



Określanie krzywizny trajektorii płaskiej statku za pomocą GPS

ANDRZEJ BANACHOWICZ¹, ADAM WOLSKI²,
GRZEGORZ BANACHOWICZ²

¹Akademia Marynarki Wojennej, 81-103 Gdynia, ul. Śmidowicza 69

²Akademia Morska, 70-500 Szczecin, ul. Wały Chrobrego 1-2

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób określania krzywizny trajektorii statku w płaszczyźnie horyzontu z wykorzystaniem ciągu pozycji GPS. Stosując aproksymację średniokwadratową ciągu pomiarów współrzędnych pozycji, możemy otrzymać równania parametryczne współrzędnych statku. Pozwala to na wykreślenie krzywej płaskiej trajektorii statku oraz jej ewoluty. W artykule przedstawiono przykład krzywoliniowej trajektorii statku oraz jej ewoluty (z cyrkulacją oraz z punktem przegięcia) określonej na podstawie rzeczywistych pomiarów DGPS.

Słowa kluczowe: GPS, trajektoria statku, pozycjonowanie, nawigacja

Symbole UKD: 527

Wprowadzenie

W klasycznej nawigacji morskiej przyjmuje się, że statek porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Natomiast manewrowanie statku (zwroty, cyrkulacje) traktuje się jako odrębne zagadnienia. Wspomina się również [14], choć nader rzadko, o myszkowaniu, tj. sinusoidalnym ruchu statku w stosunku do drogi wypadkowej, wywołanym niesymetrycznym działaniem sterowań (napędy, stery itp.) oraz zakłóceń zewnętrznych (głównie wiatru). W przypadku ruchu ustalonego, tj. przy dłuższym przejściu morzem na stałym kursie oraz w zobrazowaniu i rejestracji parametrów ruchu w małej skali (1:200 000 i mniejszej), przybliżenie to jest wystarczające. Jednakże, uwzględniając współczesne wymagania dotyczące dokładności i precyzji prowadzenia nawigacji [9, 12, 13] oraz możliwości techniczne realizacji tego procesu, to podejście nie jest właściwe, a ponadto droge

statku należy traktować jako trajektorię krzywoliniową w przyjętym układzie odniesienia.

Obecnie w nawigacji przyjmuje się powszechnie jako układ odniesienia układ WGS-84, do którego powinny być przeliczane wszystkie dane nawigacyjne. Natomiast poszczególne pomiary nawigacyjne oraz obliczenia mogą być wykonywane w innych układach, w tym lokalnych, związanych ze statkiem. Przykładami są nawigacja zliczeniowa — pomiary lokalne a obliczenia na powierzchni elipsoidy, nawigacja radarowa — pomiary i obliczenia w lokalnym układzie biegunowym związanym z anteną. Podobnie trajektorię statku możemy traktować lokalnie jako krzywą płaską, w krótkich przedziałach czasu (przy parametryzacji czasem) lub drogi (przy parametryzacji naturalnej — drogą). Przy czym statek traktujemy jako punkt (przy pomiarach jednym odbiornikiem GPS/DGPS i bez wykorzystania dodatkowych układów pomiarowych nie możemy określić ruchu bryły statku we wszystkich stopniach swobody), a równania opisujące jego ruch są zależnościami kinematycznymi w płaszczyźnie horyzontu. Znając równania ruchu, można analizować przebieg trajektorii statku (planować ją, monitorować, korygować itd.). Ze względu na niezbyt dokładną znajomość parametrów ruchu statku, otrzymanych z nawigacji zliczeniowej i jej odmiany — nawigacji inercyjnej [1, 3, 4], stosuje się punktowe pomiary położenia statku (punkty na trajektorii) z wykorzystaniem pozycyjnych systemów nawigacyjnych lub innych metod określania pozycji obserwowanej [2, 14], które też są obarczone różnego rodzaju błędami.

Poniżej przedstawiono sposób określania krzywizny trajektorii statku z wykorzystaniem pomiarów GPS/DGPS. Sposób jest ogólny, można więc go stosować również w przypadku innych metod określania pozycji obserwowanej.

1. Krzywizna krzywej płaskiej

Krzywą płaską możemy opisać za pomocą następujących równań parametrycznych [7]:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

dla $t \in (t_0, t_k)$, w tym przypadku t_0 — moment pierwszego pomiaru, t_k — moment ostatniego pomiaru, ponadto funkcje x i y są dwukrotnie (co najmniej) różniczkowalne, tj. $x, y \in C^2$. Dwukrotna różniczkowalność jest nam niezbędna do określenia szybkości oraz przyspieszenia statku (naturalny wymóg w stosunku do trajektorii).

Dla tak określonej krzywej jej krzywizna wyraża się wzorem

$$k(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left\{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

zaś promień krzywizny określa zależność

$$R(t) = \frac{1}{|k(t)|}. \quad (3)$$

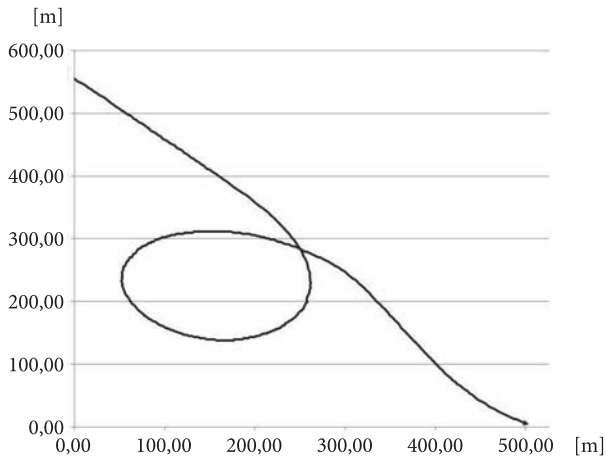
Środki krzywizny to ewoluta krzywej. Ich współrzędne obliczamy ze wzorów

$$x_e(t) = x(t) - y'(t) \frac{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)},$$

$$y_e(t) = y - x'(t) \frac{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \quad (4)$$

2. Krzywizna trajektorii statku

Wykorzystując ciąg pomiarów współrzędnych pozycji statku wykonanych na Zatoce Gdańskiej [4], określono jego trajektorię w lokalnym układzie odniesienia (rys. 1). Pomiaru wykonano w odstępach jednosekundowych (łącznie 517 pomiarów).



Rys. 1. Trajektoria statku określona z pomiarów DGPS

Stosując aproksymację średniokwadratową [11] funkcji zmienności długości i szerokości geograficznej względem czasu, otrzymano następujące równania parametryczne trajektorii statku (po przetransformowaniu do płaskiego lokalnego układu odniesienia, stąd wartości w metrach):

$$x(t) = 3,221426 \cdot 10^{-12} t^6 - 5,277435 \cdot 10^{-9} t^5 + 3,168530 \cdot 10^{-6} t^4 + \\ -0,000818 t^3 + 0,076654 t^2 + 0,141102 t + 18,04,$$

$$y(t) = 6,073267 \cdot 10^{-10} t^5 - 8,216361 \cdot 10^{-7} t^4 + 0,000366 t^3 + \\ -0,055888 t^2 + 0,214774 t + 526,28.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy pierwsze pochodne

$$x'(t) = 1,932856 \cdot 10^{-11} t^5 - 2,638718 \cdot 10^{-8} t^4 + 1,267412 \cdot 10^{-5} t^3 + \\ +2,453884 \cdot 10^{-3} t^2 + 0,153309 t + 0,141102,$$

$$y'(t) = 3,036633 \cdot 10^{-9} t^4 - 3,286544 \cdot 10^{-6} t^3 + \\ +1,097886 \cdot 10^{-3} t^2 + 0,111777 t + 0,214774$$

i następnie drugie pochodne

$$x''(t) = 9,664279 \cdot 10^{-11} t^4 - 1,055487 \cdot 10^{-7} t^3 + 3,802236 \cdot 10^{-5} t^2 + \\ -4,907768 \cdot 10^{-3} t + 0,153309,$$

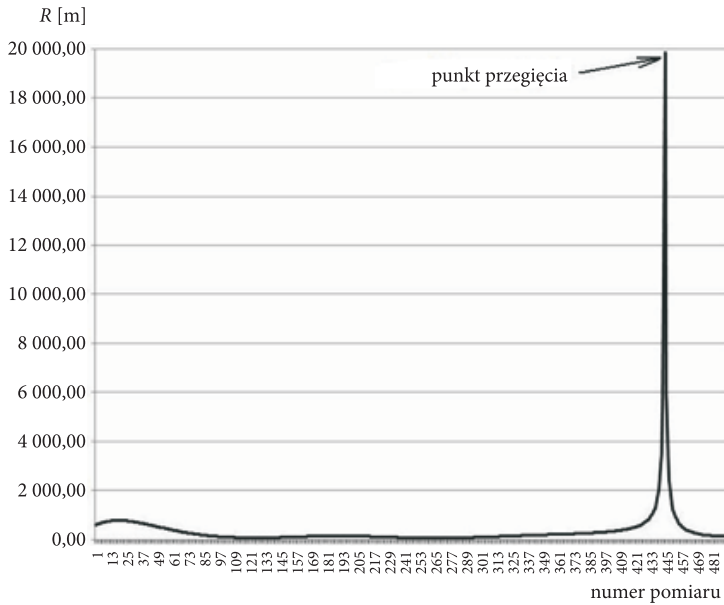
$$y''(t) = 1,214653 \cdot 10^{-8} t^3 - 9,859633 \cdot 10^{-6} t^2 + \\ +2,195771 \cdot 10^{-3} t - 0,111777.$$

Wykorzystując zależności (2) i (3), obliczono promień krzywizny trajektorii statku. Na rysunku 2 pokazano jego wykres w całym przedziale czasu badanej trajektorii, a na rysunku 3 jego zmienność na cyrkulacji.

Zależności (4) posłużyły do obliczenia środków krzywizny trajektorii statku (ewoluty trajektorii). Ich wykresy przedstawiono na rysunkach 4-7.

Rysunek 4 obrazuje prostoliniową część trajektorii do początkowej fazy cyrkulacji. Wyraźnie widoczne jest zmniejszanie się promienia krzywizny, od wartości nieskończonej (odcinek prostoliniowy trajektorii) do 135 metrów.

Na cyrkulacji (rys. 3 i rys. 5) promienie krzywizny zmieniały się od 490 metrów (wartość maksymalna) do 59 metrów (wartość minimalna). Kształt ewoluty

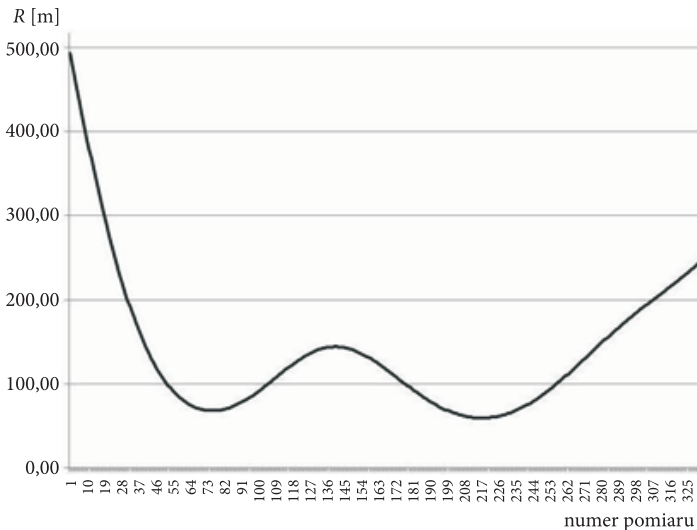


Rys. 2. Promień krzywizny trajektorii statku

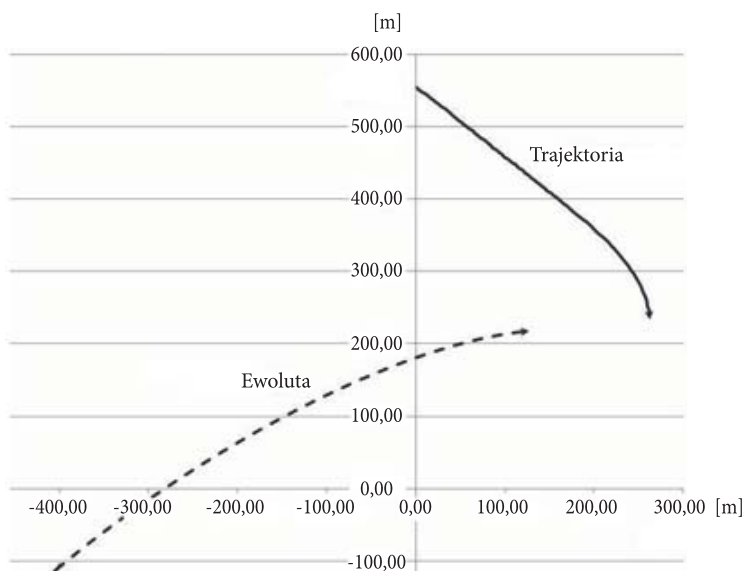
cyrkulacji jest podobny do kształtu ewoluty elipsy (z pewnymi zniekształceniami). Świadczy to o tym, że krzywa cyrkulacji różni się istotnie od okręgu.

Ewolutę części krzywoliniowej trajektorii pokazuje rysunek 6.

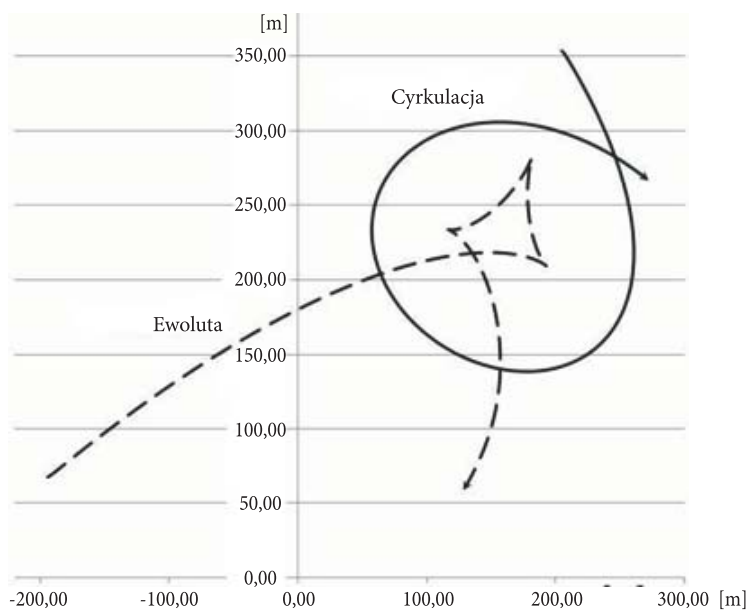
Interesujący przebieg ma ewoluta w punkcie przecięcia trajektorii statku. Ze względu na skalę (przeskok od promienia krzywizny równego 15 km z jednej



Rys. 3. Promień krzywizny na cyrkulacji

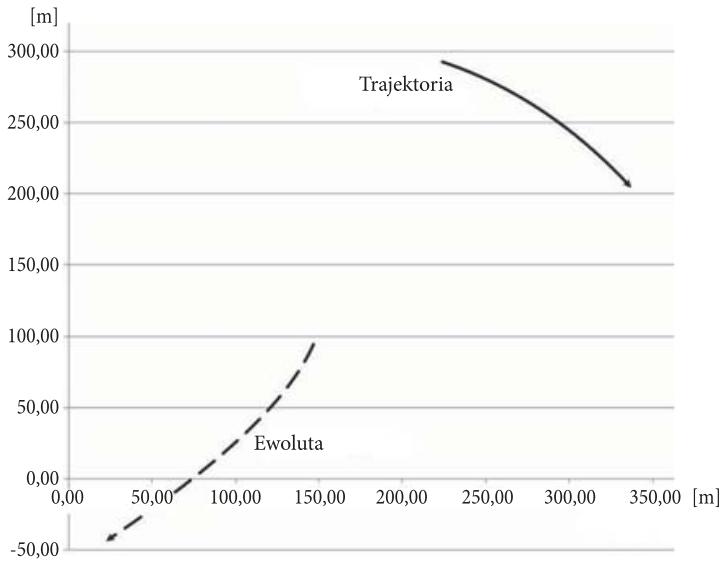


Rys. 4. Ewoluta odcinka trajektorii prostoliniowej i wejście w cyrkulację

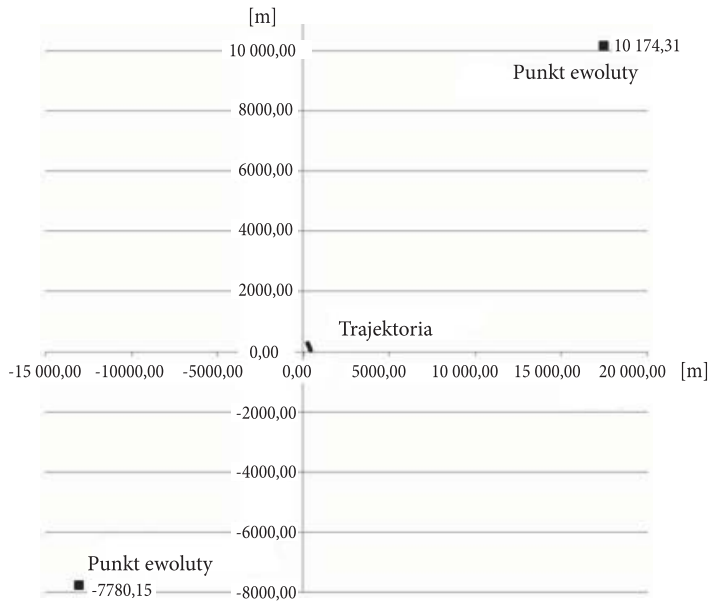


Rys. 5. Ewoluta cyrkulacji

burty do promienia 20 km na burtę przeciwną) pokazano wyłącznie punkty charakterystyczne, które dzieli tylko jedna sekunda pomiarów (rys. 7).



Rys. 6. Ewoluta trajektorii krzywoliniowej



Rys. 7. Punkty ewoluty w punkcie przecięcia trajektorii

Zakończenie

Ze względu na duży zakres zmienności wartości promieni krzywizny trajektorii statku — teoretycznie od nieskończoności do 59 metrów, a praktycznie od 20 kilometrów do 59 metrów — nie można pokazać na jednym rysunku ewoluty nawet stosunkowo krótkiej trajektorii statku. W tym przypadku była to trajektoria przebyta w ciągu 517 sekund (statek przebył drogę około 1400 metrów).

Ewoluta trajektorii statku pokazuje położenie środków krzywizny trajektorii, co ułatwia projektowanie lub weryfikowanie przebiegu i kształtu dróg wodnych, szczególnie na akwenach ograniczonych.

Analizę geometrii trajektorii statku można również wykorzystać przy badaniu charakterystyk manewrowych statku — stabilności kursowej, zwrotności, cyrkulacji i innych. Znajomość własności geometrycznych trajektorii może być wykorzystana przy planowaniu nawigacyjnym podróży oraz planowaniu manewrów (antykolizyjnych, cumowania itd.).

Wykorzystując dwa (lub więcej) odbiorniki GPS/DGPS [6] oraz układy nawigacji zliczeniowej [1, 4], można analizować ruch statku wraz z tworzoną wokół niego strefą bezpieczeństwa jako bryłę. Byłoby to faktycznie geoprzestrzenne podejście do analizy ruchu statku w środowisku geograficznym [5].

Artykuł wpłynął do redakcji 11.03.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano we wrześniu 2009 r.

LITERATURA

- [1] A. BANACHOWICZ, J. URBAŃSKI, *Nawigacja zliczeniowa*, Zeszyty Naukowe WSMW, 4, Gdynia, 1986.
- [2] A. BANACHOWICZ, J. URBAŃSKI, *Obliczenia nawigacyjne*, AMW, Gdynia, 1988.
- [3] A. BANACHOWICZ, *Hodografy parametrów nawigacyjnych*, Konferencja Naukowa „Aktualne problemy geodezji i kartografii”, Akademia Rolnicza, Wrocław, 18-20 maja 2000 r.
- [4] A. BANACHOWICZ, *A Comparison of Hodographs of Navigational Parameters*, Scientific Bulletin, 64, WSM, Szczecin, 2001.
- [5] A. BANACHOWICZ, J. URIASZ, *Precise Navigation with the Use of Buffer Zones*, GEOINFORMATICS 2004, 12th International Conference on Geoinformatics „Geospatial Information Research: Bridging the Pacific and Atlantic”, Sweden, Gävle, 7-9 June 2004.
- [6] A. BANACHOWICZ, G. BANACHOWICZ, *The Use of Estimation of Position Coordinates with Constraints in Navigation*, w: *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation TransNav 2007*, Gdynia, 2007.
- [7] A. GOETZ, *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa, 1965.
- [8] O. KARWOWSKI, *Zbiór zadań z geometrii różniczkowej*, WNT, Warszawa, 1971.
- [9] Z. KOPACZ, W. MORGAS, J. URBAŃSKI, *Ocena dokładności pozycji okrętu*, AMW, Gdynia, 2007.
- [10] E. NICZYPOROWICZ, *Krzywe płaskie*, PWN, Warszawa, 1991.
- [11] A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa, 1983.

-
- [12] Resolution A.529(13), *Accuracy Standards for Navigation*, IMO, London, 17 November 1983.
- [13] Resolution A.915(22), *Revised Maritime Policy and Requirements for Future Global Navigation Satellite System (GNSS)*, IMO, London, 29 November 2001.
- [14] J. URBAŃSKI, Z. KOPACZ, J. POSIŁA, *Nawigacja morska*, Cz. II. AMW, Gdynia, 2000.

A. BANACHOWICZ, A. WOLSKI, G. BANACHOWICZ

Determination of ship's plane trajectory curvature by GPS

Abstract. This article describes a method for the determination of ship's trajectory curvature in the horizontal plane using a series of GPS positions. Using mean square approximation of a series of position coordinates measurements we can obtain parametric equations of ship's coordinates. This allows us to plot a ship's plane trajectory curve and its evolute. Besides, an example of ship's curvi-linear trajectory and its evolute are presented, including the circulation and the inflexion point, determined from actual DGPS measurements.

Keywords: GPS, ship trajectory, positioning, navigation

Universal Decimal Classification: 527

