$\varepsilon_p = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad u = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Z zależności (3.3) dla  $u = 0$  bezpośrednio wynika, że:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v}{\varepsilon_p}. \quad (3.4)$$

Następnie zgodnie z rysunkiem 1 mamy:

$$S + l + h = L,$$

a po zróżniczkowaniu względem czasu jest

$$\dot{S} + \dot{l} + \dot{h} = 0 \quad (3.5)$$

lub

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} = -(a_1 + v), \quad (3.6)$$

gdzie  $\dot{h} = a_1$ ,  $\dot{S} = v$ ,  $a_1 > 0$ .

Ostatecznie z równań (3.4) i (3.6) wynika, że

$$\varepsilon_p = -\frac{v}{a_1 + v}. \quad (3.7)$$

Z kolei, kombinacja równań (3.2), (3.4) i (3.7) daje

$$\frac{d(lv)}{dl} = -\frac{f[-v/(a_1 + v)]}{\rho(a_1 + v)}. \quad (3.8)$$

Po rozdzieleniu zmiennych w równaniu (3.8) i scałkowaniu otrzymuje się ogólne rozwiązanie równania (2.4) w następującej postaci:

$$\ln \frac{l}{L} = -\int_v^v \frac{(a_1 + y)dy}{y(a_1 + y) + f[-y/(a_1 + y)]/\rho} \quad (3.9)$$

lub

$$l(v) = L \exp \left\{ \int_v^v \frac{(a_1 + y)dy}{y(a_1 + y) + f[-y/(a_1 + y)]/\rho} \right\}. \quad (3.10)$$

#### 4. Dynamiczne parametry mechaniczne materiału pręta dla modelu sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem

Zgodnie z rysunkiem 2a, związek między naprężeniem  $\sigma$  i odkształceniem  $\varepsilon_p$  ma postać:

$$\sigma = \sigma_s + E_1 \varepsilon_p = \sigma_s + \rho a_1^2 \varepsilon_p$$

i funkcję  $f(\varepsilon_p)$  (2.5)<sub>1</sub> można określić wzorami

$$f(\varepsilon_p) = \frac{\sigma(\varepsilon_p)}{1 + \varepsilon_p} = \frac{\sigma_s + \rho a_1^2 \left( -\frac{v}{a_1 + v} \right)}{1 - \frac{v}{a_1 + v}} \quad (4.1)$$

lub

$$f\left(-\frac{v}{a_1 + v}\right) = \frac{\sigma_s (a_1 + v)}{a_1} - \rho a_1 v, \quad (4.2)$$

gdzie  $\sigma_s$  jest granicą plastyczności materiału pręta bez wzmocnienia, a  $\varepsilon_p$  oznacza podłużne odkształcenie plastyczne (trwałe) pręta.

W celu uproszczenia zapisów dalszych rozważań, wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho V^2}{\sigma_s}, & \alpha^* &= \frac{\rho V^2}{Y_w}, & \beta^* &= \frac{a_1}{V}, & \gamma &= \frac{v}{V}, \\ \xi &= \frac{l}{L}, & \xi_f &= \frac{l_f}{L}, & \xi_p &= \frac{h_f}{L}, & \xi_L &= \frac{L_f}{L}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie symbole  $Y_w$  i  $l_f$  odpowiednio oznaczają: dynamiczną granicę plastyczności dla materiału z liniowym wzmocnieniem i końcową długość nieodkształconego odcinka pręta,  $L_f$  jest całkowitą długością pręta odkształconego po uderzeniu, a  $h_f$  — długością części odkształconej plastycznie.

Po podstawieniu funkcji (4.2) do równania (3.9) i wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (4.3), otrzymuje się:

$$\ln \xi = \int_1^{\xi} \frac{\beta^* + \gamma_1}{\gamma \gamma_1^2 + \frac{1}{\alpha \beta^*} \gamma_1 + \frac{1}{\alpha}} d\gamma_1. \quad (4.4)$$



Prawą stroną równania (4.4) można przedstawić w postaci następujących funkcji:

$$F_1(\alpha, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha\beta^*} \right) \ln \left[ \frac{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}}{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}} \left( \frac{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}}{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \frac{1}{\alpha}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} \gamma + \frac{1}{\alpha}} \right| \quad \text{dla } \Delta > 0 \quad (4.5)$$

$$F_2(\alpha, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left( 2\beta^* - \frac{1}{2\alpha\beta^*} \right) \operatorname{arctg} \frac{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*}}{\sqrt{-\Delta}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} \gamma + \frac{1}{\alpha} \right| \quad \text{dla } \Delta < 0 \quad (4.6)$$

$$F_3(\alpha, \gamma) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \frac{1}{\alpha}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} \gamma + \frac{1}{\alpha}} \right| - \frac{\beta^*}{1 + 2\alpha\beta^* \gamma} + \frac{\beta^*}{1 + \alpha\beta^*} \quad \text{dla } \Delta = 0, \quad (4.7)$$

gdzie

$$\Delta = \left( \frac{\sigma_s}{\rho V^2} \right)^2 \left( \frac{V}{a_1} \right)^2 - \frac{4\sigma_s}{\rho V^2} = \left( \frac{1}{\alpha\beta^*} \right)^2 - \frac{4}{\alpha}. \quad (4.8)$$

Zgodnie z oznaczeniami (4.3) wielkość  $\alpha$  jest ujemna ( $\sigma_s < 0$  – ściskanie) i dlatego w rozpatrywanym problemie  $\Delta > 0$ , zatem w rozwiązaniu badanego zagadnienia obowiązuje funkcja  $F_1(\alpha, \gamma)$ .

Relacje (4.4) i (4.5) prowadzą do bezpośredniej zależności długości  $l$  ( $\xi = l/L$ ) od prędkości  $v$  ( $\gamma = v/V$ ), a mianowicie:

$$\ln \xi = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \frac{1}{\alpha}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta^*}\gamma + \frac{1}{\alpha}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha\beta^*} \right) \ln \left| \frac{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}}{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}} \frac{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}}{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}} \right| \quad (4.9)$$

lub

$$\xi = \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \frac{1}{\alpha}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta^*}\gamma + \frac{1}{\alpha}} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}}{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}} \frac{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}}{2\gamma + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}} \right|^{\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha\beta^*} \right)} \quad (4.10)$$

Na końcu procesu zderzenia mamy:  $l = l_f(\xi = \xi_f)$  i  $v = 0$ . Wówczas równanie (4.10) można zredukować do postaci:

$$\xi_f = \frac{l_f}{L} = \left| 1 + \alpha + \frac{1}{\beta^*} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} - \sqrt{\Delta}}{2 + \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta}} \frac{1}{\alpha\beta^*} + \sqrt{\Delta} \right|^{\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha\beta^*} \right)} = \Phi(\alpha). \quad (4.11)$$

W ten sposób problem zredukowano do rozwiązania równania przestępnego (4.11), z którego określa się parametr  $\alpha^*$  dla uzyskanej eksperymentalnie wielkości  $\xi_f = l_f/L$ . Z analizy funkcji  $\Phi(\alpha)$  wynika, że istnieje jeden pierwiastek rzeczywisty  $\alpha = \alpha^*$  (rys. 4), który spełnia to równanie.

Zgodnie z wielkościami bezwymiarowymi, dynamiczną granicę plastyczności dla materiału sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem określamy za pomocą wzoru:

$$Y_w = \frac{\rho V^2}{\alpha^*}. \quad (4.12)$$

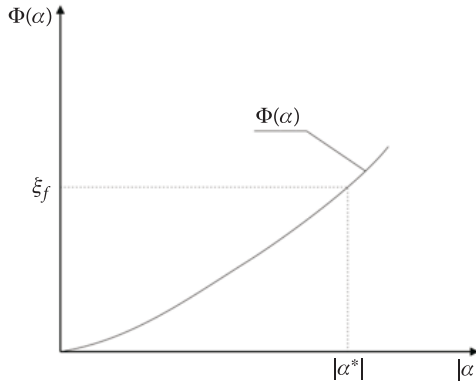
Analogiczne równanie przestępne dla materiału sztywno-idealnie plastycznego (rys. 2b) wyprowadzono w pracy [24], a mianowicie:

$$\xi_p = \frac{\beta^* (1 - \xi_f)^2}{1 + \beta^* (1 - \xi_f)} - \left[ \frac{\beta^* \xi_f (1 - \xi_f)}{1 + \beta^* (1 - \xi_f)^2} \right] \ln \frac{\beta^* \xi_f}{1 + \beta^*}, \quad (4.13)$$

$$\alpha^* = \frac{1 - \xi_f}{\beta^*}; \quad Y_J = \frac{\rho V^2}{\alpha^*}. \quad (4.14)$$

Z równania (4.13) dla danych wartości  $\xi_p, \xi_f$  zmierzonych na odkształconym przecie, określa się wartość parametru  $\beta^*$ .

Dla sztywno-idealnie plastycznego materiału pręta Taylor wyprowadził uproszczony wzór w następującej postaci:



Rys. 4. Schemat określania parametru  $\alpha^*$

$$Y_T = \frac{1 - \xi_f}{2(1 - \xi_L)} \frac{\rho V^2}{\ln(1 / \xi_f)}. \quad (4.15)$$

Obecnie przejdziemy do określenia odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_p$ . Parametr ten zdeterminowany jest wzorem:

$$\varepsilon_p(\xi) = -\frac{v(\xi)}{a_1 + v(\xi)} = -\frac{\gamma(\xi)}{\beta^* + \gamma(\xi)}, \quad (4.16)$$

gdzie wielkość  $\gamma$  musi spełniać następujące równanie przestępne:

$$\xi = \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \frac{1}{\alpha^*}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} \gamma + \frac{1}{\alpha^*}} \right|^{1/2} \left| \frac{2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} - \sqrt{\Delta^*}}{2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \sqrt{\Delta^*}} \frac{2\gamma + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \sqrt{\Delta^*}}{2\gamma + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} - \sqrt{\Delta^*}} \right|^{\frac{1}{\sqrt{\Delta^*}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha^* \beta^*} \right)}, \quad (4.17)$$

gdzie 
$$\Delta^* = \left( \frac{1}{\alpha^* \beta^*} \right)^2 - \frac{4}{\alpha^*}, \quad \xi_f \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Okazuje się, że pierwszy człon prawej strony równania (4.17) można z dokładnością do ułamka procentu przyrównać do 1, tj.:

$$\left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \frac{1}{\alpha^*}}{\gamma^2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \frac{1}{\alpha^*}} \right|^{1/2} \approx 1,$$

i wówczas równanie (4.16) redukuje się do postaci:

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{2} \frac{a - bd\xi^{\frac{1}{c}}}{d\xi^{\frac{1}{c}} - 1}, \quad (4.18)$$

gdzie:  $a = \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \sqrt{\Delta^*}$ ,  $b = \frac{1}{\alpha^* \beta^*} - \sqrt{\Delta^*}$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\Delta^*}} \left( \beta^* - \frac{1}{2\alpha^* \beta^*} \right)$ ,

$$d = \frac{2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} + \sqrt{\Delta^*}}{2 + \frac{1}{\alpha^* \beta^*} - \sqrt{\Delta^*}}. \quad (4.19)$$

Ostatecznie odkształcenie  $\varepsilon_p$  można określić explicite za pomocą wzoru:

$$\varepsilon_p(\xi) = \frac{a - bd\xi^{\frac{1}{c}}}{d(2\beta^* - b)\xi^{\frac{1}{c}} + a - 2\beta^*}, \quad \xi_f \leq \xi \leq 1, \quad (4.20)$$

$$\xi_f \leq \xi \leq 1, \quad \varepsilon_p(\xi_f) = 0, \quad |\varepsilon_p(1)| = |\varepsilon_{p \max}| = \frac{1}{\beta^* + 1}.$$

W ten sposób uzyskaliśmy komplet analitycznych zamkniętych wzorów, które umożliwiają analizę dynamicznych wartości parametrów  $Y_w$  i  $\varepsilon_p$  dla materiału sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem obciążonego udarowo. Wyniki eksperymentalne wraz z analizą uzyskanych z obliczeń wartości parametrów przedstawimy w oddzielnym opracowaniu.

Pracę zrealizowano w ramach projektu rozwojowego Nr OR00001008 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2009-2011.

Artykuł wpłynął do redakcji 11.02.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w marcu 2010 r.

## LITERATURA

- [1] H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [2] N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [3] R. KINSLOW, *High-velocity impact phenomena*, Academic Press, New York, 1970.
- [4] J. HENRYCH, *The dynamics of explosion and its use*, Academia, Praga, 1979.
- [5] J. A. ZUKAS, *Impact dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [6] K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa, 1974.
- [7] P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa, 1966.
- [8] S. KALISKI, Z. DŻYGADŁO, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa, 1966.
- [9] X. A. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Физ. Мат. Лит., Москва, 1961.
- [10] Г. С. ШАПИРО, *Проблемы динамики упруго-пластических сред*, Механика, т. 5, И. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный (ред), Мир, Москва, 1975.
- [11] U. S. LINDHOLM (ed), *Mechanical behavior of materials under dynamic loads*, Springer, New York, 1968.
- [12] J. HOPKINSON, *On the rupture of iron wire by blow*, Proc. Man. Lit. Phil., 11, 40, 1972 oraz *Futher experiments on the rupture of iron wire*, Proc. Man. Lit. Phil., 11, 15, 1872.
- [13] B. HOPKINSON, *The effects of momentary stress in metals*, Proc. Roy. Soc. A, 74, 498, 1905.
- [14] G. I. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. I. Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc., Load. A, 1948.
- [15] A. C. WHIFFIN, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials*, Proc. Roy. Soc., Load. A, 1948.
- [16] G. I. BARENBLATT, A. I. ISHLINSKII, *On the impact of a viscoplastic bar on a rigid wall*, Pirkh. Math. Mekh., 26, 1962, 497.
- [17] J. D. CINNAMON, S. E. JONES, JR J. C. FOSTER, P. P. GILLIS, *An analysis of early time deformation rate and stress in the Taylor impact test*, Mechanical Behavior of Materials VI, Proc. of the Sixth Int. Materials Conf., Kyoto, Japan, vol. 1, July 1991, eds. M. Jano, T. Inouc, p. 337.
- [18] J. C. FOSTER, JR., P. J. MAUDLIN, S. E. JONES, *On the Taylor test, Part I: A continuum analysis of plastic wave propagation*, Proc of the 1995 APS Topical Conf. An Shock Compression of Condensed Matter, Seattle, Washington, August 1995, p. 291.
- [19] J. B. HAWKYARD, D. EASOTON, W. JOHNSON, *The mean dynamic yield strength of copper and low carbon steel at elevated temperatures from measurements of the "mushrooms" of flat-ended projectiles*, Int. J. Mech. Sci., 10, 1968, 929.
- [20] J. B. HAWKYARD, *A theory for the mushrooming of flat-ended projectiles impinging on a flat rigid anvil, using energy considerations*, Int. J. Mech. Sci., 11, 1969, 313.
- [21] I. M. HUTCHINGS, *Estimation of yield stress in polymers at high strain-rates using G. I. Taylor's impact technique*, J. Mech. Phys. Solids, 26, 1979, 289.
- [22] G. R. JOHNSON, T. J. HOLMQUIST, *Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants*, J. Appl. Phys., 64, 1988, 3901.
- [23] S. E. JONES, P. P. GILLIS, JR J. C. FOSTER, L. L. WILSON, *A one-dimensional two-phase flow model for Taylor impact specimens*, J. Engr. Mat'ls. Tech. Trans. ASME, 113, 1991, 228.
- [24] S. E. JONES, P. P. GILLIS, JR., J. C. FOSTER, *On the equation of motion of the undeformed section of a Taylor impact specimen*, J. Appl. Phys., 61, 1987, 499.

- [25] S. E. JONES, P. J. MAUDLIN, P. P. GILLIS, JR., J. C. FOSTER, *An analytical interpretation of high strain rate materials behavior during early time plastic deformation in the Taylor impact test*, Computers in Engineering 1992, ed. G. A. Gabriele, 2, ASME, New York, 1992, 173.
- [26] E. H. LEE, S. J. TUPPER, *Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1954, 21, 63.
- [27] P. J. MAUDLIN, J. C. FOSTER JR., S. E. JONES, *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Impact Engng, 19, 1997, 95.
- [28] P. J. MAUDLIN, JR., J. C. FOSTER, S. E. JONES, *On the Taylor test, Part III: A continuum mechanics code analysis of plastic wave propagation*, Los Alamos National Laboratory report LA-12836-MS, November 1994.
- [29] P. J. MAUDIN, R. F. DAVIDSON, R. J. HENNINGER, *Implementation and assessment of the mechanical-threshold-stress model using the EPIC2 and PINON computer codes*, Los Alamos National Laboratory report LA-11895-MS, September 1990.
- [30] M. A. MEYERS, *Dynamic behavior of materials*, John Wiley and Sons, INC, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore, 1994.
- [31] T. C. T. TING, *Impact of a nonlinear viscoplastic rod on a rigid wall*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 33, 1966, 505.
- [32] L. L. WILSON, J. W. HOUSE, M. E. NIXON, *Time resolved deformation from the cylinder impact test AFATL-TR-89-76*, November 1989.
- [33] E. WŁODARCZYK i in., *Oszacowanie dynamicznej granicy plastyczności wybranych stali łuskowych za pomocą testu Taylora*, Biul. WAT, 56, 1, 2007, 113-126.
- [34] E. WŁODARCZYK, A. JACKOWSKI, *O falowej metodzie określania dynamicznych parametrów mechanicznych sprężysto-plastycznego materiału z liniowym wzmocnieniem za pomocą testu Taylora*, Buil. WAT, 59, 2010.

E. WŁODARCZYK, M. MAGIER

### Dynamic mechanical parameters of rigid-plastic material with linear strain hardening. I. Theoretical considerations

**Abstract.** The theoretical analysis of the determination of the dynamic mechanical parameters of the rigid-plastic material with linear strain hardening is presented in this paper. For this purpose, the Taylor's impact test, i.e., perpendicular impact of the long rod on a flat rigid target has been used. The rod is made of tested material. The transcendental equations which determine explicitly the dynamic yield stress  $Y_w$  and the plastic strain  $\epsilon_p$  have been derived. This paper supplements knowledge on dynamical properties of metals and has application values in materials engineering.

**Keywords:** dynamic behaviour of metals, Taylor impact test, dynamic yield stress

**Universal Decimal Classification:** 539.4.014