



Problemy redukcji drgań konstrukcji budowlanych z wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań

ROMAN LEWANDOWSKI

Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska,
Instytut Konstrukcji Budowlanych, 60-965 Poznań, ul. Piotrowo 5,
roman.lewandowski@put.poznan.pl

Streszczenie. Praca ma charakter przeglądowy i dotyczy przeglądu problematyki związanej z modelowaniem i analizą lepkosprężystych tłumików drgań oraz problemów analizy dynamicznej konstrukcji z zainstalowanymi wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań. W pracy dokonano przeglądu literatury oraz krótko opisano przykładowe rozwiązania poruszanych problemów. Do najważniejszych problemów dynamiki konstrukcji z wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań zaliczono problemy modelowania tłumików, identyfikacji parametrów modeli tłumików, opisu konstrukcji z tłumikami, wyznaczania charakterystyk dynamicznych konstrukcji z tłumikami drgań oraz optymalizacji położenia tłumików na konstrukcji.

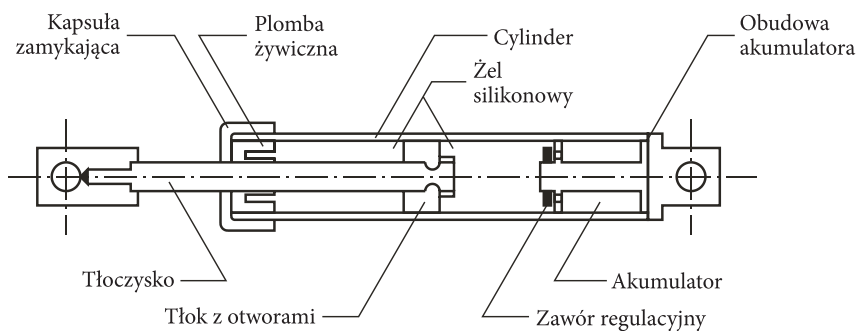
Słowa kluczowe: dynamika konstrukcji, wiskotyczne i lepkosprężyste tłumiki drgań, modele tłumików, identyfikacja parametrów, charakterystyki dynamiczne, optymalizacja położenia tłumików

1. Wprowadzenie

Postęp techniczny sprawia, że nowoczesne konstrukcje są lżejsze, bardziej ekonomicznie zaprojektowane i wykonane z materiałów o lepszych właściwościach. Równocześnie konstrukcje te stają się bardziej podatne na działanie obciążeń dynamicznych. W wielu przypadkach konieczne jest zmniejszanie amplitud drgań konstrukcji. Dotyczy to szczególnie budynków wysokich narażonych na działanie huraganowych wiatrów i/lub zbudowanych na terenach sejsmicznych. W tym celu wyposaża się konstrukcje w układy redukcji drgań. W ogólności rozróżnia się aktywne, półaktywne, pasywne i hybrydowe układy redukcji drgań. Obszerne omówienie najistotniejszych cech omawianych układów można znaleźć w pracach [1-5].

Pasywne układy redukcji drgań definiuje się jako układy, urządzenia lub tłumiki, których działanie nie wymaga zasilania z zewnętrznego źródła energii, a rozpraszanie energii w układzie redukcji drgań jest wywoływane ruchem konstrukcji. Pasywne układy redukcji drgań umożliwiają bezpieczne przenoszenie obciążeń dynamicznych i poprawiają komfort użytkowania budynku. Najbardziej popularnymi typami pasywnych tłumików drgań są strojone tłumiki masowe, tłumiki wiskotyczne, tłumiki lepkosprężyste, tłumiki cieczowe, tłumiki metalowe oraz tłumiki tarciove. Obszerny przegląd i omówienie pasywnych układów redukcji drgań można znaleźć w pracy [6].

Praca dotyczy tłumików wiskotycznych i lepkosprężystych. Tłumiki lepkosprężyste dzieli się na dwie grupy w zależności od użytego medium lepkosprężystego. Rozróżnia się tłumiki cieczowe, w których ciecz (np. olej silikonowy) ma właściwości lepkosprężyste, i tłumiki z warstwą z materiału lepkosprężystego wykonanego np. z kopolimerów. Schemat tłumika cieczowego pokazano na rysunku 1.1.

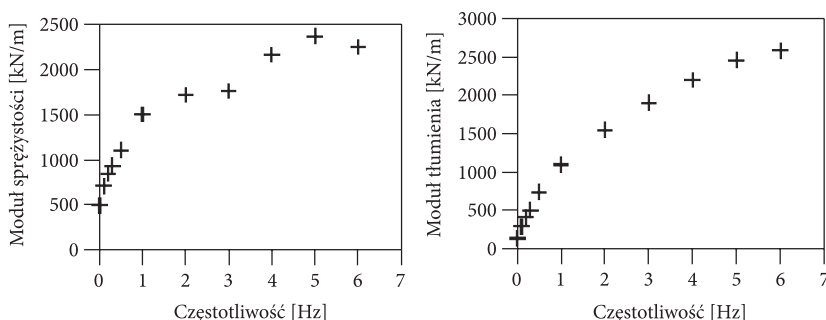


Rys. 1.1. Schemat lepkosprężystego tłumika cieczowego

Niniejsza praca ma charakter przeglądowy i dotyczy przeglądu problematyki związanej z modelowaniem i analizą lepkosprężystych tłumików drgań oraz problemów analizy dynamicznej konstrukcji z zainstalowanymi wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań. W pracy zamieszczono przegląd literatury oraz krótko opisano przykładowe rozwiązania poruszanych problemów. Do najważniejszych problemów dynamiki konstrukcji z wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań zalicza się problemy modelowania tłumików, identyfikacji parametrów modeli tłumików, opisu konstrukcji z tłumikami, wyznaczania charakterystyk dynamicznych konstrukcji z tłumikami drgań oraz optymalizacji położenia tłumików na konstrukcji.

2. Modele lepkosprężystych tłumików drgań

Właściwości mechaniczne materiałów i tłumików lepkosprężystych zależą od temperatury T , częstości wymuszenia λ oraz, w pewnych okolicznościach, od odkształceń. Właściwości te opisuje się za pomocą modułów sprężystości (*the storage modulus*) $E'(\lambda, T)$ i modułów tłumienia (*the loss modulus*) $E''(\lambda, T)$. Zależności te ilustrują przykładowe wykresy pokazane na rysunku 2.1 [7].



Rys. 2.1. Zależność modułu sprężystości i modułu tłumienia od częstości wymuszenia

Wpływ temperatury uwzględnia się w sposób przybliżony, stosując zasadę superpozycji temperaturowo-częstotliwościowej, która ustanawia zależność między efektami zmiany temperatury i zmiany częstości wymuszenia na właściwości materiałów lepkosprężystych [8]. Zasada ta stwierdza, że właściwości lepkosprężyste określone w różnych temperaturach można odnosić do siebie przez zmianę (przesunięcie) aktualnej wartości częstości wymuszenia. Omawianą zasadę można symbolicznie zapisać w postaci [8]:

$$\begin{aligned} E'(\lambda, T) &= E'(\lambda_r, T_r) = E'(\alpha_T(T)\lambda, T_r), \\ E''(\lambda, T) &= E''(\lambda_r, T_r) = E''(\alpha_T(T)\lambda, T_r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie T_r jest temperaturą porównawczą podaną w stopniach Kelvina, $\lambda_r = \alpha_T(T)\lambda$ zredukowaną częstością wymuszenia; funkcja przesunięcia $\alpha_T(T)$ jest często opisywana równaniem Williamsa-Landela-Ferry'ego o postaci:

$$\alpha_T(T) = \exp \left[-\frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + T - T_r} \right], \quad (2.2)$$

a symbole C_1 , C_2 oznaczają stałe charakteryzujące materiał lepkosprężysty.

Badania tłumika wypełnionego cieczą silikonową opisane w pracach [9-11] wskazują, że temperatura ma istotny wpływ na możliwości rozpraszania energii przez omawiany tłumik. Opisane w pracy [12] wyniki analiz numerycznych

i eksperymentalnych potwierdzają znaczący wpływ częstości i amplitud siły wymuszającej na temperaturę materiału lepkosprężystego, a w konsekwencji na właściwości tego materiału.

Zachowanie tłumików wiskotycznych opisuje się równaniem o postaci:

$$u(t) = c_r \text{sign}(\dot{x}(t)) \dot{x}^n(t), \quad (2.3)$$

gdzie symbol $u(t)$ oznacza siłę panującą w tłumiku, $\dot{x}(t)$ jest względną prędkością tłoka tłumika względem obudowy, a c_r współczynnikiem tłumienia. Wartości współczynnika n zmieniają się w przedziale $0,3 \leq n \leq 1$. Często $n = 1$.

Do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych stosuje się modele reologiczne różnego rodzaju. Najczęściej są to proste modele Kelvina lub Maxwella [13-17]; ostatnio również uogólnione modele Kelvina lub Maxwella [18-22] oraz modele opisywane za pomocą pochodnych ułamkowych [23-27]. Te ostatnie będą w dalszym ciągu nazywane modelami ułamkowymi. Proste modele Kelvina i Maxwella nie opisują poprawnie zależności właściwości tłumików od częstości wymuszenia. W pracy [28] opisano pewien model lepkosprężystego tłumika drgań, który można rozumieć jako równoległe połączone proste modele Kelvina i Maxwella.

Poniżej pokrótce omawia się opis matematyczny tłumika, którego zachowanie opisuje się za pomocą uogólnionego modelu Kelvina, przedstawionego na rysunku 2.2.

Klasyczne równanie ruchu tego modelu używane w reologii ma następującą postać:

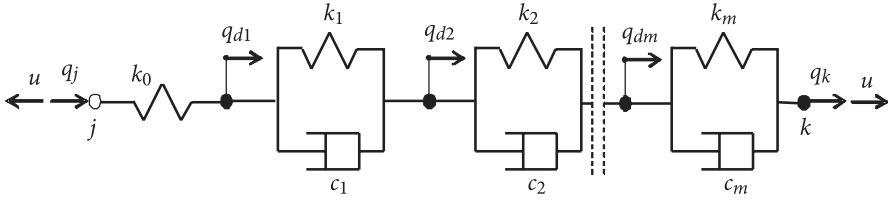
$$u(t) + \sum_{r=1}^m D_r \frac{d^r u(t)}{dt^r} = G_0 x(t) + \sum_{r=1}^m G_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}, \quad (2.4)$$

gdzie $x(t) = q_k(t) - q_j(t)$ (porównaj rys. 2.2), a symbole D_r i G_r oznaczają dodatnie współczynniki, które można wyrazić za pomocą stałych modelu (patrz rys. 2.2). Postać ta nie jest dogodna w zastosowaniu do zagadnień dynamiki konstrukcji.

Inne sformułowanie równań ruchu korzysta z koncepcji tzw. zmiennych wewnętrznych, którymi w omawianym przypadku są przemieszczenia punktów węzłowych, gdzie łączą się elementy modelu Kelvina (patrz rys. 2.2). Równania ruchu rozpatrywanego modelu można teraz zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} u(t) &= k_0 (q_{d1} - q_j), \\ u(t) &= k_r (q_{dr+1} - q_{dr}) + c_r (\dot{q}_{dr+1} - \dot{q}_{dr}), \quad r = 1, 2, \dots, m-1, \\ u(t) &= k_m (q_k - q_{dm}) + c_m (\dot{q}_k - \dot{q}_{dm}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie symbole q_j i q_k oznaczają przemieszczenia skrajnych punktów węzłowych modelu, q_{dr} jest zmienną wewnętrzną, k_r i c_r są parametrami (współczynnikiem sztywności i współczynnikiem tłumienia) r -tego elementu modelu ($r = 1, 2, \dots, m-1$).



Rys. 2.2. Schemat uogólnionego modelu Kelvina

Moduły sprężystości $K'(\lambda)$ i tłumienia $K''(\lambda)$ wyznacza się, rozpatrując ustalone, harmonicznymie zmienne drgania modelu. Wtedy

$$\begin{aligned} q_{d1}(t) - q_j(t) = x_1(t) = X_0(\lambda) e^{i\lambda t}, \quad q_k(t) - q_{dm}(t) = x_m(t) = X_m(\lambda) e^{i\lambda t}, \\ q_k(t) - q_j(t) = x(t) = X(\lambda) e^{i\lambda t}, \quad q_{dr+1}(t) - q_{dr}(t) = x_r(t) = X_r(\lambda) e^{i\lambda t}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

a po postawieniu (2.6) do (2.5) otrzymuje się zależności:

$$X(\lambda) = (L'(\lambda) - iL''(\lambda)) U(\lambda), \quad U(\lambda) = (K'(\lambda) + iK''(\lambda)) X(\lambda), \quad (2.7)$$

gdzie

$$L'(\lambda) = \frac{1}{k_0} + \sum_{r=1}^m \frac{1}{k_r(1 + \tau_r^2 \lambda^2)}, \quad L''(\lambda) = \sum_{r=1}^m \frac{\tau_r \lambda}{k_r(1 + \tau_r^2 \lambda^2)}, \quad (2.8)$$

$$K'(\lambda) = \frac{L'(\lambda)}{L'^2(\lambda) + L''^2(\lambda)}, \quad K''(\lambda) = \frac{L''(\lambda)}{L'^2(\lambda) + L''^2(\lambda)}. \quad (2.9)$$

Uogólniony model Kelvina spełnia wymagania drugiego prawa termodynamiki, o ile stałe modelu będą liczbami dodatnimi.

Energię rozpraszaną w trakcie drgań harmonicznymie zmiennych modelu można wyznaczyć ze wzoru:

$$E_d = \int_0^T u(t) dx(t) = \int_0^T u(t) \dot{x}(t) dt = \pi \lambda \sum_{r=1}^m c_r (q_{dr+1}^0 - q_{dr}^0)^2, \quad (2.10)$$

gdzie symbol q_{dr}^0 oznacza amplitudę drgań zmiennej wewnętrznej o numerze r , a ponadto $q_{dm+1}^0 = q_k^0$.

Rozpatrywany model tłumika można także traktować jako superelement skończony. Równanie superelementu, zapisane w lokalnym układzie współrzędnych, ma postać:

$$\tilde{\mathbf{R}}_e(t) = \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{q}}_e(t) + \tilde{\mathbf{C}}_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t), \quad (2.11)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{K}}_e$ i $\tilde{\mathbf{C}}_e$ to łatwe do wyznaczenia macierze sztywności i tłumienia, a ponadto

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_e(t) &= \text{col}(\tilde{\mathbf{R}}_z(t), \mathbf{0}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_z(t) = \text{col}(\tilde{R}_1(t), \tilde{R}_2(t), \tilde{R}_3(t), \tilde{R}_4(t)), \\ \tilde{\mathbf{q}}_e(t) &= \text{col}(\tilde{\mathbf{q}}_z(t), \tilde{\mathbf{q}}_d(t)), \quad \tilde{\mathbf{q}}_z(t) = \text{col}(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(t), \tilde{q}_4(t)), \\ \tilde{\mathbf{q}}_d(t) &= \text{col}(\tilde{q}_{d,1}(t), \dots, \tilde{q}_{d,m}(t)).\end{aligned}$$

Ostatnio do opisu zachowania tłumików lepkosprężystych używa się modeli reologicznych opisywanych za pomocą pochodnych niecałkowitego rzędu nazywanych także pochodnymi ułamkowymi [29, 30]. W modelach ułamkowych tłumik jest zastępowany tzw. elementem sprężysto-tłumiącym nazywanym także elementem Scotta-Blairsa [31]. Prawo konstytutywne elementu sprężysto-tłumiącego ma postać:

$$u(t) = c D_t^\alpha q(t), \quad (2.12)$$

gdzie c i α są parametrami elementu przy czym $0 < \alpha \leq 1$, a symbol $D_t^\alpha(\bullet)$ oznacza pochodną niecałkowitego rzędu α ze względu na czas t . Istnieje kilka definicji pochodnych niecałkowitego rzędu. Tutaj symbol $D_t^\alpha q(t)$ oznacza pochodną niecałkowitego rzędu Riemanna-Liouville'a zdefiniowaną w następujący sposób [30]:

$$D_t^\alpha q(t) \equiv \frac{d^\alpha q(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{q(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (2.13)$$

gdzie symbolem Γ oznaczono funkcję specjalną gamma.

Jeżeli $\alpha \rightarrow 0$, to zachowanie elementu sprężysto-tłumiącego jest zbliżone do zachowania elementu sprężystego, a jeżeli $\alpha \rightarrow 1$, to omawiany element zachowuje się jak tłumik wiskotyczny.

Opis ułamkowych modeli reologicznych tłumików lepkosprężystych krótko omawia się na przykładzie ułamkowego modelu Maxwella pokazanego na rysunku 2.3. Zachowanie tego modelu opisują dwa równania o postaci:

$$u(t) = k q_d(t), \quad u(t) = c D_t^\alpha (x(t) - q_d(t)) \quad (2.14)$$

lub jedno równanie:

$$u(t) + \tau^\alpha D_t^\alpha u(t) = k \tau^\alpha D_t^\alpha x(t), \quad (2.15)$$

gdzie k, c, α to parametry modelu. Ponadto $q_d(t) = \tilde{q}_d(t) - \tilde{q}_1(t)$, $x(t) = \tilde{q}_3(t) - \tilde{q}_1(t)$, a $\tau^\alpha = c/k$.

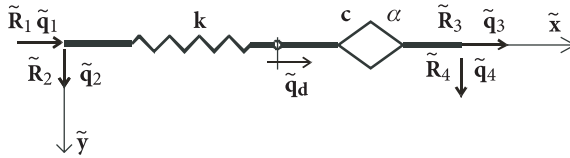
W konwencji metody elementów skończonych równanie omawianego modelu można zapisać w postaci:

$$\tilde{\mathbf{R}}_e(t) = \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{q}}_e(t) + \tilde{\mathbf{C}}_e D_t^\alpha \tilde{\mathbf{q}}_e(t), \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_e(t) &= \text{col}(\tilde{\mathbf{q}}_z(t), \tilde{\mathbf{q}}_d(t)), & \tilde{\mathbf{q}}_z(t) &= \text{col}(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(t), \tilde{q}_4(t)), \\ \tilde{\mathbf{q}}_d(t) &= \text{col}(\tilde{q}_d(t)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & c \end{bmatrix},$$



Rys. 2.3. Schemat ułamkowego modelu Maxwella

Moduł sztywności dynamicznej i moduł tłumienia wyznacza się, zakładając rozwiązanie równania (2.15) w postaci:

$$x(t) = X(\lambda)e^{i\lambda t}, \quad u(t) = U(\lambda)e^{i\lambda t}. \quad (2.18)$$

Jeżeli dolna granica pochodnej niecałkowitego rzędu funkcji wykładniczej jest równa $-\infty$, to [30]

$$D_t^\alpha e^{i\lambda t} = (i\lambda)^\alpha e^{i\lambda t}. \quad (2.19)$$

Po podstawieniu (2.18) i (2.19) do (2.15) otrzymuje się zależności:

$$\begin{aligned} U &= k \frac{(i\tau \lambda)^\alpha}{1 + (i\tau \lambda)^\alpha} X = (K'(\lambda) + iK''(\lambda))X, \\ K'(\lambda) &= k(\tau \lambda)^\alpha \frac{(\tau \lambda)^\alpha + \cos(\alpha \pi / 2)}{1 + (\tau \lambda)^{2\alpha} + 2(\tau \lambda)^\alpha \cos(\alpha \pi / 2)}, \\ K''(\lambda) &= k(\tau \lambda)^\alpha \frac{\sin(\alpha \pi / 2)}{1 + (\tau \lambda)^{2\alpha} + 2(\tau \lambda)^\alpha \cos(\alpha \pi / 2)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

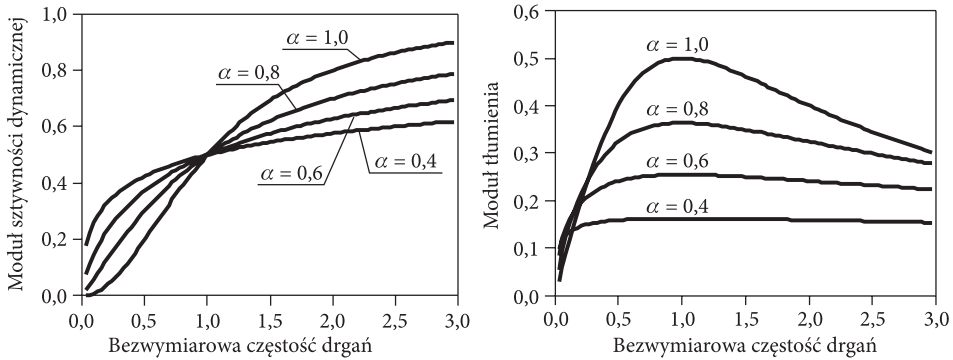
Energię rozpraszaną w jednym cyklu drgań można wyznaczyć z wzoru:

$$E_d(\lambda) = \pi c \lambda^\alpha x_0^2 \frac{\sin(\alpha\pi / 2)}{1 + 2\tau^\alpha \lambda^\alpha \cos(\alpha\pi / 2) + \tau^{2\alpha} \lambda^{2\alpha}}. \quad (2.21)$$

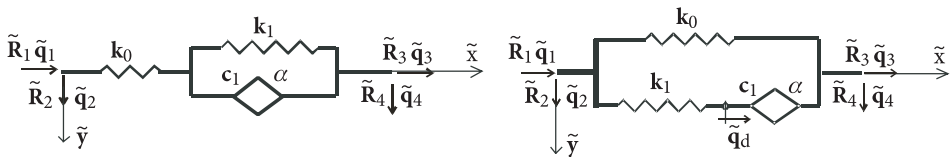
Model ułamkowy tłumika spełnia wymagania drugiego prawa termodynamiki, o ile stałe modelu będą liczbami dodatnimi i $0 < \alpha \leq 1$ [32].

Na rysunku 2.4 porównano charakterystyki klasycznego i ułamkowego modelu Maxwella, gdzie $\tau \lambda$ jest bezwymiarową częstością drgań, a wartości obu modułów należy pomnożyć przez k .

Możliwe jest zastosowanie modeli ułamkowych o większej liczbie parametrów; np. modeli czteroparametrowych pokazanych schematycznie na rysunku 2.5.



Rys. 2.4. Porównanie charakterystyk klasycznego i ułamkowego modelu Maxwella



Rys. 2.5. Schematy ułamkowych modeli czteroparametrowych

W opisie płyt i belek wykonanych częściowo lub całkowicie z materiału o właściwościach lepkosprężystych często korzysta się z modelu sztywności zespolonej [33]. Model ten nie jest stosowany do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych.

3. Identyfikacja parametrów lepkosprężystych tłumików drgań

Model tłumika powinien dobrze opisywać zmiany właściwości tłumika w zależności od częstości wymuszenia. Parametry modeli tłumików lepkosprężystych ustala się na podstawie wyników badań dynamicznych tłumika. Badania należy przeprowadzić w znanej, najlepiej stałej, temperaturze. Zazwyczaj tłumik poddawany jest działaniu obciążeń harmonicznie zmiennych [7, 34]. Mierzy się stan ustalony drgań (przesunięcie końców tłumika i siłę panującą w tłumiku).

Problem identyfikacji parametrów modelu tłumika formułuje się jako zadanie poszukiwania minimum funkcji celu, zazwyczaj o postaci [18]:

$$J(\lambda) = \sum_{i=1}^m [(K'_{eks}(\lambda_i) - K'(\lambda_i))^2 + (K''_{eks}(\lambda_i) - K''(\lambda_i))^2], \quad (3.1)$$

gdzie K'_{eks} i K''_{eks} to odpowiednio moduł sztywności dynamicznej i moduł tłumienia wyznaczone na podstawie danych doświadczalnych.

Istotnymi ograniczeniami problemu optymalizacji są wymagania dodatknych wartości parametrów modelu reologicznego. Problem identyfikacji może być źle uwarunkowany ze względu na istnienie błędów pomiarowych.

Poniżej pokrótce omówiono za pracą [26] procedurę identyfikacji parametrów czteroparametrowych, ułamkowych modeli reologicznych pokazanych na rysunku 2.5. Procedura składa się z dwóch części. W pierwszej części zmierzone funkcje przemieszczeń dynamicznych $q_e(t)$ i siły w tłumiku $u_e(t)$ aproksymuje się funkcjami harmonicznie zmiennymi tzn.

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}_c \cos \lambda t + \tilde{q}_s \sin \lambda t, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_c \cos \lambda t + \tilde{u}_s \sin \lambda t. \quad (3.2)$$

Parametry $\tilde{q}_c, \tilde{q}_s, \tilde{u}_c$ oraz \tilde{u}_s wyznacza się za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Przykładowo, parametry \tilde{q}_c oraz \tilde{q}_s wyznacza się, minimalizując funkcjonal o postaci:

$$J_1(\tilde{q}_c, \tilde{q}_s) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [q_e(t) - \tilde{q}(t)]^2 dt, \quad (3.3)$$

gdzie symbolem $q_e(t)$ oznaczono zmierzoną funkcję przemieszczeń tłumika, a \tilde{q}_c i \tilde{q}_s wyznacza się, rozwiązując układ równań o postaci:

$$I_{cc}\tilde{q}_c + I_{sc}\tilde{q}_s = I_{cq}, \quad I_{sc}\tilde{q}_c + I_{ss}\tilde{q}_s = I_{sq}, \quad (3.4)$$

gdzie

$$I_{cc} = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 \lambda t dt, \quad I_{ss} = \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \lambda t dt, \quad I_{cs} = I_{sc} = \int_{t_1}^{t_2} \sin \lambda t \cos \lambda t dt, \quad (3.5)$$

$$I_{cq} = \int_{t_1}^{t_2} q_e(t) \cos \lambda t dt, \quad I_{sq} = \int_{t_1}^{t_2} q_e(t) \sin \lambda t dt.$$

W podobny sposób wyznacza się parametry \tilde{u}_c i \tilde{u}_s . W pierwszym etapie identyfikacji następuje „wygładzanie” wyników eksperymentalnych i usunięcie części błędów pomiarowych. Powyższe obliczenia przeprowadza się dla wszystkich częstości wymuszenia, dla których wykonano badania eksperymentalne.

Równanie ruchu ułamkowego modeli czteroparametrowych pokazanych na rysunku 2.5 można zapisać w postaci:

$$u(t) + \tau^\alpha D_t^\alpha u(t) = k_0 q(t) + k_\infty \tau^\alpha D_t^\alpha q(t), \quad (3.6)$$

gdzie k_0 , k_∞ , τ i α to parametry modelu.

Drgania ustalone tłumika opisują funkcje

$$u(t) = u_c \cos \lambda t + u_s \sin \lambda t, \quad q(t) = q_c \cos \lambda t + q_s \sin \lambda t, \quad (3.7)$$

gdzie

$$u_c = z_1(\lambda) q_c + z_2(\lambda) q_s, \quad u_s = -z_2(\lambda) q_c + z_1(\lambda) q_s, \quad (3.8)$$

$$z_1(\lambda) = \frac{k_0 + (k_0 + k_\infty)(\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + k_\infty(\tau\lambda)^{2\alpha}}{1 + 2(\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\lambda)^{2\alpha}}, \quad (3.9)$$

$$z_2(\lambda) = \frac{(k_\infty - k_0)(\tau\lambda)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + 2(\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\lambda)^{2\alpha}}. \quad (3.10)$$

Rezultatem pierwszego etapu identyfikacji są funkcje $\tilde{u}_i(t, \lambda_i) = \tilde{u}(t)$ i $\tilde{q}_i(t, \lambda_i) = \tilde{q}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) uzyskane dla różnych częstości wymuszenia λ_i . Parametry funkcji $\tilde{u}_i(t, \lambda_i)$ i $\tilde{q}_i(t, \lambda_i)$ oznacza się symbolami \tilde{u}_{ci} , \tilde{u}_{si} , \tilde{q}_{ci} i \tilde{q}_{si} .

W drugim etapie identyfikacja zakłada, że rozpatrywany model teoretyczny tłumika dobrze opisuje zachowanie tłumika, tzn. $\tilde{q}_{ci} \approx q_{ci}$, $\tilde{q}_{si} \approx q_{si}$, $\tilde{u}_{ci} \approx u_{ci}$, $\tilde{u}_{si} \approx u_{si}$. Wobec tego dla $i = 1, 2, \dots, n$ w przybliżeniu spełnione są równania (3.11)

$$\tilde{u}_{ci} = \tilde{z}_{1i} \tilde{q}_{ci} + \tilde{z}_{2i} \tilde{q}_{si}, \quad \tilde{u}_{si} = -\tilde{z}_{2i} \tilde{q}_{ci} + \tilde{z}_{1i} \tilde{q}_{si}, \quad (3.11)$$

z których wynika, że

$$\tilde{z}_{1i} = \frac{\tilde{u}_{ci} \tilde{q}_{si} + \tilde{u}_{si} \tilde{q}_{ci}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}, \quad \tilde{z}_{2i} = \frac{\tilde{u}_{ci} \tilde{q}_{si} - \tilde{u}_{si} \tilde{q}_{ci}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}. \quad (3.12)$$

Jeżeli model poprawnie opisuje zachowanie tłumika, to dla $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzą następujące równości

$$z_{1i} - \tilde{z}_{1i} = 0, \quad z_{2i} - \tilde{z}_{2i} = 0. \quad (3.13)$$

Zależności (3.13) nie są jednak dokładnie spełnione i wobec tego parametry modelu wyznacza się, rozwiązując następujące zadanie optymalizacji:

znaleźć takie wartości parametrów modelu tłumika (k_0 , k_∞ , τ i α), które minimalizują funkcjonal

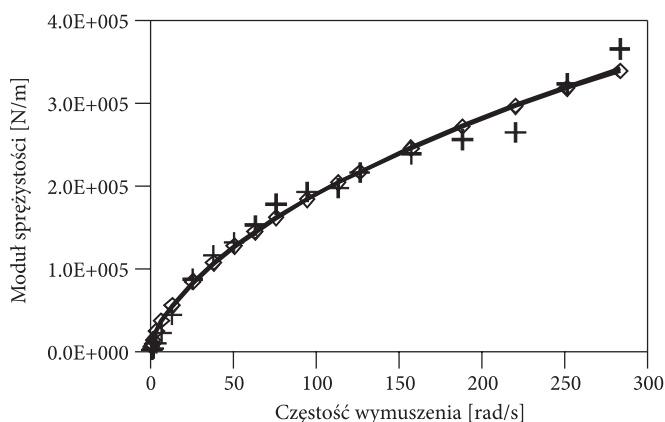
$$J = \sum_{i=1}^n [(z_{1i} - \tilde{z}_{1i})^2 + (z_{2i} - \tilde{z}_{2i})^2] \quad (3.14)$$

oraz spełniają ograniczenia:

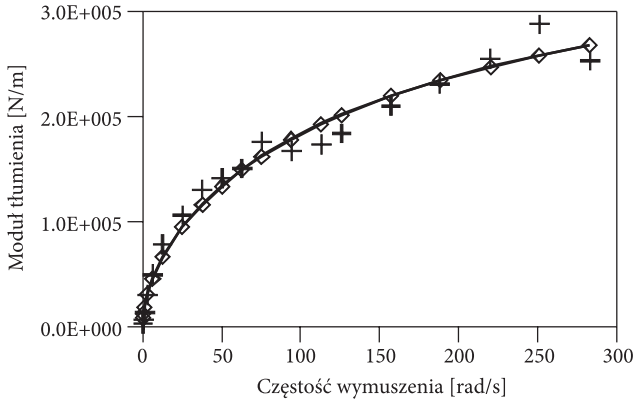
$$0 < \alpha \leq 1, \quad \tau > 0, \quad k_\infty > k_0 > 0. \quad (3.15)$$

Omawiane zadanie optymalizacji rozwiązuje się za pomocą metody roju cząstek (*the particle swarm optimization method*) opisanej np. w [35]. W analogiczny sposób można identyfikować parametry trójparametrowych, ułamkowych modeli Maxwella i Kelvina.

Wyniki identyfikacji parametrów tłumika cieczowego omawianego w pracy [36] pokazano na rysunkach 3.1 i 3.2. Widać, że omawiana metoda identyfikacji parametrów jest skuteczna, a model czteroparametrowy dobrze aproksymuje dynamiczne zachowanie omawianego tłumika drgań.



Rys. 3.1. Porównanie modułu sprężystości otrzymanego doświadczalnie (małe krzyżyki) z modułem sprężystości otrzymanym za pomocą trójparametrowego modelu Maxwella (linia ciągła z rombami) oraz modułem sprężystości otrzymanym za pomocą czteroparametrowego modelu Maxwella (linia ciągła)



Rys. 3.2. Porównanie modułu tłumienia otrzymanego doświadczalnie (małe krzyżyki) z modelem tłumienia sprężystości otrzymanym za pomocą trójparametrowego modelu Maxwella (linia ciągła z rombami) oraz modelem tłumienia otrzymanym za pomocą czteroparametrowego modelu Maxwella (linia ciągła)

4. Modele obliczeniowe konstrukcji z tłumikami drgań

4.1. Konstrukcje z tłumikami wiskotycznymi

Równanie ruchu konstrukcji bez tłumików drgań traktowanej jako układ dyskretny o n stopniach swobody ma postać:

$$\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{K}_k \mathbf{q}_k(t) = \mathbf{p}_k(t), \quad (4.1)$$

gdzie symbolami \mathbf{M}_k , \mathbf{C}_k i \mathbf{K}_k oznaczono odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia i sztywności konstrukcji, $\mathbf{q}_k(t)$ jest wektorem parametrów węzłowych, a $\mathbf{p}_k(t)$ wektorem sił wymuszających.

Równania ruchu konstrukcji z wbudowanymi tłumikami wiskotycznymi można przedstawić w postaci [22, 37]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (4.2)$$

gdzie $\mathbf{M} = \mathbf{M}_k$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_k$, $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_k(t)$, a $\mathbf{q}(t)$ jest wektorem parametrów węzłowych.

Powyższe równanie ruchu wygodnie jest zapisać za pomocą zmiennych stanu. Wektor zmiennych stanu to $\mathbf{z}(t) = \text{col}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, a równanie ruchu ma postać:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{p}}(t), \quad (4.3)$$

gdzie $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$.

4.2. Konstrukcje z tłumikami lepkosprężystymi

Równania ruchu konstrukcji z tłumikami lepkosprężystymi modelowanymi za pomocą klasycznych modeli reologicznych mają postać [22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{kk}\ddot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{C}_{kk}\dot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{C}_{kt}\dot{\mathbf{q}}_t(t) + \mathbf{K}_{kk}\mathbf{q}_k(t) + \mathbf{K}_{kt}\mathbf{q}_t(t) &= \mathbf{p}_k(t), \\ \mathbf{C}_{tk}\dot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{C}_{tt}\dot{\mathbf{q}}_t(t) + \mathbf{K}_{tk}\mathbf{q}_k(t) + \mathbf{K}_{tt}\mathbf{q}_t(t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie $\mathbf{q}_t(t)$ jest r -wymiarowym wektorem zawierający zmienne wewnętrzne tłumików, a symbolami \mathbf{M}_{kk} , \mathbf{C}_{kk} , $\mathbf{C}_{kt} = \mathbf{C}_{tk}^T$, \mathbf{C}_{tt} , \mathbf{K}_{kk} , $\mathbf{K}_{kt} = \mathbf{K}_{tk}^T$, \mathbf{K}_{tt} oznaczono odpowiednio bloki macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności.

Przy użyciu wektora zmiennych stanu $\mathbf{z}(t) = \text{col}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t), \mathbf{q}_t(t))$ można ruch omawianego układu opisać za pomocą następującego równania:

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{p}}(t), \quad (4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{kk} & \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{C}_{kt} \\ \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{tk} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{tt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{kk} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{kt} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{tk} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{tt} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Jeżeli modelami lepkosprężystych tłumików drgań są ułamkowe modele reologiczne (trzy lub czteroparametrowe), to równania ruchu konstrukcji z omawianymi tłumikami drgań można zapisać w postaci równań (4.7) (porównaj także [27]):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{kk}D_t^2\mathbf{q}_k + \mathbf{C}_{kk}D_t^1\mathbf{q}_k + \mathbf{C}_{kk}^tD_t^\alpha\mathbf{q}_k + (\mathbf{K}_{kk} + \mathbf{K}_{kk}^t)\mathbf{q}_k + \mathbf{C}_{kt}^tD_t^\alpha\mathbf{q}_t - \mathbf{K}_{kt}^t\mathbf{q}_k &= \mathbf{p}_k(t), \\ \mathbf{C}_{tk}^tD_t^\alpha\mathbf{q}_k + \mathbf{C}_{tt}^tD_t^\alpha\mathbf{q}_t - \mathbf{K}_{tk}^t\mathbf{q}_k + \mathbf{K}_{tt}^t\mathbf{q}_t &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie symbol $D_t^\alpha \mathbf{x}(t)$ oznacza pochodną ułamkową rzędu α względem czasu t funkcji $\mathbf{x}(t)$. W celu ujednoczenia zapisu oznaczono: $D_t^1 \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$, $D_t^2 \mathbf{x}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$. Równanie (4.7) obowiązuje, gdy wartości parametrów α są jednakowe dla wszystkich tłumików.

Ruch omawianego układu zapisany za pomocą wektora zmiennych stanu $\mathbf{z}(t) = \text{col}(\mathbf{q}_t(t), \mathbf{q}_k(t), D_t^1\mathbf{q}_k(t))$ ma następującą postać [27]:

$$\mathbf{A} D_t^1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{A}_1 D_t^\alpha \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (4.8)$$

gdzie $D_t^\alpha \mathbf{z}(t) = \text{col}(D_t^\alpha \mathbf{q}_t(t), D_t^\alpha \mathbf{q}_k(t), D_t^{\alpha+1} \mathbf{q}_k(t))$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{kk} & \mathbf{M}_{kk} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{kk}^t & \mathbf{C}_{tk}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{kt}^t & \mathbf{C}_{kk}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt}^t & -\mathbf{K}_{tk}^t & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{kt}^t & \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{kk}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix}.$$

5. Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych konstrukcji z wiskotycznymi lub lepkosprężystymi tłumikami drgań

Pod pojęciem charakterystyki dynamicznej rozumie się tutaj częstości drgań swobodnych, bezwymiarowe współczynniki tłumienia oraz postacie drgań. Niekiedy do charakterystyk dynamicznych zalicza się także funkcje przenoszenia. W przypadku konstrukcji z tłumikami wiskotycznymi lub tłumikami lepkosprężystymi modelowanymi przy użyciu klasycznych modeli reologicznych należy rozwiązać problem drgań swobodnych. Ruch omawianych układów jest opisany równaniem (5.1)

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t). \quad (5.1)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $\mathbf{z}(t) = \exp(st)\mathbf{c}$, a wektor \mathbf{c} i parametr s wyznacza się, rozwiązując liniowy, uogólniony problem własny

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{B}) \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Jeżeli układ jest podkrytycznie tłumiony, to wartości własne s i wektory własne \mathbf{c} są liczbami/wektorami zespolonymi, parami sprzężonymi. Niektóre wartości i wektory własne są liczbami rzeczywistymi, jeżeli istnieją postacie drgań układu, które są nadkrytycznie tłumione. Ponadto rzeczywiste wartości i wektory własne istnieją, jeżeli opis tłumików wymaga wprowadzenia zmiennych wewnętrznych.

Częstość drgań ω i bezwymiarowy współczynnik tłumienia modalnego γ wyznacza się na podstawie pary zespolonych i sprzężonych wartości własnych $s_1 = \mu + i\eta$, $s_2 = \mu - i\eta$ z zależności:

$$\omega^2 = \mu^2 + \eta^2, \quad \gamma = -\mu / \omega. \quad (5.3)$$

Zadanie można także sformułować w sposób prowadzący do kwadratowego problemu własnego. W tym celu w równaniach (4.4) podstawia się $\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{0}$ i przyjmuje się rozwiązanie równań (4.4) w postaci:

$$\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{a}_k \exp(st), \quad \mathbf{q}_t(t) = \mathbf{a}_t \exp(st). \quad (5.4)$$

Po podstawieniu (5.4) do (4.4) otrzymuje się poniższy kwadratowy problem własny:

$$\begin{aligned} (s^2 \mathbf{M}_{kk} + s \mathbf{C}_{kk} + \mathbf{K}_{kk}) \mathbf{a}_k + (s \mathbf{C}_{kt} + \mathbf{K}_{kt}) \mathbf{a}_t &= \mathbf{0}, \\ (s \mathbf{C}_{tk} + \mathbf{K}_{tk}) \mathbf{a}_k + (s \mathbf{C}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}) \mathbf{a}_t &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Rozwiązanie kwadratowego problemu własnego jest bardziej złożone niż liniowego problemu własnego. Oprócz metod opisanych np. w pracy [38] można do tego celu użyć metody kontynuacji podobnej do opisanej poniżej. Między wektorami własnymi \mathbf{c} , \mathbf{a}_k i \mathbf{a}_t zachodzi następująca relacja $\mathbf{c} = \left\{ \mathbf{a}_k^T, s \mathbf{a}_k^T, \mathbf{a}_t^T \right\}^T$.

Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych konstrukcji z lepkosprężystymi tłumikami drgań modelowanymi przy użyciu ułamkowych modeli reologicznych jest bardziej złożone niż w przypadku innych modeli. Problemy tego rodzaju były rozważane w pracach [27, 39-42]. Poniżej krótko omawia się metodę opisaną w pracy [27].

Na równaniu ruchu (4.8) zapisanym za pomocą zmiennych stanu ($\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{0}$) wykonuje się przekształcenie Laplace'a. Jeżeli dolna granica w definicji pochodnej niecałkowitego rzędu jest równa $-\infty$, to po uwzględnieniu, że

$$\mathbf{L}[\mathbf{z}(t)] = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{L}[D_t^\alpha \mathbf{z}(t)] = s^\alpha \mathbf{Z}, \quad \mathbf{L}[D_t^1 \mathbf{z}(t)] = s \mathbf{Z}, \quad (5.6)$$

(porównaj [30]) oraz przyjęciu zerowych warunków początkowych, otrzymuje się nieliniowy problem własny o postaci:

$$\mathbf{g}_1 \equiv (s \mathbf{A} + s^\alpha \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}) \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (5.7)$$

Rozwiązania nietrywialnie tego problemu istnieją, jeżeli:

$$\det(s \mathbf{A} + s^\alpha \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}) = 0. \quad (5.8)$$

Można wykazać, że jeżeli wartość własna s jest liczbą zespoloną, to liczba do niej sprzężona jest również wartością własną. Podobnie wektory własne są parami sprzężone.

Za pomocą omawianej poniżej metody kontynuacji wyznacza się tylko rozwiązania zespolone. Podstawowe informacje o metodzie kontynuacji można znaleźć w pracy

[43]. Problem własny (5.7) traktuje się jako równanie z parametrem α . Poszukuje się rozwiązań dla ciągu wartości parametru α i wyznacza się krzywe $s(\alpha)$, $\mathbf{Z}(\alpha)$. W omawianym przypadku pierwszy punkt na wyżej wspomnianych krzywych wyznaczamy dla $\alpha = 1$ jako rozwiązanie liniowego problemu własnego o postaci:

$$[s(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1) + \mathbf{B}] \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Teraz wyznacza się kolejne punkty na krzywych $s(\alpha)$, $\mathbf{Z}(\alpha)$ mających swój początek w jednym z rozwiązań problemu własnego (5.9). Do równania (5.7) dołącza się równanie (5.10), które należy traktować jako pewien sposób normalizacji wektora własnego \mathbf{Z}

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T (\alpha s^{\alpha-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}) \mathbf{Z} - a = 0, \quad (5.10)$$

gdzie a jest zadaną liczbą.

Układ równań rozwiązuje się metodą przyrostową. Zakłada się, że znamy rozwiązanie dla $\alpha = \alpha_r$ oznaczone symbolami s_r i \mathbf{Z}_r , a poszukuje się rozwiązania dla $\alpha_{r+1} = \alpha_r + \Delta\alpha$, gdzie $\Delta\alpha$ jest założonym przyrostem parametru α .

Układ równań (5.7) i (5.10), w którym $\alpha = \alpha_{r+1}$, rozwiązuje się metodą Newtona. Przyrostowe równania metody Newtona mają postać:

$$\mathbf{G}_z d\mathbf{Z} + \mathbf{G}_s ds = -\mathbf{g}_1, \quad \mathbf{G}_s^T d\mathbf{Z} + G_s ds = -g_2, \quad (5.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_z &= s\mathbf{A} + s^a \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}, \quad \mathbf{G}_s = (\alpha s^{\alpha-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}) \mathbf{Z}, \\ \mathbf{G}_s &= \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T (a) [a(a-1) s^{\alpha-2} \mathbf{A}^1] \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nowe przybliżenie rozwiązania równań (5.7) i (5.10) jest równe

$$s_{r+1}^{(i+1)} = s_{r+1}^{(i)} + ds, \quad \mathbf{Z}_{r+1}^{(i+1)} = \mathbf{Z}_{r+1}^{(i)} + d\mathbf{Z}, \quad (5.13)$$

gdzie górny indeks oznacza numer iteracji w metodzie Newtona.

Proces iteracyjny metody Newtona kończy się po spełnieniu nierówności:

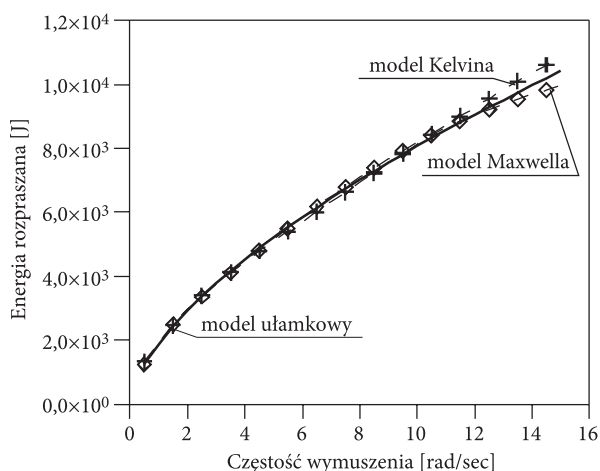
$$\left| ds \right| \leq \varepsilon_1 \left| s_{r+1}^{(i+1)}(\alpha_{r+1}) \right|, \quad \|d\mathbf{Z}\| \leq \varepsilon_2 \left\| \mathbf{Z}_{r+1}^{(i+1)}(\alpha_{r+1}) \right\|. \quad (5.14)$$

Proces przyrostowy kończy się, jeżeli wartość parametru α jest równa rzędowi pochodnej ułamkowej rozpatrywanych tłumików lepkosprężystych.

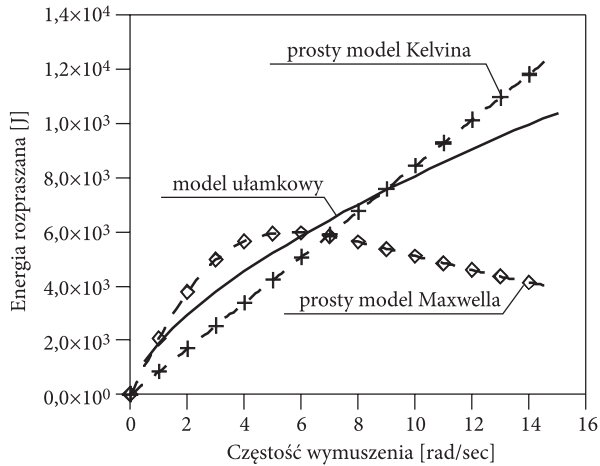
Częstość drgań i bezwymiarowy współczynnik tłumienia modalnego wyznacza się ze wzorów (5.3).

Poniżej przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń charakterystyk dynamicznych konstrukcji z lepkosprężystymi tłumikami drgań. Porównano charakterystyki dynamiczne ośmiokondygnacyjnej ramy z wbudowanymi tłumikami drgań. Użyto różnych modeli tłumików. Parametry ramy i tłumików drgań wzięto z pracy [22]. Częstości drgań własnych ramy bez tłumików wynoszą: $\omega_1 = 3,131$ rad/s, $\omega_2 = 8,66$ rad/s, $\omega_3 = 15,43$ rad/s. W obliczeniach pominięto tłumienie konstrukcji. Tłumiki są umieszczone na 6. i 7. kondygnacji. Do opisu zachowania tłumików użyto: i) ułamkowego modelu Kelvina, ii) prostego modelu Kelvina, iii) prostego modelu Maxwella, iv) uogólnionego 7-parametrowego modelu Kelvina, v) uogólnionego 7-parametrowego modelu Maxwella. Parametry modeli tłumików dobrano tak, by energia rozpraszana przez tłumiki modelowane modelami klasycznymi była możliwie bliska energii rozpraszanej przez tłumiki modelowane modelem ułamkowym. Na rysunkach 5.1 i 5.2 porównano energię rozpraszaną w trakcie jednego cyklu drgań przez tłumiki wykonujące drgania harmonicznie zmienne i modelowane za pomocą różnych modeli. Parametry prostych modeli Kelvina i Maxwella wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Widać, że modele te nie opisują wystarczająco dokładnie energii rozpraszanej.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wartości pierwszych trzech częstości drgań ramy z tłumikami drgań są w przybliżeniu równe niezależnie od przyjętego modelu tłumika. Maksymalne różnice wynoszą 2,8%. Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia w istotny sposób zależą od przyjętego modelu tłumika. Zestawiono je w tabeli 5.1. Widać, że wyniki uzyskane dla przypadku, gdy tłumiki są modelowane za pomocą prostych modeli Kelvina i Maxwella (oznaczone w tabeli 5.1 jako modele dwuparametrowe), znacznie różnią się od pozostałych. Maksymalne



Rys. 5.1. Porównanie energii rozpraszanej; tłumik modelowany za pomocą ułamkowego modelu reologicznego i uogólnionych modeli reologicznych



Rys. 5.2. Porównanie energii rozpraszanej; tłumik modelowany za pomocą uławkowego modelu reologicznego i prostych modeli reologicznych

różnice wynoszą 42% w przypadku prostego modelu Kelvina i 68% w przypadku prostego modelu Maxwella.

TABELA 5.1

Porównanie bezwymiarowych współczynników tłumienia modalnego

Współcz. tłumienia	Model Kelvina z		Uławkowy model Kelvina
	7 parametrami	2 parametrami	–
γ_1	0,0202338	0,0117468	0,020499
γ_2	0,0912198	0,0949451	0,0901444
γ_3	0,0314874	0,0429562	0,031391
Współcz. tłumienia	Model Maxwella z		
	7 parametrami	2 parametrami	
γ_1	0,020046	0,025839	
γ_2	0,088543	0,047404	
γ_3	0,025836	0,009864	

Sposób wyznaczania funkcji przenoszenia (*the transfer function*) układów liniowych opisywanych za pomocą równań różniczkowych z pochodnymi całkowitego rzędu jest powszechnie znany i opisany w wielu monografiach, np. w pracy [44]. Funkcje te są stosowane np. w analizie drgań losowych za pomocą teorii korelacyjnej. Poniżej omawia się sposób wyznaczania tych funkcji dla przypadku, gdy tłumiki drgań są modelowane za pomocą uławkowych modeli reologicznych. Równania ruchu mają wtedy postać (4.7), przy czym teraz $\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{P}_k \exp(\lambda t)$.

Rozwiązaniem równań ruchu (4.7) są teraz funkcje:

$$\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{Q}_k \exp(\lambda t), \quad \mathbf{q}_t(t) = \mathbf{Q}_t \exp(\lambda t), \quad (5.15)$$

Po podstawieniu (5.15) do (4.7) i uwzględnieniu, że [30] $D_t^\alpha \mathbf{q}_k(t) = (i\lambda)^\alpha \mathbf{Q}_k \exp(\lambda t)$ otrzymuje się równania algebraiczne o postaci:

$$\mathbf{D}_{kk}(\lambda)\mathbf{Q}_k(\lambda) + \mathbf{D}_{kt}(\lambda)\mathbf{Q}_t(\lambda) = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{D}_{tk}(\lambda)\mathbf{Q}_k(\lambda) + \mathbf{D}_{tt}(\lambda)\mathbf{Q}_t(\lambda) = \mathbf{0}, \quad (5.16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{kk}(\lambda) &= -\lambda^2 \mathbf{M}_{kk} + i\lambda \mathbf{C}_{kk} + (i\lambda)^\alpha \mathbf{C}_{kk}^d + \mathbf{K}_{kk} + \mathbf{K}_{kk}^d, & \mathbf{D}_{kt}(\lambda) &= (i\lambda)^\alpha \mathbf{C}_{kt}^t - \mathbf{K}_{kt}^t, \\ \mathbf{D}_{tk}(\lambda) &= (i\lambda)^\alpha \mathbf{C}_{tk}^t - \mathbf{K}_{tk}^t, & \mathbf{D}_{tt}(\lambda) &= (i\lambda)^\alpha \mathbf{C}_{tt}^t + \mathbf{K}_{tt}^t. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Rozwiązaniem układu równań (5.16) jest

$$\mathbf{Q}_k(\lambda) = \mathbf{H}_{kk}(\lambda)\mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}_t(\lambda) = \mathbf{H}_{tk}(\lambda)\mathbf{P}, \quad (5.18)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{kk}(\lambda) &= [\mathbf{D}_{kk}(\lambda) - \mathbf{D}_{kt}(\lambda)\mathbf{D}_{tt}^{-1}\mathbf{D}_{tk}(\lambda)]^{-1}, \\ \mathbf{H}_{tk}(\lambda) &= -\mathbf{D}_{tt}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{tk}(\lambda)[\mathbf{D}_{kk}(\lambda) - \mathbf{D}_{kt}(\lambda)\mathbf{D}_{tt}^{-1}\mathbf{D}_{tk}(\lambda)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

są poszukiwanymi funkcjami przenoszenia.

6. Numeryczne całkowanie równań ruchu

Numeryczne całkowanie równań ruchu w czasie jest szeroko stosowanym sposobem wyznaczania rozwiązania równań ruchu. Do wyznaczania rozwiązań równań ruchu konstrukcji z tłumikami modelowanymi za pomocą klasycznych modeli reologicznych można zastosować powszechnie znane metody, takie jak metoda Newmarka czy też metody Rungego-Kutty'ego. Zwraca się jednak uwagę na fakt, że równania ruchu są w tym przypadku zbiorem równań różniczkowych zwyczajnych 2. i 1. rzędu.

Numeryczne całkowanie równań ruchu konstrukcji z tłumikami drgań modelowanymi za pomocą ułamkowych modeli reologicznych jest bardziej złożone, ponieważ należy uwzględnić nielokalny charakter pochodnej niecałkowitego rzędu. Procedura rozwiązania omawianych równań ruchu zostanie omówiona na przykładzie metody opisanej w pracy [45]. Praca [46] również dotyczy numerycznego całkowania równań ruchu z pochodnymi niecałkowitego rzędu.

Pochodną niecałkowitego rzędu można przedstawić w postaci dyskretnej, korzystając z następującej definicji podanej przez Grunwalda [30]:

$$D_t^\alpha \langle \mathbf{q} \rangle_n = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} \mathbf{q}(t_n - j\Delta t), \quad (6.1)$$

gdzie $\Delta t = t/n$ jest krokiem czasowym, a symbol $\Gamma(\cdot)$ oznacza funkcję specjalną gamma. W relacji (6.1) pierwszy wyraz szeregu ($j=0$) odnosi się do ostatniej chwili czasu t_n . Wygodniej jest jednak odwrócić porządek sumowania tak, aby pierwszy wyraz tego szeregu dotyczył pierwszego kroku całkowania. Będzie tak, jeżeli zastąpi się j przez $n-j$. Zależność (6.1) można teraz przepisać w postaci:

$$D_t^\alpha \langle \mathbf{q} \rangle_n = \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{q}_j, \quad (6.2)$$

gdzie \mathbf{q}_j jest wartością wektora przemieszczeń w chwili $t_j = (j-1)\Delta t$, a

$$w_j = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \frac{\Gamma(n-j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n-j+1)}. \quad (6.3)$$

Do numerycznego obliczania pochodnej niecałkowitego rzędu można także użyć definicji (2.13). Można jej nadać następującą, ekwiwalentną postać [30]:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \langle \mathbf{q}(t) \rangle &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mathbf{q}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\mathbf{q}(0)}{t^\alpha} + \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{d\mathbf{q}(\tau)}{d\tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Jeżeli omawiane pochodne będą obliczane w wybranych chwilach, to całkę w (6.4) można obliczyć numerycznie, zakładając odpowiedni przebieg funkcji $\frac{d\mathbf{q}(\tau)}{d\tau}$ między kolejnymi chwilami czasu. Pozwala to na przepisanie zależności (6.4) w postaci:

$$D_t^\alpha \langle \mathbf{q}(t) \rangle_n = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\mathbf{q}_1}{[(n-1)\Delta t]^\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} \frac{\dot{\mathbf{q}}(\tau)}{[(n-1)\Delta t - \tau]^\alpha} d\tau \right]. \quad (6.5)$$

Zmianę prędkości $\dot{\mathbf{q}}(\tau)$ można przyjmować w różny sposób. Z pracy [45] wynika, że najbardziej odpowiednie jest przyjęcie liniowej aproksymacji prędkości między dwiema kolejnymi chwilami czasu. Dla przedziału czasu $(j-1)\Delta t \leq \tau \leq j\Delta t$ mamy teraz

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau) = \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\dot{\mathbf{q}}_{j+1} - \dot{\mathbf{q}}_j}{\Delta t} [\tau - \Delta t(j-1)]. \quad (6.6)$$

Po podstawieniu (6.6) do (6.5) i obliczeniu całki można (6.5) przepisać w postaci:

$$D_t^\alpha \langle \mathbf{q}(t) \rangle_n = \frac{\mathbf{q}_1}{\Gamma(1-\alpha)[(n-1)\Delta t]^\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} w'_j \dot{\mathbf{q}}_j, \quad (6.7)$$

gdzie, jeżeli $2 \leq j \leq n-1$, to

$$w'_j = \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left[(n-j+1)^{2-\alpha} - 2(n-j)^{2-j} + (n-j-1)^{2-\alpha} \right], \quad (6.8)$$

$$w'_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)[(n-1)\Delta t]^{\alpha-1}} - \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left[(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-j} \right], \quad (6.9)$$

$$w'_n = \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}. \quad (6.10)$$

Równanie ruchu (4.7) wygodnie będzie teraz zapisać w postaci:

$$\mathbf{M} D_t^2 \mathbf{q}(t) + \mathbf{C} D_t^1 \mathbf{q}(t) + \bar{\mathbf{C}} D_t^\alpha \mathbf{q}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (6.11)$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{kk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{kk}^t & \mathbf{C}_{kt}^t \\ \mathbf{C}_{kt}^t & \mathbf{C}_{tt}^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(t) = \text{col}(\mathbf{q}_k(t), \mathbf{q}_t(t)), \quad (6.12)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kk} + \mathbf{K}_{kk}^t & -\mathbf{K}_{kt}^t \\ -\mathbf{K}_{tk}^t & \mathbf{K}_{tt}^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \text{col}(\mathbf{p}_k(t), \mathbf{0}).$$

Jeżeli wzory metody średniego przyspieszenia Newmarka

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\mathbf{q}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{q}}_n), \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1} + \dot{\mathbf{q}}_{n-1} \Delta t + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 (\ddot{\mathbf{q}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{q}}_n), \quad (6.13)$$

i wzór (6.7) zastosujemy do numerycznego całkowania równania (6.11), to w rezultacie otrzymuje się równanie o postaci [45]:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_n = \tilde{\mathbf{p}}_n, \quad (6.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)\Delta t^\alpha} \bar{\mathbf{C}}, \\
\tilde{\mathbf{p}}_n &= \mathbf{p}_n - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)[(n-1)\Delta t]^\alpha} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{q}_1 \\
&\quad - \bar{\mathbf{C}} \sum_{j=1}^{n-1} w'_j \dot{\mathbf{q}}_j + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{n-1} + \left(\frac{4}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{C} + \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \bar{\mathbf{C}} \right) \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{n-1}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Równanie (6.14) umożliwia wyznaczanie stanu dynamicznego układu w kolejnych chwilach czasu. Dyskusję dotyczącą liczby niezbędnych wyrazów sumy występujących w (6.2) i (6.7) można znaleźć w pracach [45, 46].

7. Optymalne rozmieszczanie tłumików na konstrukcji

Odpowiednie rozmieszczenie tłumików drgań na konstrukcji ma istotny wpływ na efektywność tłumienia drgań. Równie istotny jest dobór tłumików o odpowiednich parametrach. Problem formułuje się jako zadanie optymalizacji. Optymalizacja parametrów tłumików modelowanych za pomocą prostych modeli Kelvina lub Maxwella jest omawiana w pracach [13, 47-52]. Problem optymalnego projektowania parametrów i położenia tłumików lepkosprężystych modelowanych za pomocą ułamkowych modeli reologicznych jest rozważany tylko w kilku pracach [53-55]. W pracy [56] rozwiązano problem poszukiwania optymalnego położenia i parametrów tłumików wiskotycznych przy użyciu programowania liniowego. Różne zadania dotyczące optymalnego rozmieszczania tłumików na konstrukcji rozwiązano w monografii [52] za pomocą metod gradientowych. Algorytm heurystyczny nazywany dalej metodą sekwencyjnej optymalizacji zastosowano do rozwiązania omawianych problemów optymalizacji w pracach [53, 54, 57]. Do rozwiązania stosowano również algorytmy genetyczne [13, 16] i metodę roju cząstek [53, 54].

Stosowano różnorodne funkcje celu. Przykładowo poszukiwano takiego rozmieszczenia tłumików i takich wartości parametrów tych tłumików, dla których:

- maksymalne przemieszczenia lub/i przyspieszenia konstrukcji osiągają minimalne wartości,
- względne różnice przemieszczeń dwóch sąsiednich kondygnacji konstrukcji są minimalne,
- wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia wybranej postaci drgań lub ważonej sumy bezwymiarowych współczynników tłumienia jest maksymalna,
- wartość maksymalna funkcji przenoszenia przemieszczeń lub przyspieszeń wyliczona dla 1 częstości drgań własnych osiąga minimum [52].

Niekiedy proces optymalizacji formułowano w ten sposób, aby osiągnąć założony poziom redukcji drgań [47, 53]. Suma wartości współczynników tłumienia tłumików była najistotniejszym i najczęstszym ograniczeniem w omawianych zadaniach optymalizacji [53-56].

Poniżej za pracami [54-56] krótko omówiono sformułowanie problemu optymalizacji położenia i parametrów tłumików lepkosprężystych modelowanych za pomocą trójparametrowych, ułamkowych modeli reologicznych Kelvina i Maxwella. W omawianych pracach modelem konstrukcji była rama ścinana. Problem optymalizacji został sformułowany w następujący sposób:

Znaleźć takie położenie lepkosprężystych tłumików drgań oraz wartości parametrów sztywności k_{ii} i tłumienia c_{di} , dla których ważona suma amplitud funkcji przenoszenia różnicy przemieszczeń dwóch sąsiednich kondygnacji $h_i(\lambda)$, wyliczona dla podstawowej częstości drgań własnych ($\lambda = \omega_1$) ramy z tłumikami, osiąga wartość minimalną.

Funkcja celu ma postać:

$$F = \mathbf{w}^T \mathbf{h}(\omega_1), \quad (7.1)$$

gdzie $\mathbf{h}(\omega_1) = \text{col}(h_1(\omega_1), h_2(\omega_1), \dots, h_n(\omega_1))$ jest wektorem omawianych powyżej funkcji przenoszenia, a $\mathbf{w} = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ wektorem wag.

Ograniczenia przyjęto w postaci następujących nierówności:

$$\sum_{i=1}^m c_{d,i} = C_d, \quad \sum_{i=1}^m k_{d,i} = K_d, \quad c_{d,i} \geq 0, \quad k_{d,i} \geq 0, \quad c_{d,i} / k_{d,i} = \text{const}, \quad (7.2)$$

gdzie symbole C_d i K_d oznaczają odpowiednio sumę współczynników tłumienia i sztywności tłumików, które mają być rozmieszczone na konstrukcji.

Do rozwiązania tak postawionego zadania zastosowano metodę sekwencyjnej optymalizacji i metodę roju cząstek (PSO).

Rozpatrywano ramę 10-kondygnacyjną. Sztywności pięter ramy są następujące: $k_1 = k_2 = 68\,710$ kN/m, $k_3 = k_4 = 54\,010$ kN/m, $k_5 = k_6 = 42\,170$ kN/m, $k_7 = k_8 = 28\,660$ kN/m, $k_9 = k_{10} = 16\,450$ kN/m. Masa typowego piętra wynosi $m_s = 2,07$ Mg. Macierz tłumienia konstrukcji ma postać:

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -c_{10} & c_{10} & \dots \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

a wartości współczynników tłumienia są następujące: $c_1 = c_2 = 4,76$ kNsec/m, $c_3 = c_4 = 3,73$ kNsec/m, $c_5 = c_6 = 2,91$ kNsec/m, $c_7 = c_8 = 1,98$ kNsec/m, $c_9 = c_{10} = 1,44$ kNsec/m.

Przyjęto, że suma współczynników tłumienia i współczynników sztywności możliwych do zainstalowania tłumików wynosi: $C_d = 500$ kNsec $^\alpha$ /m, $K_d = 25\ 000$ kNm 2 , a $\tau_d = c_d/k_d = 0,02$. Ponadto założono, że parametr $\alpha = 0,6$ i jest stały dla wszystkich tłumików i obu modeli ułamkowych.

W metodzie sekwencyjnej optymalizacji używa się pojęcia typowego tłumika i liczby tłumików, które należy rozmieścić na konstrukcji. Tutaj przyjęto, że dysponuje się 10 tłumikami, a $k_d = 2500$ kNm 2 , $c_d = 50$ kNsec $^\alpha$ /m. Ponadto przyjęto, że $\mathbf{w} = [1,0; 1,0; \dots, 1,0]^T$.

Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 7.1. Widać, że optymalne rozmieszczenie tłumików otrzymane za pomocą obu metod jest identyczne. Zbliżone do zera wartości współczynników tłumienia w modelu Maxwella wynikają z przyjętego w pracy [55] sposobu uwzględnienia ograniczeń w metodzie roju cząstek. Optymalne wartości współczynnika tłumienia uzyskane za pomocą obu metod także są zbliżone. Natomiast zupełnie inne jest optymalne ustawienie tłumików modelowanych za pomocą różnych ułamkowych modeli reologicznych.

TABELA 7.1

Rozwiązanie problemu optymalizacji

Nr kond.	Współczynnik tłumienia $c_{d,i}$			
	Ułamkowy model Kelvina		Ułamkowy model Maxwella	
	Metoda sekwencyjna	PSO	Metoda sekwencyjna	PSO
1	0	0	0	0,78
2	0	0	0	0,78
3	100,0	87,57	0	0,78
4	50,0	47,68	0	0,78
5	100,0	106,18	0	0,78
6	50,0	56,68	0	0,78
7	100,0	120,77	350,0	347,23
8	50,0	26,68	0	0,78
9	50,0	54,45	150,0	146,48
10	0	0	0	0,78

8. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono przegląd problematyki związanej z modelowaniem i identyfikacją parametrów wiskotycznych i lepkosprężystych tłumików drgań oraz problemów związanych z analizą dynamiczną konstrukcji z wbudowanymi tłumikami drgań.

Modele tłumików opisywane za pomocą pochodnych niecałkowitego rzędu wydają się być interesującą alternatywą w stosunku do modeli klasycznych modeli, ponieważ zawierają mniej parametrów. Wymagają jednak niestandardowych metod analizy.

Z dokonanego przeglądu wynika, że należy szczegółowo zbadać wpływ temperatury na właściwości tłumików lepkosprężystych. Bardzo pożądane jest również przeprowadzenie badań właściwości tłumików w większym przedziale częstotliwości niż to ma miejsce dotychczas.

Odpowiednikiem omawianych tutaj modeli tłumików w przypadku warstw z materiałów lepkosprężystych jest model ADF [59, 60] i model GHM [61, 62], zastosowany np. w pracy [63].

Artykuł wpłynął do redakcji 17.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w kwietniu 2012 r.

LITERATURA

- [1] B.W. HOUSNER, L.A. BERGMAN, T.K. CAUGHEY, A.G. CHASSIAKOS, R.O. CLAUS, S.F. MASRI, R.E. SKELTON, T.T. SOONG, B.F. SPENCER, J.T.P. YAO, *Structural control: past, present, and future*, Journal of Engineering Mechanics, 123, 1997, 897-971.
- [2] T.T. SOONG, *State-of-the-art-review. Active structural control in civil engineering*, Engineering Structures, 10, 1988, 74-84.
- [3] T.T. SOONG, B.F. SPENCER, *Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice*, Engineering Structures, 24, 2002, 243-259.
- [4] B.F. SPENCER, State of the art of structural control, *Journal of Structural Engineering*, 129, 2003, 845-856.
- [5] M.D. SYMANS, M.C. CONSTANTINOU, *Semi-active control systems for seismic protection of structures: A state-of-art review*, Journal of Engineering Structures, 21, 1999, 469-487.
- [6] T.T. SOONG, G.F. DARGUSH, *Passive energy dissipation systems in structural engineering*, Wiley, Chichester, 1999.
- [7] K.W. MIN, J. KIM, S.H. LEE, *Vibration tests of 5-storey steel frame with viscoelastic dampers*, Engineering Structures, 26, 2004, 831-839.
- [8] A.D. NASHIF, D.I.G. JONES, J.P. HENDERSON, *Vibration damping*, Wiley, New York, 1985.
- [9] C.J. BLACK, N. MAKRI, *Viscous heating of fluid dampers under small and large amplitude motions: Experimental studies and parametric modeling*, Journal of Engineering Mechanics, 133, 2007, 566-577.
- [10] N. MAKRI, *Viscous heating of fluid dampers, Part I*, Journal of Engineering Mechanics, 124, 1998, 1210-1216.
- [11] N. MAKRI, Y. ROUSSOS, A.S. WHITTAKER, J. KELLY, *Viscous heating of fluid dampers, II: Large-amplitude motions*, Journal of Engineering Mechanics, 124, 1998, 1217-1223.

-
- [12] J. CAZENOVE, D.A. RADE, A.M.G. DE LIMA, C.A. ARUJO, *A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, doi:10.1016/j.ymssp.2011.5.004.
- [13] M.P. SINGH, L.M. MORESCHI, *Optimal placement of dampers for passive response control*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 31, 2002, 955-976.
- [14] V.A. MATSAGAR, R.S. JANGID, *Viscoelastic damper connected to adjacent structures involving seismic isolation*, Journal of Civil Engineering and Management, 11, 2005, 309-322.
- [15] T. HATADA, T. KOBORI, M. ISHIDA, N. NIWA, *Dynamic analysis of structures with Maxwell model*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 29, 2000, 159-176.
- [16] M.P. SINGH, N.P. VERMA, L.M. MORESCHI, *Seismic analysis and design with Maxwell dampers*, Journal of Engineering Mechanics, 129, 2003, 273-282.
- [17] W.S. ZHANG, Y.L. XU, *Vibration analysis of two buildings linked by Maxwell model defined fluid dampers*, Journal of Sound and Vibration, 233, 2000, 775-796.
- [18] T.S. CHANG, M.P. SINGH, *Mechanical model parameters for viscoelastic dampers*, Journal of Engineering Mechanics, 2009, 135, 581-584.
- [19] M.P. SINGH, T.S. CHANG, *Seismic analysis of structures with viscoelastic dampers*, Journal of Engineering Mechanics, 135, 2009, 571-580.
- [20] A. PALMERI, F. RICCIARDELLI, A. DE LUCA, G. MUSCOLINO, *State space formulation for linear viscoelastic dynamic systems with memory*, Journal of Engineering Mechanics, 129, 2003, 715-724.
- [21] S.W. PARK, *Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control*, International Journal of Solids and Structures, 38, 2001, 8065-8092.
- [22] R. LEWANDOWSKI, A. BARTKOWIAK, *Dynamic characteristics of structures with viscoelastic dampers modeled by means of generalized rheological models*, Proceedings of III ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, COMPDYN 2011, M. Papadrakakis, M. Fragiadakis, V. Plevris (eds.), Corfu, Greece, 26-28 May 2011.
- [23] T.S. CHANG, M.P. SINGH, *Seismic analysis of structures with a fractional derivative model of viscoelastic dampers*, Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1, 2002, 251-260.
- [24] N. MAKRIS, M.C. CONSTANTINO, *Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers*, Journal of Structural Engineering, 117, 1991, 2708-2724.
- [25] K. YE, L. LI, J. TANG, *Stochastic seismic response of structures with added viscoelastic dampers modeled by fractional derivative*, Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2, 2003, 133-139.
- [26] R. LEWANDOWSKI, B. CHORĄŻYCZEWSKI, *Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers*, Computers and Structures, 88, 2010, 1-17.
- [27] R. LEWANDOWSKI, Z. PAWLAK, *Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modelled by rheological models with fractional derivatives*, Journal of Sound and Vibration, 330, 2011, 923-936.
- [28] K. FUJITA, A. MOUSTAFA, I. TAKEWAKI, *Optimal placement of viscoelastic dampers and supporting members under variable critical excitations*, Earthquakes and Structures, 1, 2010, 43-67.
- [29] J.S. LESZCZYŃSKI, *An introduction to fractional mechanics*, The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa, 2011.
- [30] I. PODLUBNY, *Fractional differential equations*, San Diego, Academic Press, 1999.
- [31] Y. YIN, K.Q. ZHU, *Oscillating flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell model*, Applied Mathematics and Computation, 173, 2006, 231-242.

-
- [32] A. LION, *Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives*, *Archive of Mechanics*, 53, 2001, 253-273.
- [33] J.S. MOITA, A.L. ARAUJO, P. MARTINS, C.M. MOTA SOARES, C.A. MOTA SOARES, *A finite element model for the analysis of viscoelastic sandwich structures*, *Computers and Structures*, 89, 2011, 1874-1881.
- [34] N. MAKRIS, M.C. CONSTANTINOU, *Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers*, *Journal of Structural Engineering*, 117, 1991, 2708-2724.
- [35] R.E. PEREZ, K. BEHDINAN, *Particle swarm approach for structural design optimization*, *Computers and Structures*, 85, 2007, 1579-1588.
- [36] N. MAKRIS, *Theoretical and experimental investigation of viscous dampers in applications of seismic and vibration isolation*, PhD dissertation, State University of New York at Buffalo, 1992.
- [37] R. LEWANDOWSKI, *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- [38] F. TISSEUR, K. MEERBERGEN, *The quadratic eigenvalue problem*, *SIAM Review*, 43, 2001, 235-286.
- [39] S. ADHIKARI, B. PASCUAL, *Iterative methods for eigenvalues of viscoelastic systems*, *Journal of Vibration and Acoustics*, 133, 2011, 021002-1-021002-7.
- [40] F. CORTES, M.J. ELEJABARRIETA, *An approximate numerical method for the complex eigenproblem in systems characterized by a structural damping matrix*, *Journal of Sound and Vibration*, 296, 2006, 166-182.
- [41] F. CORTES, M.J. ELEJABARRIETA, *Computational methods for complex eigenproblems in finite element analysis of structural systems with viscoelastic damping treatments*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 2006, 6448-6462.
- [42] E.M. DAYA, M. POTIER-FERRY, *A numerical method for nonlinear problems application to vibrations of viscoelastic structures*, *Computers and Structures*, 79, 2001, 533-541.
- [43] R. SEYDEL, *From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Elsevier, New York, 1988.
- [44] L. MEIROVITCH, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
- [45] M.P. SINGH, T.S. CHANG, H. NANDAN, *Algorithm for seismic analysis of MDOF systems with fractional derivatives*, *Engineering Structures*, 33, 2011, 2371-2381.
- [46] A. SCHMIDT, L. GAUL, *Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives*, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 29, 2002, 37-55.
- [47] J.H. PARK, J. KIM, K.W. MIN, *Optimal design of added viscoelastic dampers and supporting braces*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33, 2004, 465-484.
- [48] S.H. LEE, D.I. SON, J. KIM, K.W. MIN, *Optimal design of viscoelastic dampers using eigenvalue assignment*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33, 2004, 521-542.
- [49] A.K. SHUKLA, T.K. DATTA, *Optimal use of viscoelastic dampers in building frames for seismic force*, *Journal of Structural Engineering*, 125, 1999, 401-409.
- [50] M.P. SINGH, N.P. VERMA, L.M. MORESCHI, *Seismic analysis and design with Maxwell dampers*, *Journal of Engineering Mechanics*, 129, 2003, 273-282.
- [51] Y. RIBAKOV, G. AGRANOVICH, *A method for design of seismic resistant structures with viscoelastic dampers*, *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 20, 2011, 566-578.
- [52] I. TAKEWAKI, *Building Control with Passive Dampers: Optimal Performance-based Design for Earthquakes*, Wiley, Singapore, 2009.

- [53] Y.T. CHEN, Y.H. CHAI, Effects of brace stiffness on performance of structures with supplemental Maxwell model-based brace-damper systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 40, 2011, 75-92.
- [54] Z. PAWLAK, R. LEWANDOWSKI, *Optimization of viscoelastic dampers as described by the fractional rheological model*, Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Valencia, Spain, CD-ROM, Paper 170, 14-17 September 2010.
- [55] Z. PAWLAK, R. LEWANDOWSKI, *Optimization of structures equipped with viscoelastic dampers modeled using the fractional order derivatives*, Proceedings of III ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, COMPDYN 2011, M. Papadrakakis, M. Fragiadakis, V. Plevris (eds.), Corfu, Greece, 26-28 May 2011.
- [56] R. LEWANDOWSKI, Z. PAWLAK, *Optimal location of viscoelastic dampers represented by the classical and fractional rheological models*, Chapter in a book entitled "Structural Seismic Design Optimization and Earthquake Engineering: Formulations and Applications", eds. V. Plevris, Ch. Mitropoulou and N.D. Lagaros (w druku).
- [57] R. LEWANDOWSKI, *Optimization of the location and damping constants of viscous dampers*, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology, B.H.V. Topping and M. Papadrakakis (eds.), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, Athens, Greece, Paper 193, 2-5 September, 2008, 1-16.
- [58] R.H. ZHANG, T.T. SOONG, *Seismic design of viscoelastic dampers for structural applications*, *Journal of Structural Engineering*, 118, 1992, 1375-1392.
- [59] G.A. LESIEUTRE, E. BIANCHINI, *Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields*, *Journal of Vibration and Acoustics*, 117, 1995, 424-430.
- [60] G.A. LESIEUTRE, E. BIANCHINI, A. MAIANI, *Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields*, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 19, 1996, 520-527.
- [61] D.J. MCTAVISH, P.C. HUGHES, *Modeling of linear viscoelastic space structures*, *Journal of Vibration and Acoustics*, 115, 1993, 103-110.
- [62] D.F. GOLLA, P.C. HUGHES, *Dynamics of viscoelastic structures — a time-domain finite element formulation*, *Journal of Applied Mechanics*, 52, 1985, 897-906.
- [63] S.K. SARANGI, M.C. RAY, *Active damping of geometrically nonlinear vibrations of laminated composite plates using vertically reinforced 1-3 piezoelectric composites*, *Acta Mechanica*, 222, 2011, 363-380.

R. LEWANDOWSKI

Problems of reduction of vibrations of structures with viscous and viscoelastic dampers

Abstract. The paper has a reviewing character and it is dedicated to review problems connected with modelling and analysis of viscoelastic dampers and to review problems of dynamic analysis of structures with viscous and viscoelastic dampers. In the paper, a review of literature together with the exemplary solutions of considered problems are shortly presented. The modelling of dampers, the identification of parameters of dampers' models, the description of structures with dampers, the determination of dynamic characteristics of structures with dampers and optimization of dampers' location on structure are main considered problems. Some general remarks are also formulated.

Keywords: dynamics of structures, viscous and viscoelastic dampers, dampers models, identification of parameters, dynamic characteristics, optimization of dampers location