



O falowej metodzie określania dynamicznych parametrów mechanicznych sprężysto-plastycznego materiału z liniowym wzmocnieniem za pomocą testu Taylora

EDWARD WŁODARCZYK, ADAM JACKOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki, Instytut Techniki Uzbrojenia,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Opracowano prostą inżynierską metodę określania dynamicznych parametrów mechanicznych materiałów sprężysto-plastycznych z liniowym wzmocnieniem. Wykorzystano do tego celu test Taylora, tj. prostopadłe zderzenie długiego pręta z płaską sztywną płytą. W oparciu o ściśle falowe rozwiązanie tego zagadnienia początkowo-brzegowego, wyprowadzono zamknięte algebraiczne wzory, określające prędkość propagacji fali plastycznej w przecię i dynamiczną granicę plastyczności materiału pręta.

Praca uzupełnia wiedzę o dynamicznych właściwościach materiałów, szczególnie metali, i ma walory aplikacyjne w inżynierii materiałowej.

Słowa kluczowe: dynamiczne parametry mechaniczne metali, obciążenia udarowe — test Taylora, dynamiczna granica plastyczności

Symbole UKD: 539.4.014

1. Wprowadzenie

W 1948 roku Taylor opracował jednowymiarową teorię plastycznych odkształceń płasko zakończonego długiego pręta po prostopadłym uderzeniu nim w sztywną płaską tarczę (płytę) [1]. Teoria ta pozwala oszacować dynamiczną wartość granicy plastyczności materiału pręta na podstawie geometrycznego obrazu odkształconego plastycznie pręta podczas udaru. Obszerną eksperymentalną ilustrację tej metody przedstawiono w pracy [2].

Od tego czasu nastąpiło szerokie zainteresowanie testem uderowym i szacowaniem wartości dynamicznej granicy plastyczności [3-21]. Selektywny przegląd literatury dotyczącej tego problemu podany jest, między innymi, w pracach [12, 22, 23 i 25].

Prezentowany w literaturze pogląd wskazuje, że jednowymiarowa teoria Taylora wykazuje braki w dokładnym szacowaniu wartości dynamicznej granicy plastyczności, szczególnie w zakresie dużych prędkości uderzenia. Z tego powodu wielu badaczy koreluje wyniki eksperymentalne z nowoczesnymi analizami komputerowymi, które umożliwiają stosowanie złożonych postaci związków konstytutywnych, opisujących materiał pręta z uwzględnieniem efektów dynamicznych. Odpowiednie kody numeryczne dokładnie aproksymują kształt zdeformowanej plastycznie podczas uderu próbki (pręta). Pozwala to na określenie rzeczywistych dynamicznych właściwości jej materiału. Wadą metod komputerowych jest duży koszt programów. Poza tym bardzo często wymagają one dużo czasu do ich realizacji.

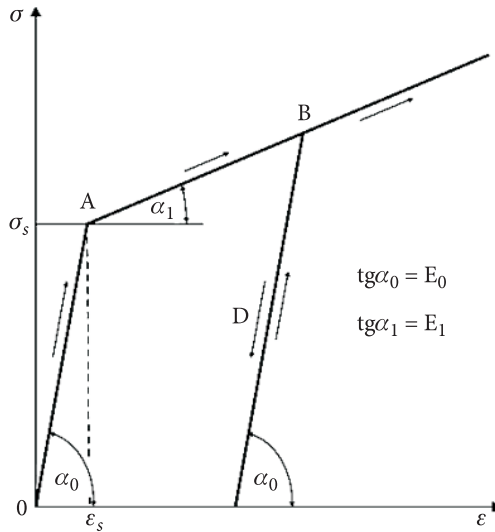
Autorzy pracy [12] twierdzą, że proste jednowymiarowe teorie inżynierskie, takie jak metoda Taylora, nie straciły jednak jeszcze na znaczeniu. Uderzeniowy test Taylora jest użytecznym eksperymentem dla oceniania mechanicznych właściwości materiału przy wysokich szybkościach odkształcania. Jest prosty w stosowaniu, powtarzalny i ekonomiczny. Takie teorie często dają badaczom wgląd we wzajemne oddziaływanie fizycznych parametrów i ich relację do wyniku danego zdarzenia. Te oddziaływania są najczęściej trudne do zauważenia w zawiłych, skomplikowanych wydrukach komputerowych. W rezultacie, proste inżynierskie teorie często dostarczają podstawy do projektowania eksperymentów i interpretacji wyników badań.

W niniejszym opracowaniu, na podstawie analizy klasycznych rozwiązań falowych jednowymiarowego problemu prostopadłego uderu długiego pręta w płaską sztywną płytę [23], podano analogiczną do testu Taylora prostą inżynierską metodę określania dynamicznych parametrów mechanicznych sprężysto-plastycznego materiału z liniowym wzmocnieniem. Wyprowadzono zamknięte algebraiczne wzory, za pomocą których można określać: dynamiczną granicę plastyczności materiału pręta, odkształcenie trwałe jego części odkształconej plastycznie, prędkość propagacji fali plastycznej i wartość części początkowej energii kinetycznej pręta, która przekształcona jest na pracę plastycznego jego odkształcania. Do realizacji tego celu potrzebne są następujące dane: długość odcinka pręta odkształconego plastycznie podczas uderzenia, początkowa prędkość prostopadłego uderzenia, moduł Younga i gęstość materiału pręta.

2. Sformułowanie problemu

Przeanalizujemy falowy stan mechanicznych parametrów w długim pręcie metalowym podczas prostopadłego uderzenia nim z prędkością v_0 w płaską sztywną płytę. Początkowa długość pręta wynosi L . Właściwości materiału pręta aprok-

symujemy dwuodcinkową krzywą naprężenie-odkształcenie ($\sigma - \varepsilon$) z liniowym wzmocnieniem w strefie odkształceń plastycznych podczas obciążania próbki. W procesie odciążania pręta zakładamy liniową zmianę naprężenia w funkcji odkształcenia (rys. 1).



Rys. 1. Dwuodcinkowy sprężysto-plastyczny związek naprężenie-odkształcenie ($\sigma - \varepsilon$) z liniowym wzmocnieniem (model Prandtla)

Matematyczny opis tego modelu w procesie obciążania zgodnie z rysunkiem 1 ma postać:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \quad \text{jeśli} \quad |\varepsilon| \leq |\varepsilon_s|, \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s) \quad \text{jeśli} \quad |\varepsilon| \geq |\varepsilon_s|,$$

natomiast w strefie odciążania próbki mamy:

$$\sigma = \sigma_0 - E_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon), \quad (2.2)$$

gdzie symbole: σ , ε , σ_s , ε_s , E_0 i E_1 odpowiednio oznaczają: umowne (nominalne) naprężenie i odkształcenie całkowite, umowną dynamiczną granicę plastyczności materiału pręta, odpowiadające jej odkształcenie sprężyste, moduł Younga i moduł liniowego wzmocnienia materiału pręta. Pozostałe symbole σ_0 i ε_0 występujące

w wyrażeniu (2.2) oznaczają wartości umownego naprężenia i odpowiadającego mu odkształcenia całkowitego na froncie fali odciążenia. Przyjmujemy, że naprężenia ściskające i odpowiadające im odkształcenia są ujemne. Rozważany materiał nie wykazuje efektu Bauchingera.

Przedstawiony model nie uwzględnia w jawnej postaci wpływu szybkości odkształcenia na dynamiczne wartości parametrów mechanicznych pręta.

W zakresie małych odkształceń ruch elementu pręta opisuje się we współrzędnych Lagrange'a x, t układem dwóch równań z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho a^2(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (2.3)$$

które można zastąpić równoważnym układem równań z pochodnymi zwyczajnymi wzdłuż charakterystyk, a mianowicie:

$$dv = \frac{d\sigma}{\rho a(\sigma)} \quad \text{dla} \quad dx = a(\sigma)dt \quad (2.4)$$

oraz

$$dv = -\frac{d\sigma}{\rho a(\sigma)} \quad \text{dla} \quad dx = -a(\sigma)dt, \quad (2.5)$$

gdzie

$$a^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0 \quad \text{lub} \quad a^2(\sigma) = \frac{1}{\rho} \frac{d\varepsilon}{d\sigma} > 0; \quad (2.6)$$

ρ jest gęstością materiału pręta, a v oznacza prędkość cząstki pręta.

Po scałkowaniu powyższych wyrażeń różniczkowych, przy założeniu, że $\rho = \text{const}$, otrzymuje się:

$$v = \frac{1}{\rho} \int \frac{d\sigma}{a(\sigma)} + B \quad \text{dla} \quad dx = a(\sigma)dt \quad (2.7)$$

oraz

$$v = -\frac{1}{\rho} \int \frac{d\sigma}{a(\sigma)} + C \quad \text{dla} \quad dx = -a(\sigma)dt, \quad (2.8)$$

gdzie stałe B i C są zdeterminowane przez warunki graniczne danego zagadnienia.

Dla zlinearyzowanej zależności $\sigma - \varepsilon$ (rys. 1), zgodnie z wyrażeniami (2.1) i (2.6), mamy:

$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_0}{\rho} = a_0^2 = \text{const} \quad (2.9)$$

w strefie odkształceń sprężystych oraz

$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_1}{\rho} = a_1^2 = \text{const} \quad (2.10)$$

w strefie odkształceń plastycznych.

Wielkości a_0 i a_1 są odpowiednio prędkościami propagacji podłużnych fal: sprężystej i plastycznej w przecie.

Po wykorzystaniu zależności (2.1), (2.9), (2.10) i scałkowaniu związków (2.7) oraz (2.8), otrzymuje się:

w strefach odkształceń sprężystych:

$$v = \frac{\sigma}{\rho a_0} + B_0 = a_0 \varepsilon + B_0 \quad \text{dla } x = a_0 t + b_0, \quad (2.11)$$

$$v = -\frac{\sigma}{\rho a_0} + C_0 = -a_0 \varepsilon + C_0 \quad \text{dla } x = -a_0 t + c_0 \quad (2.12)$$

oraz

$$v = \frac{\sigma}{\rho a_1} + B_1 = a_1 \varepsilon + B_1 \quad \text{dla } x = a_1 t + b_1, \quad (2.13)$$

$$v = -\frac{\sigma}{\rho a_1} + C_1 = -a_1 \varepsilon + C_1 \quad \text{dla } x = -a_1 t + c_1 \quad (2.14)$$

w strefach odkształceń plastycznych.

Podczas udarowego obciążenia pręta generowane są w nim fale silnych nieciągłości. Na frontach tych fal powinny być spełnione warunki: ciągłości kinematycznej

$$v_2 - v_1 = -D(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (2.15)$$

i ciągłości dynamicznej

$$\sigma_2 - \sigma_1 = -\rho D(v_2 - v_1), \quad (2.16)$$

gdzie indeksem 1 oznaczono wartości parametrów przed frontem fali, a indeksem 2 — za jej frontem. Symbol D oznacza prędkość propagacji frontu fali silnej nieciągłości.

W przypadku gdy fala przemieszcza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x , znak „-” w prawych stronach zależności (2.15) i (2.16) należy zamienić na znak „+”.

W ten sposób uzyskaliśmy komplet algebraicznych związków między naprężeniem σ , odkształceniem ε i prędkością v . Związki te, uzupełnione warunkami brzegowymi:

$$\sigma(0,t) \equiv 0 \quad \text{i} \quad v(L,t) \equiv v_0 \quad (2.17)$$

pozwalają określić w zamkniętej analitycznej postaci dynamiczne parametry mechaniczne pręta podczas prostopadłego uderzenia nim w sztywną płaską płytę. Na bazie trwałych odkształceń pręta, za pomocą uzyskanego rozwiązania, można między innymi określić dynamiczną granicę plastyczności jego materiału. Problem ten rozpatrzmy w dalszym ciągu rozważań.

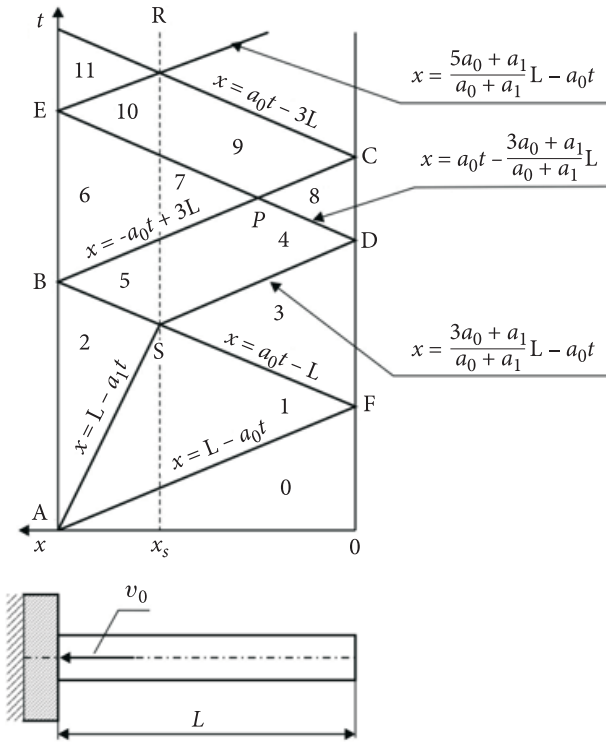
3. Analiza dynamicznych parametrów mechanicznych w pręcie sprężysto-plastycznym podczas zderzenia ze sztywną płaską płytą

W sprężysto-plastycznym pręcie, którego materiał opisany jest wzorami (2.1) i (2.2) (rys. 1), podczas prostopadłego zderzenia ze sztywną płytą z prędkością początkową $v_0 > a_0 |\varepsilon_s|$, generowany jest układ fal sprężystych z pojedynczą falą plastyczną. Schemat tego układu fal pokazany jest na rysunku 2.

Od końca pręta $x = L$ w chwili uderzenia $t = 0$ zaczynają propagować się dwie fale: sprężysta z prędkością a_0 i postępująca za nią fala plastyczna z prędkością a_1 . Trajektorie przemieszczania się frontów tych fal opisane są na płaszczyźnie (x, t) przez równania charakterystyk odpowiednio: $x = L - a_0 t$ i $x = L - a_1 t$ (rys. 2). Ściskająca fala sprężysta w chwili $t = L/a_0$ odbija się od swobodnego końca pręta $x = 0$ w postaci fali rozciągającej i propaguje się w kierunku przeciwnym wzdłuż charakterystyki $x = -L + a_0 t$, redukując naprężenie ściskające w pręcie do zera. Dalej w przekroju $x = x_S$ (rys. 2) następuje jej interferencja z frontem fali plastycznej AS, po której następują kolejne odbicia, na przemian, od sztywnej płyty ($x = L$) i swobodnego końca pręta $x = 0$.

Podczas interferencji odbitej fali sprężystej $x = -L + a_0 t$ z frontem padającej fali plastycznej $x = L - a_1 t$, w przekroju $x = x_S$ powstaje stacjonarna nieciągłość kontaktowa odkształcenia. Przyczynę powstania tej nieciągłości rozpatrzmy w dalszym ciągu rozważań.

W ten sposób trajektorie frontów fal (charakterystyki) dzielą pas płaszczyzny (x, t) ograniczony wartościami współrzędnych $x = 0$ i $x = L$ na ciąg obszarów, w których dla układu równań (2.3) rozwiązuje się metodą charakterystyk odpo-



Rys. 2. Trajektorie frontów fal obciążenia i odciążenia z pojedynczym segmentem fali plastycznej AS

wiednie zagadnienia graniczne (Cauchy’ego, Picarda i Darboux [24]) z konkretnymi warunkami brzegowymi).

Cechą charakterystyczną tych rozwiązań jest to, że dynamiczne parametry określające stan mechaniczny pręta w granicach danego obszaru zachowują stałe wartości w czasie i przestrzeni, natomiast różnią się między obszarami. Dlatego charakterystyki rozgraniczające poszczególne obszary są trajektoriami przemieszczania się frontów fal silnych nieciągłości.

Wykorzystując warunek początkowy w postaci:

$$v(x, 0) = v_0, \tag{3.1}$$

relacje wzdłuż charakterystyk (2.11)-(2.14), warunki ciągłości na frontach fal silnych nieciągłości (2.15) i (2.16) oraz warunki brzegowe (2.17) w poszczególnych obszarach płaszczyzny (x, t) , otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 0:} \quad v_0(x, t) &\equiv v_0, & \sigma_0(x, t) &\equiv 0, & \varepsilon_0(x, t) &\equiv 0; \\
 0 \leq x \leq L, & & 0 \leq t \leq \frac{L-x}{a_0}; & & &
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 1:} \quad v_1(x, t) &\equiv v_0 + a_0 \varepsilon_s, & \sigma_1(x, t) &\equiv \sigma_s, & \varepsilon_1(x, t) &\equiv \varepsilon_s; \\
 0 \leq x \leq x_s, & & \frac{L-x}{a_0} \leq t \leq \frac{L+x}{a_0}, & & x_s = \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} L, & \\
 x_s \leq x \leq L, & & \frac{L-x}{a_0} \leq t \leq \frac{L-x}{a_1}; & & &
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 2:} \quad v_2(x, t) &\equiv 0, \\
 \sigma_2(x, t) &\equiv \left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right) \sigma_s - \rho a_1 v_0, \\
 \varepsilon_2(x, t) &\equiv \left(1 - \frac{a_0}{a_1}\right) \varepsilon_s - \frac{v_0}{a_1}; \\
 x_s \leq x \leq L, & & \frac{L-x}{a_1} \leq t \leq \frac{L+x}{a_0}; & &
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 3:} \quad v_3(x, t) &\equiv 2a_0 \varepsilon_s + v_0, \\
 \sigma_3(x, t) &\equiv 0, & \varepsilon_3(x, t) &\equiv 0; \\
 0 \leq x \leq x_s, & & \frac{L+x}{a_0} \leq t \leq \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} - \frac{x}{a_0}. & &
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zanim określimy wartości kolejnych parametrów w obszarach 4, 5 i następnych, najpierw zinterpretujemy układ frontów fal w otoczeniu punktu S (rys. 2). Do tego celu wykorzystamy wartości parametrów z obszarów 2 i 3.

Na lewo od przekroju $x = x_s$ fenomenologiczne cząstki pręta są sprężone przez falę odkształceń plastycznych ($x = L - a_1 t$), natomiast na prawo pręt jest nieodkształcony ($\varepsilon_3 \equiv 0$ — obszar 3). W tej sytuacji, podczas interferencji frontów fal AS i FS, w części pręta położonej na lewo od przekroju $x = x_s$ następuje odciążenie, tj. zmniejszanie bezwzględnej wartości odkształcenia ściskania wzdłuż linii BD na wykresie $\sigma - \varepsilon$ (rys. 1). Natomiast w pozostałej części, tj. dla $x > x_s$, pręt może być ściskany wzdłuż

linii OAB (rys. 1) i wtedy bezwzględna wartość odkształcenia rośnie. W ten sposób w przekroju $x = x_S$ pojawia się stacjonarny front SR nieciągłości odkształcenia (rys. 2). Jest to nieciągłość typu kontaktowego, na której mamy:

$$v_4(x_S, t) \equiv v_5(x_S, t), \quad \sigma_4(x_S, t) \equiv \sigma_5(x_S, t), \quad \varepsilon_4(x_S, t) \neq \varepsilon_5(x_S, t). \quad (3.6)$$

Parametry v , σ i ε w obszarze 2 są stałe, dlatego fala odciążenia SB propaguje się w lewo z prędkością fali sprężystej a_0 . Natomiast w prawo od przekroju $x = x_S$ mogą propagować się fale obciążenia: sprężysta lub plastyczna. W niniejszej pracy rozpatrzmy przypadek, gdy w obszarze 4 rozprzestrzenia się sprężysta fala obciążenia SD. Taki wariant układu fal przedstawiony jest na rysunku 2. Dla tego wariantu parametry v , σ i ε w obszarach 4 i 5, po uwzględnieniu relacji (3.6), określone są wzorami:

Obszar 4:

$$\begin{aligned} v_4(x, t) &\equiv \frac{(3a_0 - a_1)(a_0\varepsilon_s + v_0)}{2a_0} - v_0, \\ \sigma_4(x, t) &\equiv -\frac{\rho(a_0 + a_1)}{2}(a_0\varepsilon_s + v_0), \\ \varepsilon_4(x, t) &\equiv -\frac{a_0 + a_1}{2a_0^2}(a_0\varepsilon_s + v_0); \\ 0 \leq x \leq x_p, \quad \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} - \frac{x}{a_0} \leq t \leq \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} + \frac{x}{a_0}, \\ x_p \leq x \leq x_S, \quad \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} - \frac{x}{a_0} \leq t \leq \frac{3L - x}{a_0}, \quad x_p = \frac{2a_1}{a_0 + a_1}L. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Obszar 5:

$$\begin{aligned} v_5(x, t) &\equiv \frac{(3a_0 - a_1)(a_0\varepsilon_s + v_0)}{2a_0} - v_0, \\ \sigma_5(x, t) &\equiv -\frac{\rho(a_0 + a_1)}{2}(a_0\varepsilon_s + v_0), \\ \varepsilon_5(x, t) &\equiv -\frac{2a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{2a_0^2a_1}(a_0\varepsilon_s + v_0); \\ x_S \leq x \leq L, \quad \frac{x + L}{a_0} \leq t \leq \frac{3L - x}{a_0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

W pozostałych obszarach, po wykorzystaniu podanych w części 2 zależności, mamy:

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 6:} \quad & v_6(x, t) \equiv 0, \\
 & \sigma_6(x, t) \equiv -\rho a_0 (2a_0 \varepsilon_s + v_0), \\
 & \varepsilon_6(x, t) \equiv -\frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s + v_0) - \varepsilon_s; \\
 & x_s \leq x \leq L, \quad \frac{3L-x}{a_0} \leq t \leq \frac{x}{a_0} + \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 7:} \quad & v_7(x, t) \equiv 0, \\
 & \sigma_7(x, t) \equiv -\rho a_0 (2a_0 \varepsilon_s + v_0), \\
 & \varepsilon_7(x, t) \equiv -\frac{a_0 \varepsilon_s + v_0}{a_0} - \varepsilon_s; \\
 & x_p \leq x \leq x_s, \quad \frac{3L-x}{a_0} \leq t \leq \frac{x}{a_0} + \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0}, \\
 & x_p = \frac{2a_1}{a_0 + a_1} L.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obszar 8:} \quad & v_8(x, t) \equiv \frac{a_0 - a_1}{a_0} (a_0 \varepsilon_s + v_0) - v_0, \\
 & \sigma_8(x, t) \equiv 0, \quad \varepsilon_8(x, t) \equiv 0; \\
 & 0 \leq x \leq x_p, \quad \frac{x}{a_0} + \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} \leq t \leq \frac{3L-x}{a_0}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Obszar 9:

$$v_9(x, t) \equiv -\frac{a_0 - a_1}{2a_0}(a_0\varepsilon_s + v_0),$$

$$\sigma_9(x, t) \equiv -\frac{\rho(a_0 - a_1)}{2}(a_0\varepsilon_s + v_0) - \rho a_0^2 \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_9(x, t) \equiv -\frac{a_0 - a_1}{2a_0^2}(a_0\varepsilon_s + v_0) - \varepsilon_s; \quad (3.12)$$

$$0 \leq x \leq x_p, \quad \frac{3L - x}{a_0} \leq t \leq \frac{3L + x}{a_0},$$

$$x_p \leq x \leq x_s, \quad \frac{x}{a_0} + \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} \leq t \leq \frac{3L + x}{a_0}.$$

Obszar 10:

$$v_{10}(x, t) \equiv -\frac{a_0 - a_1}{2a_0^2}(a_0\varepsilon_s + v_0),$$

$$\sigma_{10}(x, t) \equiv -\frac{\rho(a_0 - a_1)}{2}(a_0\varepsilon_s + v_0) - \rho a_0^2 \varepsilon_s, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{10}(x, t) \equiv -\frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - 3a_1^2}{a_0^2 a_1}(a_0\varepsilon_s + v_0) - \varepsilon_s;$$

$$x_s \leq x \leq L, \quad \frac{x}{a_0} + \frac{3a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} \leq t \leq \frac{5a_0 + a_1}{a_0 + a_1} - \frac{x}{a_0}.$$

Obszar 11:

$$v_{11}(x, t) \equiv \frac{a_0 - a_1}{a_0}(a_0\varepsilon_s + v_0) - v_0$$

$$\sigma_{11}(x, t) \equiv 0, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{11}(x, t) \equiv -\frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1}(a_0\varepsilon_s + v_0);$$

$$x_s \leq x \leq L, \quad \frac{5a_0 + a_1}{a_0 + a_1} \frac{L}{a_0} - \frac{x}{a_0} \leq t \leq \frac{3L + x}{a_0}.$$

Zbadamy teraz warunki, jakie musi spełniać prędkość zderzenia v_0 , aby w pręcie powstał proces falowy pokazany na rysunku 2.

Warunkiem koniecznym dla zapoczątkowania w pręcie odkształceń plastycznych po zderzeniu ze sztywną płytą z prędkością zderzenia v_0 jest spełnienie nierówności:

$$v_1 = v_0 + a_0 \varepsilon_s > 0 \quad \text{lub} \quad v_0 > -a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0. \quad (3.15)$$

Z kolei, aby w obszarze **4** propagowała się fala sprężysta, naprężenie σ_4 musi spełniać nierówność:

$$\sigma_4 \geq \sigma_s, \quad \sigma_s < 0. \quad (3.16)$$

Po podstawieniu (3.7)₂ do (3.16) i prostych przekształceniach, otrzymuje się:

$$v_0 \leq -\left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0, \quad (3.17)$$

Dalej z rozwiązania w obszarze **6** wynika, że dla

$$v_0 = -2a_0 \varepsilon_s \text{ jest } \sigma_6(L, t) \equiv 0. \quad (3.18)$$

Oznacza to, że dla prędkości uderzenia $v_0 = -2a_0 \varepsilon_s$, po odbiciu się fali odciążenia FB (rys. 2) od płyty, zanika reakcja oddziaływania płyty na pręt. Zatem dla prędkości uderzenia v_0 zawartej w przedziale:

$$-a_0 \varepsilon_s < v_0 \leq -2a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0, \quad (3.19)$$

czas kontaktu pręta z płytą kończy się w chwili $t_B = 2L/a_0$, podobnie jak przy zderzeniu sprężystym. Natomiast dla prędkości uderzenia v_0 ograniczonej nierównościami

$$-2a_0 \varepsilon_s < v_0 \leq -\left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0, \quad (3.20)$$

wartość prędkości v_5 jest niedostateczna, aby zlikwidować ciśnienie między płytą i prętem — proces propagacji sprężystych fal w pręcie wydłuża się w czasie. Pełny obraz falowy dla tego przypadku pokazany jest na rysunku 2. Czas kontaktu pręta z płytą dla zakresu prędkości uderzenia (3.20) wynosi:

$$t_E = \frac{4L}{a_0 + a_1}. \quad (3.21)$$

Z położenia punktu przecięcia się charakterystyk $x = a_0 t - L$ i $x = L - a_1 t$ wynika, że długość nieodkształconego plastycznie odcinka pręta dla prędkości uderzenia zawartych w przedziale

$$-a_0 \varepsilon_s < v_0 \leq -\left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0 \quad (3.22)$$

nie zależy jawnie od jej wartości i określona jest wzorem:

$$x_s = \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} L. \quad (3.23)$$

Z relacji tych wynika ważny wniosek, że dla różnych wartości prędkości uderzenia v_0 zawartych w przedziale (3.22) długość sztywnego odcinka pręta nie ulega zmianie, jeśli $a_1 \approx \text{const}$.

Jak wykazano wyżej, układ obszarów na płaszczyźnie (x, t) i podane w nich zamknięte rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych są słuszne dla prędkości uderzenia pręta zawartych w przedziale (3.22). Natomiast dla

$$v_0 > -\left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s < 0 \quad (3.24)$$

obraz falowy rozwiązania problemu komplikuje się. W tym przypadku fala odciążenia FS (rys. 2), interferując z falą plastyczną AS, nie likwiduje jej całkowicie, lecz tylko zmniejsza jej intensywność. Wówczas w prawo od punktu S propaguje się fala sprężysta ściskania, za którą postępuje fala plastyczna z prędkością a_1 , ale o obniżonej intensywności. Powoduje to wzrost ilości obszarów i pracochłonności konstrukcji rozwiązania.

W niniejszej pracy rozwiązujemy problem w oparciu o teorię małych odkształceń. Okazuje się, że wartości prędkości uderzenia z przedziału (3.22) wyczerpują zakres małych odkształceń i nie ma potrzeby rozwiązania problemu dla prędkości (3.24). Rozwiązanie to uzyskuje się analogicznie jak dla rozpatzonego przypadku.

4. Dynamiczna granica plastyczności, podłużne odkształcenia plastyczne pręta i prędkość fali plastycznej

W niniejszym fragmencie pracy na podstawie rozwiązań przedstawionych w części 3 wyprowadzimy zamknięty algebraiczny wzór, określający dynamiczną granicę plastyczności sprężysto-plastycznego materiału pręta z liniowym wzmocnieniem. We wzorze występuje, określona eksperymentalnie, długość plastycznie odkształconego odcinka pręta h , podczas jego prostopadłego zderzenia ze sztywną płytą z prędkością v_0 . Długość tego odcinka h określona jest wzorem:

$$h = L - X(t_s), \quad (4.1)$$

gdzie $X(t_s)$ oznacza wartość współrzędnej Eulera punktu S w chwili $t_s = (L - x_s)/a_1$.

Zgodnie z wartościami prędkości masowej określonymi w obszarach **0** i **1**, oraz po uwzględnieniu faktu, że dla małych odkształceń jest $\varepsilon_s \ll 1$, otrzymuje się:

$$X(t_s) = x_s + \frac{L - x_s}{a_0} v_0 + 2 \frac{x_s}{a_0} v_1 = \frac{a_0 - a_1 + 2v_0}{a_0 + a_1} L. \quad (4.2)$$

Dalej z relacji (4.1) i (4.2) wynika, że

$$h = 2 \frac{a_1 - v_0}{a_0 + a_1} L \quad (4.3)$$

lub

$$a_1 = \frac{2v_0 L + a_0 h}{2L - h} = \frac{2v_0 + a_0 H_p}{2 - H_p}, \quad H_p = \frac{h}{L}. \quad (4.4)$$

Jak widać, prędkość przemieszczania się fali plastycznej wzdłuż pręta a_1 dla danej prędkości zderzenia v_0 jest stała podczas całego jego kontaktu z płytą. Jej wartość jest jednoznacznie określona wzorem (4.4) za pomocą prędkości propagacji fali sprężystej a_0 , prędkości zderzenia v_0 i względnej długości plastycznie odkształconego podczas udaru odcinka pręta $H_p = h/L$.

W celu określenia dynamicznej granicy plastyczności badanego materiału, wykorzystamy bilans energii w pręcie w chwili zakończenia odkształcenia plastycznego, tj. dla

$$t_s = \frac{L - x_s}{a_1} = \frac{L + x_s}{a_0}$$

i przyrównamy go do początkowej energii kinetycznej pręta, tj.

$$[\sigma_s \varepsilon_s + (\sigma_2 + \sigma_s)(\varepsilon_2 + \varepsilon_s)]h/2 + (\rho v_3^2/2)x_s = (\rho v_0^2/2)L \quad (4.5)$$

Z równania tego, po uwzględnieniu wyrażeń: (3.4), (3.5), (3.23) oraz (4.3) i przekształceniach, otrzymuje się:

$$2 \left\{ \sigma_s \varepsilon_s - \left[\left(2 - \frac{a_1}{a_0} \right) \sigma_s - \rho a_1 v_0 \right] \left(\frac{a_0}{a_1} \varepsilon_s + \frac{v_0}{a_1} \right) \right\} \frac{a_1 - v_0}{a_0 + a_1} + \rho (2a_0 \varepsilon_s + v_0)^2 \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} = \rho v_0^2$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$P^2 - V_0 |P| - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} V_0^2 = 0, \quad (4.6)$$

gdzie

$$P = \frac{\sigma_s}{E_0} = \frac{\sigma_s}{\rho a_0^2} = \varepsilon_s < 0, \quad V_0 = \frac{v_0}{a_0}, \quad \alpha = \frac{a_1}{a_0} = \frac{2V_0 + H_p}{2 - H_p}, \quad H_p = \frac{h}{L}. \quad (4.7)$$

Z równania (4.6), po rozwiązaniu otrzymuje się:

$$P = \left(1 - \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right) \frac{V_0}{2} \quad (4.8)$$

i zgodnie z (4.7), dynamiczną granicę plastyczności dla materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem określa się wzorem

$$Y_w = E_0 |P|, \quad (4.9)$$

gdzie oznaczono $Y_w = |\sigma_s|$.

Indeks w oznacza, że wielkość Y_w dotyczy materiału ze wzmocnieniem.

Drugi pierwiastek równania (4.8) nie ma sensu fizycznego i dlatego został pominięty.

Danymi eksperymentalnymi, niezbędnymi do realizacji obliczeń według wzoru (4.8) są: prędkość propagacji fali sprężystej w pręcie ($a_0 = \sqrt{E_0/\rho}$), prędkość prostopadłego uderzenia pręta w sztywną płytę (v_0) i względna długość odcinka pręta odkształconego plastycznie ($H_p = h/L$) podczas udaru z prędkością v_0 .

Wzór do obliczania dynamicznej granicy plastyczności dla materiału idealnie sztywno-plastycznego według uproszczonego modelu Taylora ma postać [1]:

$$Y_T = \frac{L - l_f}{2(L - L_f)} \frac{1}{\ln(L/l_f)} \rho v_0^2, \quad (4.10)$$

gdzie symbole L_f i l_f odpowiednio oznaczają końcową całkowitą długość pręta i długość jego części nieodkształconej po zakończeniu zderzenia.

W następnej części pracy porównamy wyniki ilościowe uzyskane za pomocą wyrażeń (4.8), (4.9) i (4.10).

Rozwiązanie zagadnienia w obszarze 2 umożliwia określenie podłużnego plastycznego odkształcenia w pręcie. Zgodnie z modelem Prandtla (rys. 1) mamy:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_2 - \frac{\sigma_2}{E_0},$$

a po wykorzystaniu wyrażeń (3.4) i prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$\varepsilon_p = \frac{a_1^2 - a_0^2}{a_1 a_0} \left(\frac{\sigma_s}{E_0} + \frac{v_0}{a_0} \right) \quad (4.11)$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$\varepsilon_p = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} (P + V_0). \quad (4.12)$$

5. Przykład

Do badań użyto prętów o początkowej długości $L = 56$ mm i średnicy $d = 8$ mm, wykonanych ze stali o następujących właściwościach: gęstość — $\rho = 7800$ kg/m³, moduł Younga — $E_0 = 200$ GPa, $a_0 = \sqrt{E_0/\rho} \approx 5000$ m/s, umowna (nominalna) statyczna granica plastyczności — $R_{0,2} = 700$ MPa.

Pręty te jako pociski napędzane do prędkości początkowej v_0 o wartościach zawartych w przedziale 110-210 m/s; uderzały one prostopadle w sztywną płytę. Fotografie kształtów odzyskanych po procesie zderzenia odkształconych prętów przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Widok próbek walcowych po wykonaniu testu Taylora

Wyniki eksperymentalne i obliczone za pomocą wzorów wyprowadzonych w poprzednich częściach pracy zamieszczamy w tabeli 1.

TABELA 1

Zestawienie wyników eksperymentalnych i obliczeniowych charakteryzujących dynamiczne właściwości mechaniczne stali łuskowej

v_0 [m/s]	$\frac{L_f}{L}$	$\frac{x_s}{L}$	$H_p =$ $\frac{L_f}{L} - \frac{x_s}{L}$	Y_W [MPa]	Y_T [MPa]	$\frac{Y_W}{Re}$	$\frac{Y_T}{Re}$	ϵ_p	a_1 [m/s]
120	0,973	0,58	0,393	780	1604	1,11	2,29	-0,038	1371
140	0,961	0,58	0,381	893	1511	1,28	2,16	-0,051	1350
157	0,953	0,58	0,373	992	1577	1,42	2,25	-0,062	1339
172	0,945	0,58	0,365	1076	1617	1,54	2,31	-0,072	1327
209	0,922	0,58	0,342	1256	1684	1,79	2,41	-0,103	1284

6. Wnioski końcowe

Z rezultatów wynika, że dla wartości prędkości uderzenia zawartych w przedziale

$$-a_0 \epsilon_s < v_0 \leq - \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1} \right) a_0 \epsilon_s, \quad \epsilon_s < 0, \quad (6.1)$$

które generują małe odkształcenia plastyczne w przęciu, można sformułować następujące wnioski końcowe:

1. Prędkość rozprzestrzeniania się frontu fali plastycznej a_1 i długość nieodkształconego plastycznie odcinka pręta x_s określone są wzorami:

$$a_1 = \frac{2v_0 + a_0 H_p}{2 - H_p}, \quad x_s = \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} L \quad (6.2)$$

i w przybliżeniu zachowują stałe wartości podczas procesu zderzenia (w zamieszczonym przykładzie: $a_1 \approx 1340$ m/s, $x_s \approx 0,58$).

2. Względne osiowe odkształcenie plastyczne ϵ_p pręta, uzyskane podczas udaru, rośnie w przybliżeniu liniowo wraz ze wzrostem wartości prędkości uderzenia v_0 (tab. 1).

3. Względna długość odcinka pręta plastycznie odkształconego H_p maleje w przybliżeniu liniowo wraz ze wzrostem prędkości v_0 (tab. 1).
4. Wzrost granicy plastyczności badanej stali podczas udarowego obciążenia jest w przybliżeniu proporcjonalny do wartości prędkości uderzenia.
5. Różnice w wartościach dynamicznych granic plastyczności Y_W i Y_T są rzędu kilkudziesięciu i więcej procent (patrz tab. 1). Model Taylora jest mocno uproszczony (materiał sztywno-idealnie plastyczny bez wzmocnienia) i zawiera błędy w wyprowadzeniu równania ruchu nieodkształconej części pręta [12]. Wydaje się, że jest to główna przyczyna tej rozbieżności. Wzory określające Y_W (4.8) i (4.9) oparte są na ścisłym falowym rozwiązaniu jednowymiarowego problemu prostopadłego uderzenia prętem w sztywną płytę i przy dokładnym eksperymentalnym określeniu granicy odkształceń plastycznych w przecię (H_p) dobrze aproksymują rzeczywistość w zakresie teorii małych odkształceń.

Pracę zrealizowano w ramach projektu rozwojowego Nr 0011/R/T00/2009/07 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2009-2011.

Artykuł wpłynął do redakcji 18.01.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2010 r.

LITERATURA

- [1] G. I. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress*, I. *Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc., Series A, London, 194, 1948, 289.
- [2] A. C. WHIFFIN, *The use flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress*, II. *Tests on various metallic materials*, Proc. Roy. Soc., Series A, London, 194, 1948, 300.
- [3] G. I. BARENBLATT, A. I. ISHLINSKII, *On the impact of a viscoplastic bar on a rigid wall*, Prikl. Math. Mekh., 26, 1962, 497.
- [4] J. D. CINNAMON, S. E. JONES, J. C. FOSTER, JR, P. P. GILLIS, *An analysis of early time deformation rate and stress in the Taylor impact test*. *Mechanical Behavior of Materials*, VI. Proc. of the Sixth Int. Materials Conf., eds. M. Jano and T. Inouc, Kyoto, Japan, vol. 1, July 1991, 337.
- [5] N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [6] J. C. FOSTER, JR., P. J. MAUDLIN, S. E. JONES, *On the Taylor test*, Part I: *A continuum analysis of plastic wave propagation*, Proc of the 1995 APS Topical Conf.: An Shock Compression of Condensed Matter, Seattle, Washington, August 1995, 291.
- [7] J. B. HAWKYARD, D. EASOTON, W. JOHNSON, *The mean dynamic yield strength of copper and low carbon steel at elevated temperatures from measurements of the "mushrooms" of flat-ended projectiles*, Int. J. Mech. Sci., 10, 1968, 929.
- [8] J. B. HAWKYARD, *A theory for the mushrooming of flat-ended projectiles impinging on a fiat rigid anvil, using energy considerations*, Int. J. Mech. Sci., 11, 1969, 313.
- [9] I. M. HUTCHINGS, *Estimation of yield stress in polymers at high strain-rates using G. I. Taylors impact technique*, J. Mech. Phys. Solids, 26, 1979, 289.
- [10] G. R. JOHNSON, T. J. HOLMQUIST, *Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants*, J. Appl. Phys., 64, 1988, 3901.

- [11] S. E. JONES, P. P. GILLIS, J. C. FOSTER, JR, L. X. WILSON, *A one-dimensional two-phase flow model for Taylor impact specimens*, J. Engr. Mat'ls. Tech., Trans. ASME, 113, 1991, 228.
- [12] S. E. JONES, P. P. GILLIS, J. C. FOSTER, JR, *On the equation of motion of the undeformed section of a Taylor impact specimen*, J. Appl. Phys., 61, 1987, 499.
- [13] S. E. JONES, P. J. MAUDLIN, P. P. GILLIS, J. C. FOSTER, JR, *An analytical interpretation of high strain rate materials behavior during early time plastic deformation in the Taylor impact test*, Computers in Engineering, ed. G. A. Gabriele, vol. 2, ASME, New York, 1992, 173.
- [14] E. H. LEE, S. J. TUPPER, *Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 21, 1954, 63.
- [15] P. J. MAUDLIN, J. C. FOSTER, JR, S. E. JONES, *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Impact Engng, 19, 1997, 95.
- [16] P. K. MAUDLIN, J. C. FOSTER, JR, S. E. JONES, *On the Taylor test, Part III: A continuum mechanics code analysis of plastic wave propagation*, Los Alamos National Laboratory report LA-12836-MS, November 1994.
- [17] P. J. MAUDLIN, R. F. DAVIDSON, R. J. HENNINGER, *Implementation and assessment of the mechanical-threshold-stress model using the EPIC2 and PINON computer codes*, Los Alamos National Laboratory report LA-11895-MS, September 1990.
- [18] M. A. MEYERS, *Dynamic behaviour of materials*, John Wiley an Sons, INC, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapoure, 1994.
- [19] T. C. T. TING, *Impact of a nonlinear viscoplastic rod on a rigid wall*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 33, 1966, 505.
- [20] L. L. WILSON, J. W. HOUSE, M. E. NIXON, *Time resolved deformation from the cylinder impact test AFATL-TR-89-76*, November 1989.
- [21] E. WŁODARCZYK et al., *Estimation of dynamic yield stress of shell steels by means of the Taylor impact test* (in Polish), Bull. Acad., 1, 56, 2007, 113.
- [22] S. E. JONES et al., *An engineering analysis of plastic wave propagation in the Taylor test*, Int. J. Engng, 19, 2, 1997, 95-106.
- [23] Kh. A. RAKHMATULIN, YU. A. DEM'YANOW, *Strength under intense short-tern loadings* (in Russian), Gostizdat, Moskva, 1961.
- [24] M. KRZYŻAŃSKI, *Partial differential equations of the second order*, vol. II (in Polish), PWN, Warsaw, 1962.
- [25] S. Kaliski, Cz. Rymarz, K. Sobczyk, E. Włodarczyk, *Waves*, PWN, Warsaw, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo, 1992.
- [26] P. G. Shewmon (ed.), V. F. Zackay, *Response of metals to high velocity deformation*, Interscience Publishers, New York–London, 1961.

E. WŁODARCZYK, A. JACKOWSKI

On wave method of determining dynamic mechanical parameters of elastic-plastic material with linear strain hardening by means of Taylor test

Abstract. A new simple engineering method to determine dynamic mechanical parameters of elastic-plastic materials with linear strain hardening is presented in this paper. For this purpose, the Taylor's impact test, i.e., perpendicular striking of the long rod on a flat rigid target has been used. On the base of the exact wave solution of the above-mentioned initial boundary value problem, the

algebraical formulae in closed form to determine propagation velocity of plastic wave in rod and of dynamic yield point of a material rod have been derived.

This paper supplements knowledge on dynamical properties of metals and it has application values in materials engineering.

Keywords: dynamic mechanical parameters of metals, impact load-Taylor's test, dynamic yield stress

Universal Decimal Classification: 539.4.014