Biuletyn WAT
Vol. LVII, Nr 2, 2008

Systemy pomiarowe o kodach „złotych pierścieni liczbowych”

ORESTA BANDYRSKA, WŁODZIMIERZ RIZNYK*

Ukraińskie Nauczycielskie Badawcze Centrum Standaryzacji, Metrologii i Jakości Produkcji,
79-008 Lwów, ul. Krzywonosa 4
*Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich,
85-225 Bydgoszcz, ul. Ks. Kordeckiego 20

Streszczenie. Artykuł dotyczy badań w dziedzinie systemów pomiarowych bazujących na zasadach teorii „złotych pierścieni liczbowych” (ZPL).
Zasady tej teorii prowadzą do rozwoju techniki komputerowej, bazującej na wykorzystaniu nieznanych wcześniej wspaniałych własności kodów ZPL. Jako przykład może służyć optymalizacja rozmieszczenia elementów pomiarowych w przestrzeni w celu osiągnięcia jak najlepszej zdolności rozdzielczej całego systemu.
Słowa kluczowe: optymalizacja, nienadmiarowość, zdolność rozdzielcza, koncepcja, systemy pomiarowe
Symbole UKD: 621.317

Wstęp

Jednym z najbardziej aktualnych problemów związanych z projektowaniem systemów pomiarowych, radarowych oraz komputerowych jest problem doboru kodów, o ile zasada kodowania i przetwarzania informacji ma podstawowe znaczenie w osiągnięciu najważniejszych charakterystyk, takich jak szybkość działania, niezawodność, zdolność rozdzielcza i do samokontroli oraz innych, które doprowadzają do polepszenia wskaźników całego systemu. Celem badań opisywanych w artykule jest wykorzystanie szczególnych sekwencji liczbowych [1], czyli zasad teorii „złotych pierścieni liczbowych” (ZPL) [2], pozwalających konstruować systemy pomiarowe, radarowe lub komputerowe na podstawie zastosowania teorii ZPL, w tym kodu monolitycznego. Kodem monolitycznym nazywa się taki kod, którego kombinacje mają jednostajnie skoncentrowane symbole „1" oraz „0" we wszystkich dowolnych kombinacjach tego kodu. Właśnie dzięki wykorzystaniu omówionych modeli kombinatorycznych uzyskuje się polepszenie zdolności rozdzielczej systemów pomiarowych lub radarowych, a używanie kodu monolitycznego w tych systemach oraz systemach komputerowych prowadzi do wzrostu innych ważnych wskaźników, takich jak szybkość działania, niezawodność, zdolność do samokontroli.

Koncepcja „złotych pierścieni liczbowych"

Rozpatrzymy ciąg wybranych całkowitych liczb dodatnich $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$ na okręgu, tzn. liczbę k_1 umieścimy przy liczbie k_n itd., który został wpisany do tabeli o rozmiarach $n \times n$ w taki sposób, aby każdej j-tej uporządkowanej parze liczb (p_j, q_j), $p_j, q_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ była przypisana odpowiednia suma $S_j = S(p_j, q_j)$ utworzona na rozpatrywanym „pierścieniu liczbowym" (tab. 1), jaką określa się następującymi wzorami:

$$S_j = S(p_j, q_j) = \sum_{i=p_j}^{q_j} k_i, \qquad p_j \le q_j \tag{1}$$

$$Sj = S(pj, qj) = \sum_{i=1}^{q_j} k_i + \sum_{i=p_j}^{n} k_i, \qquad pj > qj. \tag{2}$$

Wiersze tabeli 1 odpowiadają pierwszej, a kolumny — drugiej liczbie kodu sumy. Tablica sum pierścieniowych na tym okręgu liczb ma następujące własności:

— na pozycjach (pj, qj), dla $pj = qj = l$, rozmieszczone są liczby kl, $l = 1, 2, \ldots, n$;

— na ostatniej pozycji w pierwszym wierszu (tzn. dla $pj = 1$, $qj = n$) znajduje się liczba $S = \sum_{i=1}^{n} k_i$;

— liczba $S(l, i)$, $(pj = 1, qj = i)$, umieszczona w l-tym wierszu i i-tej kolumnie, $i = 2, 3, \ldots, n;\ i > l$, jest większa od liczby $S(l, i\text{-}1)$, będącej na pozycji z lewej strony w tym samym wierszu o wartość ki, która zapisana jest na pozycji będącej na przecięciu przekątnej oraz i-tej kolumny.

Para liczb (p_j, q_j) definiuje sumę $S(p_j, q_j)$ na uporządkowanym zbiorze liczbowym. Jest ona liczbowym kodem danej sumy.

W przypadku, gdy $p_j \le q_j$, sumę pierścieniową S_j oblicza się zgodnie ze wzorem (1), a gdy $p_j > q_j$, korzystamy z równania (2).

TABELA 1

Sumy pierścieniowe

p_j	q_j				
	1	2		$n-1$	N
1	k_1	$\sum_{i=1}^{2} k_i$	…	$\sum_{i=1}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=1}^{n} k_i$
2	$\sum_{i=1}^{n} k_i$	k_2	…	$\sum_{i=2}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=2}^{n} k_i$
…			…		…
$n-1$	$\sum_{i=n-1}^{n} k_i + k_1$	$\sum_{i=n-1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{2} k_i$		k_{n-1}	$\sum_{i=n-1}^{n} k_i$
n	$k_n + k_1$	$k_n + \sum_{i=1}^{2} k_i$		$\sum_{i=1}^{n} k_i$	k_n

Na podstawie tabeli 1 łatwo jest zdefiniować maksymalną liczbę S różnowartościowych sum pierścieniowych, opisanych wzorem (3).

$$S = n^2 - n + 1. \tag{3}$$

Pojawia się pytanie, czy możliwe są takie sposoby ustalenia ilości elementów $k_1, k_2, \ldots, k_n$, przy której z użyciem S sum pierścieniowych udałoby się wyczerpać szereg liczb naturalnych od 1 do S z wykorzystaniem wzorów (1) i (2). Tak postawione zagadnienie prowadzi do definicji pojęcia „idealnego”, czyli „złotego pierścienia liczbowego”.

Złotym pierścieniem liczbowym (ZPL) nazywa się szereg kołowy liczb całkowitych, którego wszystkie możliwe sumy pierścieniowe wyczerpują ciąg liczb naturalnych od 1 do S, gdzie sumą pierścieniową może być Którakolwiek z jego liczb lub suma dowolnej ich ilości dodawanych jako sąsiednie elementy tego szeregu kołowego [2].

Na przykład szereg kołowy liczb (1, 4, 6, 2), gdzie $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = 6$, $k_4 = 2$, tworzy złoty pierścień, o ile wszystkie możliwe sumy pierścieniowe, otrzymane na podstawie wzorów (1) i (2), wyczerpują na tym szeregu liczb ($n = 4$) ciąg liczb naturalnych od 1 do $S = n(n-1) + 1 = 4(4-1) + 1 = 13$ (tab. 2).

W ogólnym przypadku konstruowania ZPL nasuwa się pytanie, czy możliwe są takie sposoby ustalenia elementów $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, w których używając sum pierścieniowych udałoby się wyczerpać ciąg liczb naturalnych opisywanym sposobem, lecz pod warunkiem, że każdą liczbę tego ciągu otrzymuje się więcej niż jeden raz.

Tabela 2

Sumy pierścieniowe na szeregu kołowym liczb (1, 4, 6, 2)

p_j	q_j			
	1	2	3	4
1	1	5	11	13
2	13	4	10	12
3	9	13	6	8
4	3	7	13	2

Innymi słowy, czy możliwe są warianty wypełnienia tabeli 1 liczbami naturalnymi od 1 do S-1 z wykorzystaniem wzorów (1), (2) i (4).

$$S = (n^2 - n)/R + 1, \tag{4}$$

gdzie: $R > 1$ — ilość różnych sposobów tworzenia równowartościowych liczb naturalnych.

Na przykład, szereg kołowy liczb (1, 2, 3, 1), gdzie $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$, tworzy złoty pierścień liczbowy z parametrami $n = 4$, $R = 2$ o ile wszystkie możliwe

Tabela 3

Sumy pierścieniowe na szeregu kołowym liczb (1, 2, 3, 1)

p_j	q_j			
	1	2	3	4
1	1	3	6	7
2	7	2	5	6
3	5	7	3	4
4	2	4	7	1

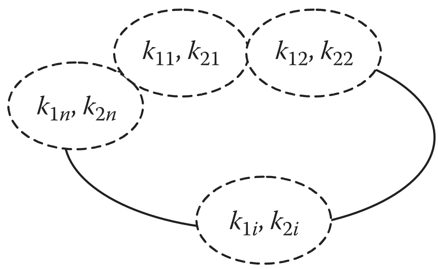
sumy pierścieniowe od 1 do S-1 = 6, otrzymane na podstawie wzorów (1), (2) oraz (4) wyczerpują na tym szeregu liczb ciąg liczb naturalnych od 1 do $(n^2 - n)/R = (4^2 - 4)/2 = 6$ generowanych dokładnie dwoma ($R = 2$) sposobami (tab. 3).

Z porównania wzorów (3) i (4) wynika, że przy $R = 1$ wzór (4) przechodzi w (3).

Teoria ZPL wskazuje na to, że istnieje nieskończona ilość złotych pierścieni liczbowych o parametrach n, R.

Wielowymiarowe złote pierścienie liczbowe

Rozpatrzymy szereg kołowy o wybranych n par całkowitych liczb dodatnich $\{(k_{11}, k_{21}), (k_{12}, k_{22}),\ldots, (k_{1i}, k_{2i}),\ldots (k_{1n}, k_{2n})\}$, jak model graficzny dwuwymiarowego ($t = 2$) złotego pierścienia liczbowego (rys. 1).



Rys. 1. Model graficzny dwuwymiarowego złotego pierścienia liczbowego

Załóżmy $(k_{11}, k_{21}) = (1,3)$; $(k_{12}, k_{22}) = (1,4)$; $(k_{13}, k_{23}) = (1,2)$; $(k_{14}, k_{24}) = (1,1)$ i obliczmy wszystkie możliwe sumy pierścieniowe tej konstrukcji na dwuwymiarowej macierzy o rozmiarach 3×4 z użyciem aparatu teorii liczb:

$$(k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) \equiv ((k_{11} + k_{12}), (k_{21} + k_{22})) \equiv (2,2);$$
$$(k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) \equiv ((k_{12} + k_{13}), (k_{22} + k_{23})) \equiv (2,1);$$
$$(k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) \equiv ((k_{13} + k_{14}), (k_{23} + k_{24})) \equiv (2,3);$$
$$(k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) \equiv ((k_{14} + k_{11}), (k_{24} + k_{21})) \equiv (2,4);$$
$$(k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) \equiv ((k_{11} + k_{12} + k_{14}), (k_{21} + k_{22} + +k_{23})) \equiv (3,4);$$
$$(k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) \equiv ((k_{12} + k_{13} + k_{14}), (k_{22} + k_{23} + k_{24})) \equiv (3,2);$$
$$(k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) \equiv ((k_{13} + k_{14} + k_{11}), (k_{23} + k_{24} + k_{21})) \equiv (3,1);$$
$$(k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) \equiv ((k_{14} + k_{11} + k_{12}), (k_{24} + k_{21} + k_{22})) \equiv (3,3);$$
$$(k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) \equiv (0, 0).$$

Rezultatem obliczeń są pary liczb, wyczerpujące pozycje komórek macierzy o rozmiarach 4×4 (tab. 4).

TABELA 4

Sumy pierścieniowe na szeregu kołowym wektorów {(1,3), (1,4), (1,2), (1,1)}

p_j	q_j			
	1	2	3	4
1	1,3	2,2	3,4	0,0
2	0,0	1,4	2,1	3,2
3	3,1	0,0	1,2	2,3
4	2,4	3,3	0,0	1,1

Z tabeli 4 wynika, że szereg kołowy dwuwymiarowych wektorów {(1,3), (1,4), (1,2), (1,1)} jest przykładem skonstruowania dwuwymiarowego złotego pierścienia liczbowego z czwórką ($n = 4$) par całkowitych liczb. Teoretycznie istnieje nieskończona ilość dwu- i wielowymiarowych złotych pierścieni liczbowych.

Kody złotych pierścieni liczbowych

Kodem złotych pierścieni liczbowych nazywa się taki kod, którego kombinacje mają jednostajnie skoncentrowane symbole „1” oraz „0” we wszystkich kombinacjach dozwolonych tego kodu, na przykład: 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, a także 1001, 1101, 1011. Kod monolityczny binarny ma pewne zalety w porównaniu z innymi kodami. Na przykład kod ten pozwala bardzo prosto wykrywać błędy, gdyż jeżeli przynajmniej jeden symbol „1” pojawi się wśród symboli „0” lub symbol „0” wśród symboli „1”, to jest to dostatecznym dowodem na zaistnienie błędu. Jeżeli w takim kodzie powstają błędy, to całkowicie lub częściowo mogą zostać natychmiast skorygowane na podstawie omówionej powyżej jednostajności symboli. Właśnie taki sposób zapewnia wysoki poziom ochrony zakodowanej informacji przed zakłóceniami. Kodowanie polega na prostym określeniu miejsca (pozycji) początku i końca jednostajnego szeregu symboli „1” lub „0”, tzn. dla wygenerowania każdej kombinacji wystarczy podać odpowiednią długotrwałość szeregu oraz umiejscowić jego początek. Z tego wynika kolejna zaleta, która polega na możliwości szybkiego kodowania informacji w kodzie monolitycznym. Poważnym wymogiem stawianym kodom monolitycznym jest zabezpieczenie dostatecznej rozmaitości jego stanów kombinacyjnych, odpowiadających skali kodowania zadanych liczb. Im więcej liczb o różnej wartości można zakodować w kodzie monolitycznym pozycyjnym, tym jest on lepszy. Właśnie dlatego mamy okazję wykorzystać właściwości złotych pierścieni liczbowych. Rozpatrzmy przykład wykorzystania ZPL (1, 4, 6, 2) dla konstruowania kodu monolitycznego (tab. 5).

Tabela 5

Kod złotego pierścienia liczbowego {1, 4, 6, 2}

Liczba	Kod	Liczba	Kod
0	0000	7	1101
1	1000	8	0011
2	0001	9	1011
3	1001	10	0110
4	0100	11	1110
5	1100	12	0111
6	0010	13	1111

W tabeli 5 są zapisane wszystkie możliwe kombinacje liczb w kodzie monolitycznym o złotym pierścieniu {1, 4, 6, 2} od 0 do $S = n^2 - n + 1 = 13$, gdzie n — ilość pozycji wybranego kodu monolitycznego, przy czym $n = 4$, $S = 13$ są parametrami odpowiedniego złotego pierścienia. Jak można zauważyć, dla rozszerzenia skali kodowania liczb w kodzie monolitycznym „pierścieniowym” wystarczy wziąć złoty pierścień liczbowy o wybranych koniecznych parametrach n i S.

Następnie skupiamy uwagę na możliwości kodowania wektorów na szeregu kołowym kombinacjami jednostajnie skoncentrowanych symboli „1” oraz „0” we wszystkich dozwolonych kombinacjach. Tym razem należy jednak używać aparatu matematycznego teorii kongruencji. Dla przykładu w tabeli 6 są wpisane wszystkie możliwe kombinacje dwuwymiarowych wektorów, otrzymane w kodzie o ZPL {(1,3), (1,4), (1,2), (1,1)} na kracie prostokątnej o rozmiarach 3 × 4 w przedziałach od (1,1) do (3,4).

Tabela 6

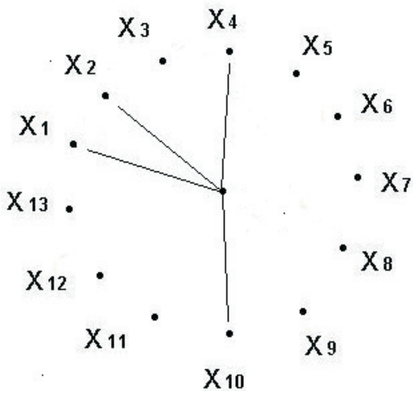
Kod złotego pierścienia liczbowego {(1,1), (1,2), (1,4), (1,3)}

Wektor	Kod	Wektor	Kod
(1,1)	0001	(2,3)	0011
(1,2)	0010	(2,4)	1001
(1,3)	1000	(3,1)	1011
(1,4)	0100	(3,2)	0111
(2,1)	0110	(3,3)	1101
(2,2)	1100	(3,4)	1110

Rozmiary prostokąta wynikają z równania $A \cdot B = S - 1$, gdzie $A = 3$, $B = 4$, a $n = 4$ — ilość bitów wybranego ZPL — kodu, dla którego n i S są jego parametrami, związanymi wzorem (3). Dla rozszerzenia skali i możliwości kodowania wektorów w kodzie ZPL wystarczy wykorzystać złoty pierścień wektorowy z wyznaczonych parametrów oraz rozmiarów macierzy.

Systemy pomiarowe o kodach ZPL

Wiadomo, że większość używanych dzisiaj systemów pomiarowych, bazujących na wielowartościowych miarach uporządkowanych, to systemy nadmiarowe (np. zwykła linijka o równomiernym rozmieszczeniu znaczników na jej skali). Nadmiar informacji równoznaczny jest z jej utraceniem. Na rysunku 2 przedstawiony jest przykład konstruowania skali kręgowej na podstawie kodu ZPL o parametrach $n = 4$, $S = 13$, $R = 1$. Skala ta ma cztery ($n = 4$) znaczniki, które są rozmieszczone



Rys. 2. Schemat graficzny skali kręgowej, skonstruowanej na podstawie kodu ZPL o parametrach $n = 4$, $S = 13$, $R = 1$

na odległościach kątowych, jak wskazują wagi bitów kodu ZPL o wybranych parametrach, tzn. (1, 4, 6, 2).

Z rysunku 2 wynika, że rozmieszczenie znaczników w punktach X_1, X_2, X_4, X_{10} pozwala odtwarzać dokładnie rozmiary odległości kątowych w zakresie od 0 do 360° z interwałem przyrostu $\alpha = 360°/S = 360°/13$.

W tabeli 7 wskazano sposoby odczytu na tej skali rozmiarów odległości kątowych, wykorzystując cztery ($n = 4$) znaczniki na kręgu podzielonym równomiernie na $S = 13$ części. Krzyżykami wskazano wybrane pary znaczników (rys. 2), służące dla odczytu odpowiednich rozmiarów odległości kątowych.

Tabela 7

Sposoby odczytu odległości kątowych na skali ZPL {1, 4, 6, 2}

Odległość kątowa	od				do			
	X_1	X_2	X_4	X_{10}	X_1	X_2	X_4	X_{10}
$\alpha = 360°/13$	×					×		
2α		×					×	
3α	×						×	
4α				×	×			
5α				×		×		
6α			×					×
7α				×			×	
8α		×						×
9α	×							×
10α			×		×			
11α			×			×		
12α		×			×			

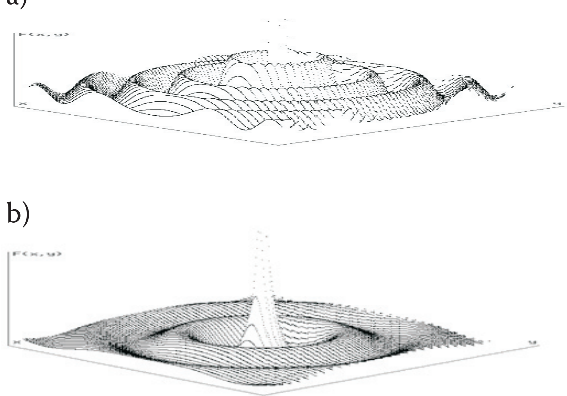
Łatwo ustalić, że skala kręgowa, skonstruowana na podstawie kodu ZPL, jest przykładem nienadmiarowego systemu pomiarowego, o ile każdej nowej kombinacji odczytu odpowiada nowa wartość odległości kątowej. W odróżnieniu od zwykłej skali kręgowej z n równomiernie rozmieszczonymi znacznikami, która pozwala wymierzyć dokładnie $(n - 1)$ wartości kąta z krokiem $\beta = 360°/n$, skala o ZPL — kodzie z n znacznikami może odtwarzać $S - 1 = n(n - 1)$ miar wielkości z krokiem przyrostu $\alpha = 360°/(n^2 - n + 1)$. Zmniejszenie kroku oznacza wzrost zdolności rozdzielczej całego systemu pomiarowego w $K = \beta/\alpha$ razy.

$$K = (n^2 - n + 1)/n. \tag{5}$$

Ze wzoru (5) wynika, że użycie wielowartościowych wzorców, skonstruowanych na zasadach kodu ZPL, pozwala odtwarzać wartości pomiarów wielkości fizycznych o zdolności rozdzielczej, które znacznie przewyższają możliwości zwykłych wzorców. Na przykład w systemach pomiaru interwałów czasowych. Często stosowana metoda pomiaru interwałów czasowych polega na porównaniu wzorcowych i mierzonych szeregów interwałów czasowych. Zdolność rozdzielcza tak pomyślanego systemu pomiarów w znacznej mierze zależy od możliwości odróżnienia jak najkrótszych odcinków czasowych. Właśnie w celu polepszenia tego wskaźnika można wykorzystać system kształtowania wzorcowych interwałów czasowych, bazujących na własności kodów ZPL.

a)

b)



Rys. 3. Widok diagramów przestrzennych rozpowszechnienia fal przez systemy anten rozmieszczonych: a) równomiernie; b) o kodzie ZPL

Wiadomo, że zdolność rozdzielcza systemu radarowego zależy od sposobu rozmieszczenia anten radioteleskopowych tworzących ten system. W celu polepszenia zdolności rozdzielczej systemu, anteny należy rozmieszczać w taki sposób, aby odległości między wszystkimi parami różnych anten nie były jednakowe w odpowiednio wybranych węzłach siatki kratkowej o wyznaczonych rozmiarach. Na rysunku 3 przedstawiono widok diagramów przestrzennych rozpowszechnienia fal przez systemy anten rozmieszczonych: a) równomiernie; b) o kodzie ZPL.

System o diagramie b) wyróżnia się lepszymi wskaźnikami dla sondowania przestrzeni, niżeli system o diagramie a), w tym niskim poziomem promieniowania bocznego, co pozwala polepszyć charakterystyki metrologiczne systemów, bazujących na własnościach kodów ZPL, i z powodzeniem stosować opisane metody w dziedzinie pomiarów radioastronomicznych oraz w hydroakustyce.

Podsumowanie

Badania systemów pomiarowych o kodach złotych pierścieni liczbowych (ZPL) prowadzą do rozwoju nowej koncepcji w metrologii, bazującej na wykorzystaniu wspaniałych właściwości „złotych pierścieni liczbowych". Badania te pozwalają rozszerzyć wyobrażenie o podstawowej roli nadmiarowości informacyjnej oraz strukturalnej systemów pomiarowych w celu osiągnięcia lepszej zdolności rozdzielczej układu lub całego systemu, a za tym polepszenia dokładności i prawidłowości pomiarów. Oprócz optymalizacji rozmieszczenia elementów pomiarowych w celu polepszenia zdolności rozdzielczej systemu, idea złotych pierścieni liczbowych jest z powodzeniem wykorzystana dla kodowania i przetwarzania informacji z osiągnięciem takich najważniejszych wskaźników, jak szybkość działania, niezawodność, zdolność do samokontroli oraz w metodach projektowania systemów radarowych o lepszych charakterystykach metrologicznych. Poważnym tematem badań jest konstruowanie na podstawie kodów ZPL wielowymiarowych wzorców o lepszej zdolności rozdzielczej, a w perspektywie — wektorowych procesorów i systemów pomiarowych.

Artykuł wpłynął do redakcji 14.04.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w kwietniu 2008 r.

LITERATURA

[1] R. C. Titsworth, *Optimal and minimax sequences*, International Telemetry Conference, 1963.

[2] W. Riznyk, W. Jabłoński, P. Boniewicz, *Synteza anten o niskim poziomie promieniowania bocznego*, Telekomunikacja — XXI wiek, Poznań, 1998, 110.

O. BANDYRSKA, W. RIZNYK

Measuring Systems on the Gold Numerical Ring Codes

Abstract. The paper considers research in the area of measuring systems based on the "gold numerical rings" (GNR)s. The fundamentals of the theory lead to development of computing technology using

unknown earlier remarkable properties of the GRB codes. As an example it can be the optimization for arrangement of sensors spreading in a space for achievement of the best resolving ability for all systems.
Keywords: optimization, non-redundancy, resolving ability, conception, measuring systems
Universal Decimal Classification: 621.317