



Wyznaczanie struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze 4-wymiarowego hipersześcianu

ROMAN KULESZA, ZBIGNIEW ZIELIŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, r.kulesza@ita.wat.edu.pl, z.zielinski@ita.wat.edu.pl

Streszczenie. W artykule rozwinięto metodę generowania struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji typu 4-wymiarowy hipersześcian, zaproponowaną w artykule [8], oraz przedstawiono sposób zastosowania tej metody do wyznaczenia obrazów geometrycznych cyklicznych i acyklicznych struktur roboczych takiej sieci o co najmniej czterech procesorach. Wyznaczono szeregi przeliczające etykietowanych oraz nieetykietowanych struktur roboczych sieci.

Słowa kluczowe: informatyka, diagnostyka systemowa, struktura logiczna sieci, sieci typu sześcian, systemy z tolerancją błędów

1. Wprowadzenie

Sieć procesorów ma strukturę logiczną typu sześcian 4-wymiarowy, jeżeli jej topologię przedstawia taki spójny graf zwykły, którego węzły można opisać wymiarowymi wektorami binarnymi (etykietami) w ten sposób, że odległość Hamminga między wektorami opisującymi węzły przyległe równa się jeden.

W sieciach procesorów o łagodnej degradacji nie dokonuje się naprawy (ani wymiany) procesora, który uległ uszkodzeniu, lecz blokuje się dostęp do niego, a nowa (zdegradowana) sieć kontynuuje funkcjonowanie pod warunkiem, że spełnia określone wymagania.

Projektowanie oraz użytkowanie omawianych sieci rodzi wiele problemów analitycznych [1, 2, 9, 10, 11, 14, 18] wynikających, między innymi, z potrzeby efektywnego wykorzystania wszystkich procesorów sieci, ustalenia zasad wybierania

zdegradowanej struktury logicznej sieci lub zakończenia jej życia oraz wybierania sposobu diagnozowania systemowego sieci zdegradowanej. Do rozwiązywania powyższych problemów niezbędna jest znajomość liczebności zbiorów możliwych zdegradowanych struktur logicznych sieci o określonych właściwościach oraz ich dogodna reprezentacja geometryczna.

W artykule [8] zaproponowano metodę generowania struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji typu 4-wymiarowego sześcianu przez ich odpowiednie komponowanie z wzorców, które są odpowiednimi podgrafami sześcianu 3-wymiarowego. Istotą tej metody są działania algebraiczne na tak zwanej skondensowanej postaci struktury, która jest podgrafem sześcianu 3-wymiarowego o odpowiednio opisanych węzłach i krawędziach.

Celem niniejszego artykułu jest wzbogacenie metody przedstawionej w [8] o działania na skondensowanej postaci struktury, które ułatwiają określenie liczebności zbiorów spójnych podgrafów sześcianu 4-wymiarowego określonego wymiaru oraz wyznaczenie szeregów przeliczających etykietowane i nieetykietowane struktury robocze sieci o co najmniej czterech procesorach.

Artykuł składa się z czterech części oraz podsumowania. W części drugiej przypomniano (w dużym skrócie) podstawy metody komponowania struktur roboczych sieci przedstawione w artykule [8]. W częściach trzeciej oraz czwartej przedstawiono metody działań na skondensowanych postaciach struktur do wyznaczenia obrazów geometrycznych (odpowiednio) struktur cyklicznych oraz acyklicznych i podano wyznaczone szeregi przeliczające takie struktury. W podsumowaniu sformułowano wnioski wynikające z wyników przedstawionych w artykule.

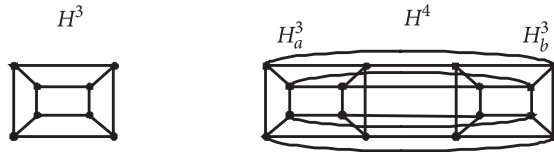
2. Podstawy metody komponowania struktur

Strukturę logiczną sieci procesorów nazywamy strukturą typu sześcian δ -wymiarowy ($\delta \geq 3$, jeżeli przedstawia ją taki spójny graf zwykły $H^\delta = \langle E, U \rangle$ (E — zbiór procesorów, U — zbiór dwukierunkowych linii transmisji danych między procesorami), którego węzły można opisać δ -wymiarowymi wektorami binarnymi (etykietami) w ten sposób, że odległość Hamminga między wektorami opisującymi węzły przyległe równa się jeden [6]. Graf H^δ nazywa się hipersześcianem δ -wymiarowym.

Graf H^δ jest grafem regularnym stopnia δ , to jest takim, że stopień $\mu(e) = |E(e)|$ ($E(e)$ — zbiór węzłów przyległych do węzła $e \in E$) każdego węzła grafu jest równy δ oraz jego podgrafy, które są cyklami prostymi, są rzędu parzystego. Graf H^δ ($\delta > 3$) nie jest grafem planarnym.

Niech \tilde{H}^δ oznacza graf H^δ o etykietowanych węzłach, a $\tilde{G}_p(H^\delta)$ oraz $\tilde{G}_p(\tilde{H}^\delta)$ odpowiednio zbiór spójnych nieetykietowanych oraz etykietowanych podgrafów grafu H^δ rzędu p .

Graf H^4 będziemy przedstawiać w postaci takiej kompozycji planarnych grafów bliźniaczych H_a^3 i H_b^3 (rys. 2.1), że $E(H^4) = \{E(H_a^3) \cup E(H_b^3)\}$ oraz $U(H^4) = \{U(H_a^3) \cup U(H_b^3) \cup U^*\}$ ($|U^*| = 2^3$).

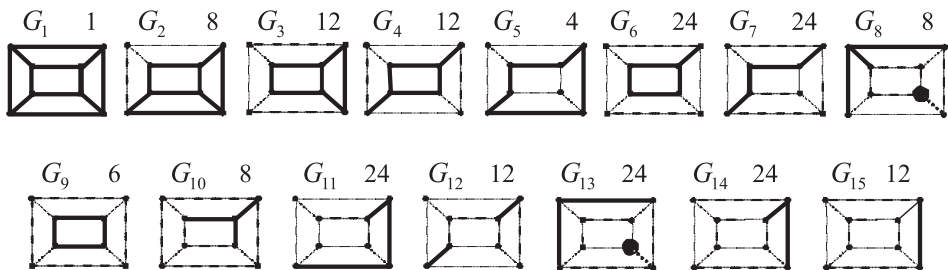


Rys. 2.1. Sześciany H^3 oraz $H^4 = H_a^3 \oplus H_b^3$

Strukturę $G \in \tilde{G}(H^4)$ traktujemy jako kompozycję podgrafów $\langle E(G) \rangle_{H_a^3}$ i $\langle E(G) \rangle_{H_b^3}$.

Graf $\langle E(G) \rangle_{H_a^3}$ nazywamy wzorcem indukującym strukturę G w klasie kompozycji $\langle \alpha_a(G), \alpha_b(G), \alpha(G) \rangle$ ($\alpha_a(G) \geq \alpha_b(G)$), gdzie $\alpha_x(G) = |E(\langle E(G) \rangle_{H_x^3})|$ ($x \in \{a, b\}$) oraz $\alpha(G) = |\{u \in U(G) : (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_a^3}) \neq \emptyset) \wedge (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3}) \neq \emptyset)\}|$ ($E(u)$ — zbiór węzłów incydentnych z krawędzią u).

Zbiór wzorców $\hat{G}(H_a^3)$, które mogą indukować struktury $G \in \tilde{G}_p(H^4)$, ($p \geq 4$) oraz liczebność $\nu(G')$ ($G' \in \hat{G}(H_a^3)$) grupy węzłowej grafu G' , przedstawiono w [8] (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Zbiór $\hat{G}(H_a^3)$ wzorców, które mogą indukować struktury $\tilde{G}_p(H^4)$ ($p \geq 4$) (podano liczebność grupy węzłowej grafu $G' \in \hat{G}(H_a^3)$)

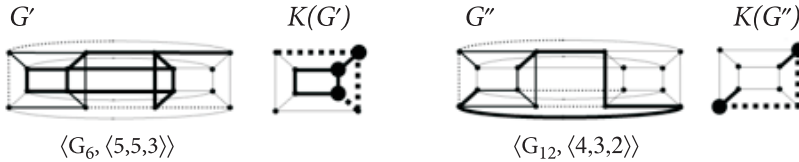
Niech $B(E)$ ($E \subseteq E(H_x^3), x \in (a, b)$) oznacza zbiór węzłów bliźniaczych zbioru E .

Jako kanoniczny reprezentant struktury $G \in \tilde{G}(H^4)$ wybierzemy taki podgraf $K(G)$ grafu H_a^3 , który jest sumą grafów $\langle E(G) \rangle_{H_a^3}$ i $\langle B(E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3})) \rangle_{H_a^3}$ o wyróżnionych węzłach bliźniaczych grafu G i tych krawędziach, które nie są krawędziami grafu $\langle E(G) \rangle_{H_a^3}$, a więc

$$K(G) = \langle\langle E(G) \rangle_{H_a^3} \cup \langle B(E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3})) \rangle_{H_a^3}; \{B(E(G)) \cap E(H_a^3)\}; \{B(U(\langle E(G) \rangle_{H_b^3})) \setminus U(\langle E(G) \rangle_{H_a^3})\} \rangle.$$

Graf $K(G)$ nazywamy skondensowaną postacią struktury $G \in \check{G}(H^4)$. Węzły zbioru $\{B(E(G)) \cap E(H_a^3)\}$ oznaczamy przez ich wytluszczenie, a krawędzie zbioru $\{B(U(\langle E(G) \rangle_{H_b^3})) \setminus U(\langle E(G) \rangle_{H_a^3})\}$ przedstawiamy w postaci linii przerywanych.

Dla przykładu (rys. 2.3) struktura G' jest indukowana przez wzorec G_6 (rys. 2.2) w klasie kompozycji $\langle 5,5,3 \rangle$, a struktura G'' — przez wzorec G_{12} w klasie kompozycji $\langle 4,3,2 \rangle$. Grafy $K(G')$ i $K(G'')$ są skondensowanymi postaciami struktury G' i struktury G'' .



Rys. 2.3. Przykłady skondensowanych postaci struktur G' i G''

3. Struktury cykliczne

Niech $\check{G}_p^C(H^4)$ oraz $\check{G}_p^C(\check{H}^4)$ oznaczają zbiory cyklicznych, odpowiednio nieetykietowanych oraz etykietowanych spójnych podgrafów grafu H^4 rzędu $p \geq 4$. Zauważmy, że

$$[G \in \check{G}_p^C(H^4)] \Rightarrow [(G(K(G)) \in \check{G}(H_a^3)) \wedge (\forall_{e \in E^*} : \mu(e, K) > 1) \wedge \wedge (\forall_{e' \in \check{E}} : \{E(e') \cap \{\check{E} \cup E^*\}\} \neq \emptyset) \wedge (p = |E(G(K(G)))| + |\check{E}| + |E^*|)], \tag{3.1}$$

gdzie $G(K(G))$ oznacza wzorec skondensowanej postaci struktury G , $\check{G}(H_a^3)$ — zbiór spójnych wzorców, $E^* = \{E(K(G)) \setminus E(G(K(G)))\}$ oraz $\check{E} \subseteq E(G(K(G)))$.

Niech $K_p^C, K_p^C(G^*), K_p^C(G^*, s)$ oraz $\Psi_p^C(G^*)$ oznaczają (odpowiednio) zbiór skondensowanych postaci struktur cyklicznych rzędu p , zbiór takich postaci struktur indukowanych przez wzorec $G^* \in \check{G}(H_a^3)$, zbiór takich postaci struktur indukowanych przez wzorec G^* w klasie kompozycji s oraz zbiór kompozycji, w których wzorec G^* indukuje strukturę cykliczną rzędu p .

Ponieważ $K_p^C = \bigcup_{G^* \in \check{G}(H_a^3)} \bigcup_{s \in \Psi_p^C(G^*)} K_p^C(G^*, s)$ oraz graf \check{H}^4 dzieli się na dwa 3-wymiarowe podsześciany bliźniacze, to

$$\left| \tilde{G}_p^C(\tilde{H}^4) \right| = \sum_{K \in K_p^C} [2 - \nabla(K)] \nu(G^*(K)) \nu(K), \quad (3.2)$$

gdzie $G^*(K)$ oznacza wzorec skondensowanej postaci K oraz

$$\begin{aligned} [\exists_{G \in \hat{G}(H_a^3)} : \langle \langle \{E^* \cup \dot{E}\} \rangle_K; \dot{E} \rangle \doteq \langle G; \dot{E} \rangle] &\Rightarrow [\nabla(K) = 1] \text{ i} \\ [\neg \exists_{G \in \hat{G}(H_a^3)} : \langle \langle \{E^* \cup \dot{E}\} \rangle_K; \dot{E} \rangle \doteq \langle G; \dot{E} \rangle] &\Rightarrow [\nabla(K) = 0]. \end{aligned}$$

Wyznaczenie więc liczby spójnych etykietowanych struktur cyklicznych określonego rzędu nie nastrocza specjalnych problemów. Po prostych, lecz żmudnych przekształceniach otrzymujemy szereg przeliczający takie struktury

$$\begin{aligned} \tilde{G}^C(\tilde{H}^4, x) = x^{16} + 16x^{15} + 120x^{14} + 512x^{13} + 1136x^{12} + 1776x^{11} + \\ + 1824x^{10} + 1392x^9 + 688x^8 + 112x^7 + 128x^6 + 0x^5 + 24x^4. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wyznaczenie liczby spójnych nieetykietowanych struktur cyklicznych typu H^4 określonego rzędu nastrocza problemy wynikające z tego, że różne wzorce dla różnych klas kompozycji struktury mogą indukować struktury izomorficzne.

Zauważmy, że znacznie łatwiej jest wykluczyć niż stwierdzić podobieństwo porównywanych struktur, bowiem jeżeli wartości dowolnie wybranej charakterystyki (cechy) porównywanych struktur są różne, to struktury te nie są podobne, natomiast stwierdzenie, że struktury są podobne, wymaga (w ogólnym przypadku) upewnienia się, że istnieje permutacja węzłów przekształcająca jedną strukturę w drugą.

Charakterystykami efektywnie wykluczającymi podobieństwo struktur typu H^4 są (między innymi) liczba $\omega_a(G)$ węzłów stopnia a w grafie G oraz jego podgraf zawierający węzły stopnia a , bowiem $[\exists_{a \in \{1, \dots, 4\}} : \omega_a(G') \neq \omega_a(G'')] \Rightarrow [G' \not\equiv G'']$ oraz $[\langle \{e' \in E(G') : \mu(e') = a\} \rangle_{G'} \not\equiv \langle \{e' \in E(G'') : \mu(e') = a\} \rangle_{G''}] \Rightarrow [G' \not\equiv G'']$.

Zauważmy, że wartość $\omega_a(K^{-1})$ można wyznaczyć bezpośrednio z grafu K , bowiem

$$\begin{aligned} \omega_a(K^{-1}) = & \left| \{e' \in \{E(K) \setminus \dot{E}\} : \mu(e') = a\} \right| + \\ & + \left| \{e'' \in \dot{E} : \mu(e'', G) = a - 1\} \right| + \left| \{e''' \in \{\dot{E} \setminus \dot{E}^*\} : |E(e''') \cap \dot{E}| = a - 1\} \right| + \\ & + \left| \{e^* \in \dot{E}^* : |E(e^*) \cap \{\dot{E} \cup E^*\}| = a - 1\} \right|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie $\dot{E}^* = \{e \in \dot{E} : \{E(e) \cap E^*\} \neq \emptyset\}$.

Oznaczmy:

$$m_a(e, G) = |\{e' \in E(e) : \mu(e') = a\}| \quad (a \in \{2, 3, 4\}, e \in E(G), G \in \check{G}_p^C(H^4), p \geq 4);$$

$$m(e, G) = (m_4(e, G), m_3(e, G), m_2(e, G));$$

$$\Lambda(G) = \{\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : (\exists_{e \in E(G)} : m(e, G) = \bar{\lambda})\};$$

$$\kappa(\bar{\lambda}) = |\{e \in E(G) : m(e, G) = \bar{\lambda}\}|;$$

$$M(G) = [\bar{\lambda}, \kappa(\bar{\lambda})]_{|\Lambda(G)| \times 4} (\bar{\lambda}_i \succ \bar{\lambda}_{i+1}).$$

Macierz $M(G)$ jest macierzą stopni węzłów przyległych do węzłów struktury cyklicznej, ale nie ma powodów, aby w analogiczny sposób określić taką macierz dla struktury acyklicznej.

Zauważmy, że $M(H^4) = [4 \ 0 \ 0 \ 16]$, a jeżeli podgraf G grafu H^4 jest cyklem prostym rzędu p , to $M(G) = [0 \ 0 \ 2 \ p]$.

Macierz $M(G)$ pozwala w stosunkowo prosty sposób stwierdzić izomorfizm porównywanych struktur typu H^4 .

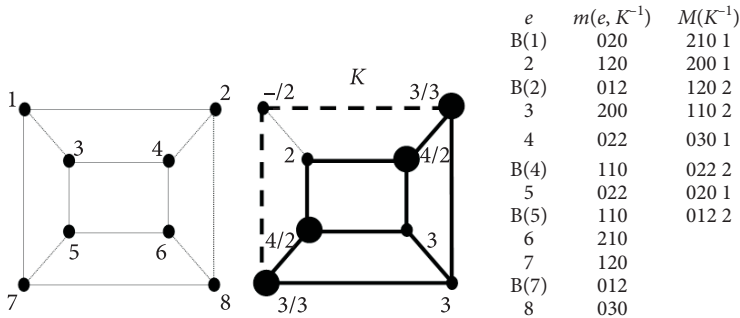
Zauważmy, że jeżeli $M(G') = M(G'') (\{G', G''\} \subset \check{G}^C(H^4))$, to $G' \doteq G''$, bowiem w jednym z takich właściwych grafów cyklicznych G^* i G^{**} , różnych od cykli prostych, że $[M(G^*) = M(G^{**})] \wedge [G^* \bar{\equiv} G^{**}]$ istnieje obwód rzędu nieparzystego, co przeczy własności grafu typu H^4 , a dla struktur, które są cyklami prostymi, teza jest oczywista.

Wektor $\omega(K^{-1})$ i macierz $M(K^{-1})$ można wyznaczyć bezpośrednio z postaci skondensowanej K struktury $G = K^{-1}$, bowiem:

$$\begin{aligned} [e \in \{E(G(K)) \setminus \dot{E}\}] &\Rightarrow [\mu(e, K^{-1}) = \mu(e, K)]; \\ [e \in \dot{E}] &\Rightarrow [(\mu(e, K^{-1}) = \mu(e, G(K)) + 1) \wedge (\mu(B(e), K^{-1}) = \\ &= |E(e) \cap \{\dot{E} \cup E^*\}| + 1)]; \\ [e \in E^*] &\Rightarrow [\mu(B(e), K^{-1}) = |E(e) \cap \{\dot{E} \cup E^*\}|]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dla przykładu (rys. 3.1) struktura $K^{-1} \in \check{G}_{12}^C(H^4)$ jest indukowana przez wzorzec G_2 (rys. 2.2) o czterech węzłach oznaczonych (wyróżnionych na rysunku) w klasie kompozycji $\langle 7, 5, 4 \rangle$.

Stopnie węzłów $\mu(e, K^{-1}) / \mu(B(e), K^{-1})$ określono zgodnie z zależnością (3.5), z czego wyznaczamy $\omega(K^{-1}) = (2, 6, 4)$ oraz macierz $M(K^{-1})$.



Rys. 3.1. Ilustracja sposobu wyznaczenia wektora $\omega(K^{-1})$ i macierzy $M(K^{-1})$ bezpośrednio z postaci skondensowanej K

Redukowanie struktur izomorficznych w określonym zbiorze struktur typu H^4 wykonywane jest (z reguły) przez dzielenie tego zbioru na podzbiory o różnych wartościach umiejętnie wybranych charakterystyk struktur i (w razie potrzeby) ostateczne rozstrzygnięcie (o podobieństwie struktur) przez wyznaczenie macierzy stopni węzłów przyległych do węzłów porównywanych struktur.

Generowanie struktur typu H^4 metodą kompozycji indukuje (między innymi) zbiór K_p^C skondensowanych postaci struktur cyklicznych rzędu $p \geq 4$, który (w ogólnym przypadku) odwzorowuje (nieetykietowane) struktury izomorficzne.

Niech $\mathfrak{R}(K_p^C)$ oznacza taki podzbiór zbioru K_p^C , w którym nie ma pary elementów izomorficznych. Mówimy, że zbiór $\mathfrak{R}(K_p^C)$ jest zredukowanym (o elementy izomorficzne) zbiorem K_p^C . Operacja redukcji zbioru K_p^C jest oczywiście operacją arbitralną.

Oznaczmy $P(\mathfrak{R}(K_p^C), K) = \{K' \in \{K_p^C \setminus \mathfrak{R}(K_p^C)\} : K' \doteq K\} (K \in \mathfrak{R}(K_p^C))$.

Zbiór $P(\mathfrak{R}(K_p^C), K)$ jest zbiorem tych elementów zredukowanych w zbiorze K_p^C , które są izomorficzne względem elementu $K \in \mathfrak{R}(K_p^C)$ oraz $K \in P(\mathfrak{R}(K_p^C), K)$, bowiem dowolny element zbioru $\mathfrak{R}(K_p^C)$ jest izomorficzny względem samego siebie.

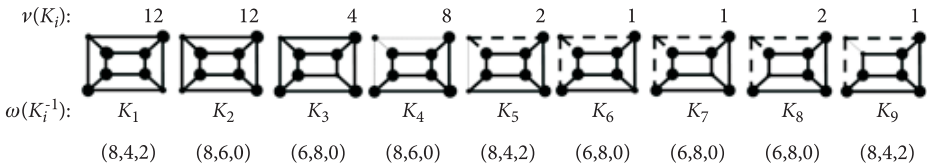
Oczywiście

$$|[\tilde{G}_p^C(H^4)]| = |\mathfrak{R}(K_p^C)| \wedge [\nu(K^{-1})] = \sum_{K' \in P(\mathfrak{R}(K_p^C), K)} \nu(G(K')) \nu(K'), \quad (3.6)$$

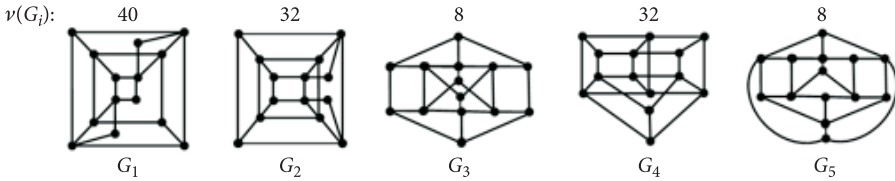
gdzie $\nu(G(K))$ oraz $\nu(K)$ oznaczają (odpowiednio) grupę węzłową (liczebność zbioru przekształceń automorficznych) wzorca postaci skondensowanej K oraz tej postaci.

Dla przykładu (rys. 3.2), zgodnie z zależnością 3.1, otrzymujemy zbiór K_{14}^C i wartości $\nu(K) (K \in K_{14}^C)$. Wartości $\omega(K^{-1})$ (wyznaczone zgodnie z zależnością 3.5) wyodrębniają w zbiorze K_{14}^C trzy podzbiory $\{K_1, K_5, K_9\}$, $\{K_2, K_4\}$ i $\{K_3, K_6, K_7, K_8\}$, w których mogą być struktury wzajemnie izomorficzne. Sprawdzamy, że $M(K_1^{-1}) = M(K_5^{-1})$, $M(K_2^{-1}) = M(K_4^{-1})$ oraz $M(K_3^{-1}) = M(K_6^{-1}) = M(K_8^{-1})$, a więc

$|\tilde{G}_{14}^C(H^4)| = 5$. Zbiór $\tilde{G}_{14}^C(H^4)$ przedstawiono (rys. 3.3) w postaci obrazów geometrycznych dogodnych do celów zarządzania siecią procesorów (obrazów o możliwie minimalnej liczbie przecięć linii krawędziowych) oraz określono (zgodnie z zależnością 3.6) liczbę $\nu(G)$ sposobów przypisania etykiet węzłom struktury $G \in \tilde{G}_{14}^C(H^4)$.



Rys. 3.2. Zbiór K_{14}^C skondensowanych postaci struktur cyklicznych rzędu czternastego



Rys. 3.3. Obrazy geometryczne struktur zbioru $\tilde{G}_{14}^C(H^4)$

Powyższy przykład nie ilustruje (w pełni) złożoności obliczeniowej wyznaczania obrazów geometrycznych struktur zbiorów $\tilde{G}_p^C(H^4)$ ($p \geq 4$) za pomocą działań na zbiorach K_p^C , bowiem zależy ona w sposób wykładniczy od wartości $|K_p^C|$ (tab. 3.1).

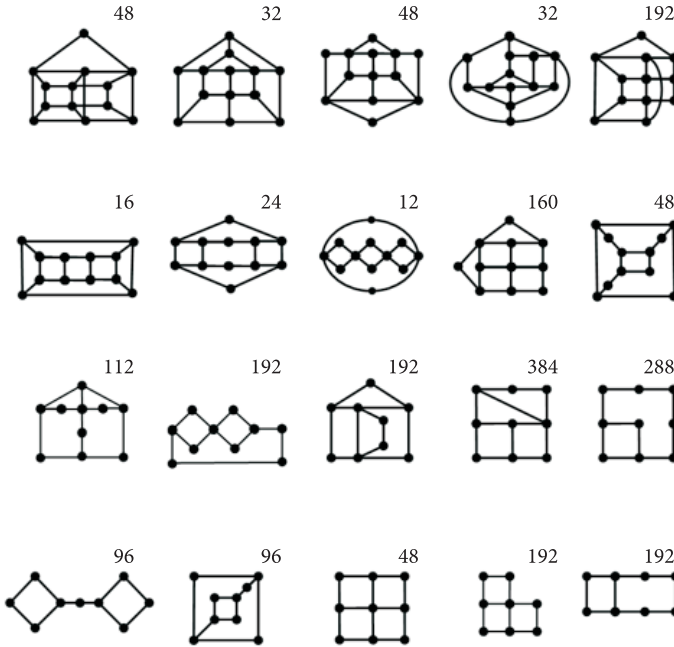
TABELA 3.1

p	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
$ K_p^C $	1	9	18	64	39	46	22	14	3	5	0	2

Po żmudnych przekształceniach otrzymujemy szereg przeliczający spójne nieetykietowane struktury cykliczne typu H^4 określonego rzędu

$$\tilde{G}^C(H^4, x) = x^{16} + x^{15} + 5x^{14} + 8x^{13} + 13x^{12} + 13x^{11} + 14x^{10} + 7x^9 + 6x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 0x^5 + x^4. \tag{3.7}$$

Dwadzieścia wybranych (z 77) obrazów geometrycznych cyklicznych struktur roboczych sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu H^4 przedstawiono na rysunku 3.4.



Rys. 3.4. Wybrane (z 77) obrazy geometryczne cyklicznych struktur roboczych sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu H^4 (podano liczbę struktur o określonym obrazie)

Duża różnorodność roboczych struktur logicznych takiej sieci procesorów dobrze charakteryzuje rodzaj problemów występujących (między innymi) przy wyznaczaniu strategii diagnozowania systemowego sieci [11, 18, 19].

4. Struktury acykliczne

Rozpatrzmy struktury acykliczne, które nie są drzewami.

Oznaczmy $\tilde{G}_p^{A,D}(H^4) = \{\tilde{G}_p^A(H^4) \setminus \tilde{G}_p^D(H^4)\}$ i potraktujmy strukturę $G \in \tilde{G}_p^{A,D}(H^4)$ jako takie rozszerzenie (nadgraf) grafu $G' \in \tilde{G}_p^C(H^4)$ ($p' \geq 4$) o $k = p - p' > 0$ węzłów, że $\langle U^C(G) \rangle_G = G'$ ($U^C(G)$ — zbiór krawędzi cyklicznych grafu G).

Oznaczmy $\tilde{G}^{A,D}(G') = \{G'' \in \tilde{G}^{A,D}(H^4) : \langle U^C(G'') \rangle_{G''} = G'\} (G' \in \tilde{G}^C(H^4))$.

Zbiór $\tilde{G}^{A,D}(G')$ jest więc zbiorem takich rozszerzeń grafu cyklicznego G' , które są niezmiennicze względem liczby cyklomatycznej grafu G' .

Niech $\tilde{G}_{p',k}^C(H^4) \mid \tilde{G}_{p'}^C(H^4)$ oznacza zbiór rozszerzeń wszystkich grafów zbioru $\tilde{G}_{p'}^C(H^4)$ o k węzłów.

Oczywiście $\check{G}_p^{AD}(H^4) = \bigcup \bigcup \check{G}_{p',k}(H^4 \mid \check{G}_{p'}^C(H^4))$ oraz $[(k'' > k') \wedge (\check{G}_{p',k'}(H^4 \mid \check{G}_{p'}^C(H^4)) \neq \emptyset)] \Rightarrow [(\check{G}_{p',k'}(H^4 \mid \check{G}_{p'}^C(H^4)) = \emptyset)]$,

a więc wyznaczanie struktur zbioru $\check{G}_p^{AD}(H^4)$ i określanie liczby $\nu(G) (G \in \check{G}_p^{AD}(H^4))$ można sprowadzić do sekwencyjnego wyznaczania zbiorów $K_{p',k}^C = \{K \in K_{p'}^C : K^{-1} \in \check{G}_{p',k}(H^4 \mid \check{G}_{p'}^C(H^4))\} (k = 1, \dots)$.

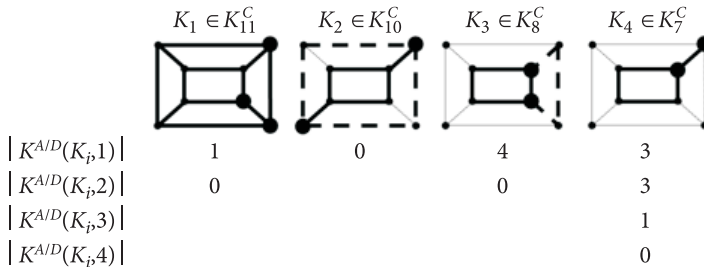
Zauważmy, że

$$[\check{G}^{AD}(G') \neq \emptyset] \Leftrightarrow [(\exists_{e' \in \{E(G(K)) \setminus \dot{E}(K)\}} : \{E(e', H_a^3) \cap \{\dot{E}(K) \cup E^*(K)\}\} = \emptyset) \vee (\exists_{e'' \in \{E(H_a^3) \setminus E(K)\}} : (|\{E(e'', H_a^3) \cap E(G(K))\}| = 1) \vee (|\{E(e'', H_a^3) \cap E^*(K)\}| = 1))], \tag{4.1}$$

przy czym $K^{-1} = G'$ oraz $(\dot{E}(K) = \emptyset) \Rightarrow (\check{G}^{AD}(K^{-1}) = \emptyset)$, bowiem

$$[\check{G}^{AD}(G') \neq \emptyset] \Leftrightarrow [\exists_{e \in \{E(H^4) \setminus E(G')\}} : |\{E(e, H^4) \cap E(G')\}| = 1].$$

Dla przykładu (rys. 4.1) zgodnie z zależnością (4.1) określono liczbę $|K^{AD}(K_i, k)|$ rozszerzeń różnych struktur cyklicznych o postaci skondensowanej K_i o k węzłów.



Rys. 4.1. Ilustracja określenia (zgodnie z zależnością 4.1) liczby $|K^{AD}(K_i, k)|$ rozszerzeń struktury cyklicznej K_i o k węzłów

Po niezbyt trudnych, ale żmudnych przekształceniach otrzymujemy szeregi przeliczające spójne etykietowane oraz nieetykietowane struktury acykliczne, które nie są drzewami

$$\check{G}^{AD}(\check{H}^4, x) = 16x^{13} + 276x^{12} + 1136x^{11} + 3320x^{10} + 6112x^9 + 3600x^8 + 1968x^7 + 720x^6 + 192x^5, \tag{4.2}$$

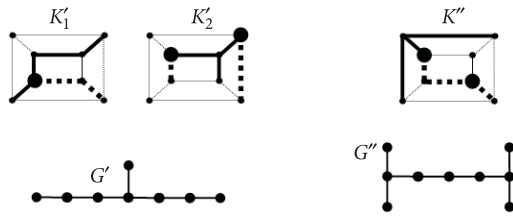
$$\check{G}^{AD}(H^4, x) = x^{13} + 6x^{12} + 24x^{11} + 26x^{10} + 27x^9 + 21x^8 + 9x^7 + 4x^6 + x^5. \tag{4.3}$$

Rozpatrzmy struktury acykliczne, które są drzewami.

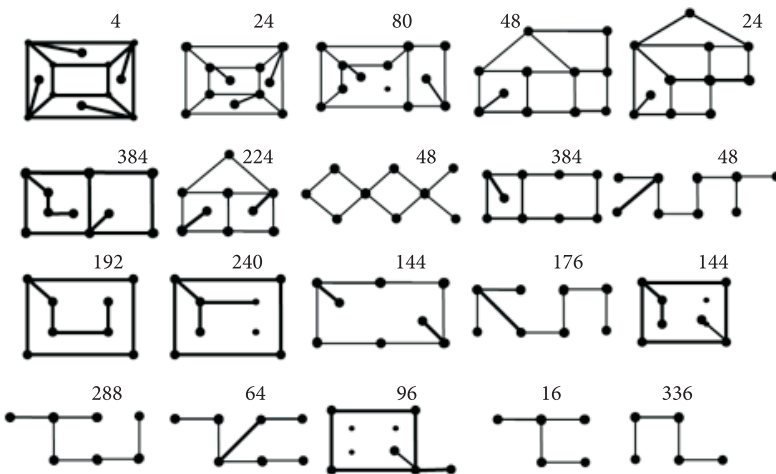
Spójny graf $K = \langle\langle E, U \rangle; \dot{E}; U^* \rangle (E \subset E(H_a^3), U \subset U(H_a^3), \dot{E} \subset E, U^* \subset U)$ o tak oznaczonych węzłach i krawędziach, że $[\exists_{e' \in E: \{E(e', K) \cap \dot{E}\} \neq \emptyset} \exists_{e'' \in \{E \setminus e'\}: \{E(e'', H_a^3) \cap \dot{E}\} \neq \emptyset}] \Rightarrow \Rightarrow [(e', e'') \in U]$, jest skondensowaną postacią drzewa typu H^4 wtedy i tylko wtedy, gdy jego liczba cyklomatyczna $\lambda(K)$ równa się zero oraz zbiór \dot{E} jest zbiorem wewnątrznie stabilnym ($\forall_{e \in \dot{E}}: \{E(e, K) \cap \dot{E}\} = \emptyset$), bowiem tylko wtedy $\lambda(K^{-1}) = \lambda(K)$.

Struktury zbioru $\tilde{G}_p^D(H^4) (p \geq 4)$ mogą więc być indukowane tylko przez wzorce zbioru $\{G' \in \tilde{G}(H_a^3): \lambda(G') = 0\}$ (rys. 2.2), przy czym $[p \geq 10] \Rightarrow [\tilde{G}_p^D(H^4) = \emptyset]$.

Dla przykładu (rys. 4.2) grafy K'_1 i K'_2 oraz K'' , które powstały (odpowiednio) z wzorców (rys. 2.2) G_7 i G_{10} oraz G_8 w klasach kompozycji $\langle 5, 3, 1 \rangle$ i $\langle 4, 4, 2 \rangle$ oraz $\langle 5, 4, 2 \rangle$, są skondensowanymi postaciami struktury $G' \in \tilde{G}_8^D(H^4)$ oraz struktury $G'' \in \tilde{G}_9^D(H^4)$.



Rys. 4.2. Skondensowane postacie struktur $G' \in \tilde{G}_8^D(H^4)$ oraz $G'' \in \tilde{G}_9^D(H^4)$



Rys. 4.3. Wybrane (z 139) obrazy geometryczne acyklicznych struktur roboczych sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu H^4 (podano liczbę struktur o określonym obrazie)

Po prostych przekształceniach otrzymujemy szeregi przeliczające (odpowiednio) etykietowanych oraz nieetykietowanych drzew typu H^4 określonego rzędu

$$\tilde{G}^D(\tilde{H}^4, x) = 240x^9 + 632x^8 + 1384x^7 + 720x^6 + 528x^5 + 192x^4 \quad (4.4)$$

oraz

$$\tilde{G}^D(H^4, x) = 2x^9 + 4x^8 + 5x^7 + 3x^6 + 3x^5 + x^4. \quad (4.5)$$

Dwadzieścia wybranych (z 138) obrazów geometrycznych acyklicznych struktur roboczych sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu H^4 przedstawiono na rysunku 4.3.

5. Podsumowanie

Stosując metodę komponowania struktur logicznych typu sześcián 4-wymiarowy z wzorców 3-wymiarowych (zapropozowaną w artykule [8]) oraz metody działań algebraicznych na skondensowanej (do sześciánu 3-wymiarowego) postaci określonej klasy takiej struktury (zapropozowane w niniejszym artykule), wyznaczono liczebności zbiorów spójnych etykietowanych $\tilde{G}_p(\tilde{H}^4)$ oraz nieetykietowanych $\tilde{G}_p(H^4)$ struktur roboczych o $p \geq 4$ procesorach, sieci procesorów o łagodnej degradacji i pierwotnej strukturze logicznej typu 4-wymiarowy hipersześcián.

Wyodrębniono zbiory struktur cyklicznych, acyklicznych o liczbie cyklomatycznej większej od zera oraz drzew, wyznaczono szeregi przeliczające i obrazy geometryczne struktur tych klas i określono liczbę struktur roboczych sieci o określonym obrazie geometrycznym. Obrazy geometryczne struktur (z uwagi na objętość artykułu) przedstawiono tylko dla wybranych struktur roboczych sieci.

Uzyskane wyniki mają praktyczne znaczenie dla oceny własności sieci procesorów o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu H^4 w zależności od stopnia jej degradacji (liczby procesorów wyeliminowanych z sieci) oraz dla wybrania najkorzystniejszego (w określonym sensie) sposobu diagnozowania takiej sieci o określonej strukturze roboczej [11, 18, 19].

Artykuł wpłynął do redakcji 25.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w maju 2012 r.

LITERATURA

- [1] A. CARUSO, S. CHESSA, P. MAESTRINI, P. SANTI, *Diagnosability of Regular Systems*, J. Algorithms, 1, 1, 2002, 1-12.
- [2] C.P. CHANG, P.L. LAI, J.J.M. TAN, L.H. HSU, *Diagnosability of t-Connected Networks and Product Networks under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 2004, 1582-1590.
- [3] G.Y. CHANG, G.H. CHEN, G.J. CHANG, *(t, k)-Diagnosis for Matching Composition Networks*, IEEE Trans. Comput., 55, 1, 2006, 88-92.

- [4] G.Y. CHANG, G.H. CHEN, G.J. CHANG, *(t, k)*-Diagnosis for Matching Composition Networks under the MM* Model, IEEE Trans. Comput., 56, 1, 2007, 73-79.
- [5] S.H. HSIEH, Y.S. CHEN, *Strongly Diagnosable Product Networks Under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 57, 6, 2008, 721-732.
- [6] R. KULESZA, *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, 222.
- [7] R. KULESZA, *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 20, 2004, 3-21.
- [8] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Metoda generowania struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji typu 4-wymiarowego sześcianu*, Biul. WAT, 60, 4, 2011, 345-358.
- [9] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Wnikliwość diagnozowania sieci procesorów metodą porównawczą*, Systemy czasu rzeczywistego. Postępy badań i zastosowania, Warszawa, WKŁ, 2009, 199-210.
- [10] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Diagnosis resolution of processors' network using the comparison method*, Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), 9, 2010, 157-162.
- [11] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *The life period of the hypercube processors' network diagnosed with the use of the comparison method*, Monographs on System Dependability, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2010.
- [12] P.L. LAI, J.J.M. TAN, C.H. TSAI, L.H. HSU, *The Diagnosability of the Matching Composition Network under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 8, 2004.
- [13] P.L. LAI, J.J.M. TAN, C.P. CHANG, L.H. HSU, *Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems*, IEEE Trans. Comput., 54, 2, Feb. 2005, 165-175.
- [14] A. SENGUPTA, A.T. DAHBURA, *On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach*, IEEE Trans. Comput., 41, 11, Nov. 1992, 1386-1396.
- [15] A.K. SOMANI, O. PELEG, *On Diagnosability of Large Fault Sets in Regular Topology-Based Computer Systems*, IEEE Trans. Comput., 45, 8, 1996, 892-903.
- [16] D. WANG, *Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 48, 12, 1999, 1369-1374.
- [17] X. YANG, Y.Y. TANG, *Efficient Fault Identification of Diagnosable Systems under the Comparison Model*, IEEE Trans. Comput., 56, 12, 2007, 1612-1618.
- [18] Z. ZIELIŃSKI, Ł. STRZELECKI, R. KULESZA, *Diagnosability characterization of the 4-dimensional cube type soft degradable processors' network*, Monographs on System Dependability — Problems of Dependability and Modelling, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2011, 283-296.
- [19] Z. ZIELIŃSKI, R. KULESZA, *Okres życia sieci procesorów o strukturze logicznej typu sześcian 4-wymiarowy diagnozowanej metodą porównawczą*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 30, 2011, 17-32.

R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI

Determination of logical structures of 4-dimensional hypercube processors' network with soft degradation

Abstract. In the work, the formal model of the logical structure of a 4-dimensional hypercube processor network and the method of a composition structure were developed based on the method proposed

in [8]. The method for determining geometrical form of logical network cyclic and acyclic working structures with the use of operations on the proposed condensed structure form was presented. Counting series for labelled and unlabelled working structures were determined.

Keywords: informatics, system level diagnosis, network logical structure, hypercube network, fault-tolerant systems