



Analiza rozkładu energii odkształcenia z uwzględnieniem tarcia powierzchniowego w pierścieniu wykonanym z materiału o właściwościach hiperelastycznych

TADEUSZ WEGNER, MAREK KOKOT¹

Politechnika Poznańska, Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania,
Instytut Mechaniki Stosowanej, Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji,
60-965 Poznań, ul. Piotrowo 3, tadeusz.wegner@put.poznan.pl

¹Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Mechaniczny,
Instytut Informatyki i Zarządzania Produkcją,
60-516 Zielona Góra, ul. Szafrana 4, m.kokot@iizp.uz.zgora.pl

Streszczenie. Rozwój technologii informatycznych pozwolił na wprowadzenie do obliczeń inżynierskich na masową skalę programów wykorzystujących metodę elementów skończonych MES do symulowania zachowania się elementów maszyn, urządzeń mechanicznych oraz zjawisk fizycznych. Głównym problemem ich zastosowania w przypadku analizy tarcia powierzchniowego jest to, że w większości są przeznaczone tylko do obliczeń materiałów o właściwościach liniowych. To zjawisko ma szczególne znaczenie przy obliczeniach materiałów hiperelastycznych, do których należy również guma. Jest ona dzisiaj masowo wykorzystywana w różnych dziedzinach techniki. Zjawisko tarcia ma bezpośredni wpływ na odkształcanie się przedmiotów wykonanych z materiałów hiperelastycznych. Do obliczeń tych materiałów zastosowano metodę energetyczną, wykorzystującą element skończony o nieliniowych właściwościach modelowany energetycznie oraz oryginalny algorytm iteracyjny nazwany metodą relaksacji lokalnej. W artykule przedstawiono zastosowanie metody energetycznej do wyznaczenia odkształceń pierścienia gumowego z uwzględnieniem zjawiska tarcia powierzchniowego. Oprócz otrzymanych deformacji danego elementu przedstawiono również wyniki obliczeń dyssypacji energii spowodowanej pracą sił tarcia oraz rozkłady energii odkształcenia postaciowego i objętościowego w poszczególnych warstwach odkształcanego pierścienia.

Słowa kluczowe: energetyczny element skończony, materiał hiperelastyczny, metody energetyczne, tarcie powierzchniowe

1. Wstęp

Tarcie jest zjawiskiem, z którym ludzkość styka się od początku swojego istnienia. Wywołuje ono straty energii, zużywanie się powierzchni elementów trących, wydzielanie ciepła, co powoduje wzrost temperatury na powierzchniach trących, a także drgania oraz efekty akustyczne. Rozwój techniki powodował, że coraz bardziej zwracano uwagę na negatywne skutki występowania tarcia. Jednym z pierwszych badaczy próbujących opisać zjawisko tarcia był słynny Leonardo da Vinci. Jednak dopiero burzliwy rozwój techniki podczas rewolucji przemysłowej w XIX wieku przyczynił się bezpośrednio do rozwoju badań nad zjawiskiem tarcia. Powstała nowa dziedzina nauki, zwana trybologią, której zadaniem jest badanie wpływu zjawiska tarcia na układy mechaniczne.

Powstało wiele modeli tarcia, jednak należy stwierdzić, że niestety wszystkie proponowane modele są słuszne, ale jedynie w pewnym zakresie [1]. Każdy z nich rozpatruje proces tarcia zbyt jednostronnie i wskutek tego nie może być w pełni słuszny. Często też zjawisko tarcia jest analizowane osobno, bez uwzględnienia rzeczywistych mechanicznych właściwości materiałów biorących udział w procesie tarcia, takich jak ich odkształcalność wywołana sprężystością postaciową oraz objętościową.

Skomplikowanym problemem jest powierzchniowe tarcie materiałów hiperelastycznych, do których należy guma. Główną przyczyną trudności w analizie tarcia tych materiałów są ich nieliniowe właściwości i duża odkształcalność [4, 5]. Najbardziej powszechnym założeniem przyjmowanym w badaniach nad gumą było, że jest ona materiałem w pełni nieściśliwym, co bezpośrednio przekładało się na sposób badań nad jej zachowaniem. Przyjęcie założenia o nieściśliwości materiału jest poważnym uproszczeniem, gdyż w rzeczywistości takie materiały nie istnieją. Każdy materiał charakteryzuje się ściśliwością. Zatem przedstawione rozwiązania zagadnień w pracach [9, 10, 11], traktujących gumę jako materiał całkowicie nieściśliwy, należy traktować jako przybliżone. Z tego też względu można stwierdzić, że będzie rozważany materiał prawie nieściśliwy lub bliski nieściśliwości, do których zaliczana jest guma.

Poważnym problemem przy obliczaniu materiałów hiperelastycznych jest to, iż programy oferowane na rynku uwzględniające w obliczeniach zjawisko tarcia powierzchniowego są z reguły przeznaczone do obliczeń materiałów o dużej sztywności. Z tego też względu do obliczeń odkształceń elementów wykonanych z materiałów prawie nieściśliwych, lecz o dużej odkształcalności, takich jak guma, opracowano oryginalną metodę obliczeniową wykorzystującą element skończony modelowany energetycznie i procedurę relaksacji lokalnej [2, 7, 8].

2. Metoda relaksacji lokalnej

Do obliczenia energii odkształcenia w elemencie skończonym po jego zdeformowaniu wykorzystano funkcję Mooneya, zmodyfikowaną przez Wegnera [8], z dodanym członem opisującym energię odkształcenia czysto objętościowego. Funkcję tę przedstawia wzór:

$$U = C_1(I_1 - 3\sqrt[3]{I_3}) + C_2(I_2 - 3\sqrt[3]{I_3^2}) + \frac{1}{2}K \frac{(\sqrt{I_3} - 1)^2}{\sqrt{I_3}}, \quad (1)$$

gdzie: I_1, I_2, I_3 — niezmienniki stanu odkształcenia;
 C_1, C_2 — stałe materiałowe wyznaczone eksperymentalnie;
 K — moduł ściśliwości (moduł odkształcenia objętościowego).

Trzeci człon funkcji (1) oparty jest na niezmienniku stanu odkształcenia I_3 , który zależy od kwadratu względnej objętości materiału. Reprezentuje energię właściwą odkształcenia objętościowego U_V . Niezmienniki I_1 i I_2 występujące w dwóch pierwszych członach zostały skorygowane tak, aby suma tych członów opisywała energię właściwą odkształcenia czysto postaciowego U_S .

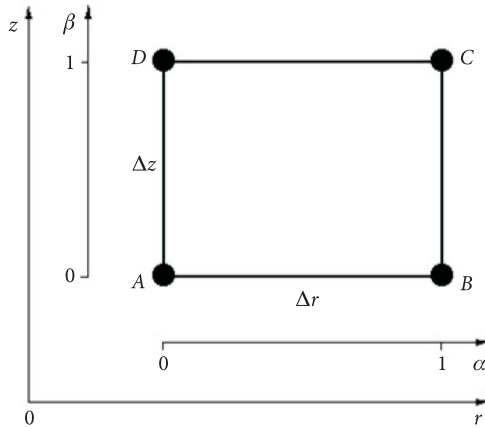
Wprowadzenie w funkcji (1) dodatkowego składnika w postaci U_V ma na celu zwiększenie dokładności matematycznego modelu materiału charakteryzującego się cechą ściśliwości, przez udoskonalenie aproksymacji rzeczywistej wartości energii jego odkształcenia. W literaturze można spotkać różne postacie dodatkowego członu [6, 8]. Jego dobór jest uzależniony od właściwości materiału, a wybrany model powinien jak najwierniej odzwierciedlać rzeczywiste związki fizyczne zachodzące między naprężeniami i odkształceniami w trójosiowym stanie naprężenia. Dobierając odpowiednio duże K , można uzyskać w ten sposób związki dla materiału prawie nieściśliwego.

Funkcja energii właściwej odkształcenia materiału (1) posłużyła do skonstruowania energetycznego elementu skończonego o kształcie pierścienia i przekroju prostokątnym, którego budowę przedstawiono na rysunku 1.

Energia właściwa odkształcenia jest funkcją niezmienników stanu odkształcenia. Korzystając z funkcji (1), która opisuje energię właściwą odkształcenia materiałów praktycznie nieściśliwych, takich jak np. guma, można wyrazić [8] energię właściwą odkształcenia jako funkcję składowych przemieszczenia węzłów oraz lokalnych współrzędnych α i β :

$$U(u_A, w_A, u_B, w_B, u_C, w_C, u_D, w_D; \alpha, \beta). \quad (2)$$

Po scałkowaniu względem objętości początkowej V elementu nieodkształconego otrzymuje się energię potencjalną odkształcenia obrotowo-symetrycznego



Rys. 1. Obrotowo-symetryczny element skończony w kształcie pierścienia o przekroju prostokątnym i węzłach w wierzchołkach A, B, C, D

elementu o przekroju prostokątnym, w funkcji składowych przemieszczenia jego wierzchołków:

$$E^{(e)}(u_A, w_A, u_B, w_B, u_C, w_C, u_D, w_D) = \int_V U dV. \quad (3)$$

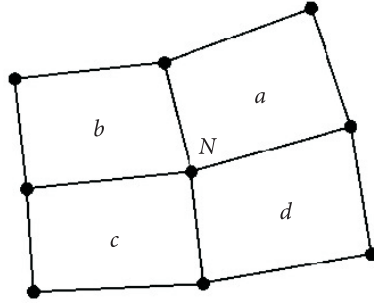
Określony powyżej energetyczny element skończony został wykorzystany do wyznaczenia stanu przemieszczeń zdeformowanego ciała metodą relaksacji lokalnej, specjalnie opracowaną przez Wegnera [2, 8] metodą obliczeniową, którą nazwano tak ze względu na lokalny zasięg przeprowadzanych iteracji o charakterze relaksującym naprężenia w ciele.

W klasycznym ujęciu metody elementów skończonych należałoby dążyć do wyznaczenia macierzy sztywności elementu, która, ogólnie mówiąc, określa związek między składowymi uogólnionych przemieszczeń węzłów, zgodnymi z poszczególnymi stopniami swobody, a odpowiadającymi tym stopniom swobody składowymi uogólnionych sił. W metodzie relaksacji lokalnej zrezygnowano z wykorzystania w obliczeniach macierzy sztywności. Wyznaczanie położenia węzłów w kolejnych iteracjach ogranicza się do obszaru elementów bezpośrednio połączonych z danym węzłem i jest każdorazowo poprawianiem położenia tylko jednego węzła, i to jedynie względem węzłów leżących w najbliższym sąsiedztwie, które w tym momencie są traktowane tak jak węzły całkowicie utwierdzone, o zablokowanych wszystkich stopniach swobody, a więc niemogące przemieszczać się w żadnym kierunku, mimo że są przecież punktami ośrodka sprężystego. Metodę relaksacji lokalnej można opisać, wykorzystując ilustrację przedstawioną na rysunku 2.

Obszar otaczający węzeł N jest podzielony na elementy a, b, c, d bezpośrednio z nim połączone. Energia potencjalna sił sprężystości obszaru otaczającego węzeł jest sumą:

$$E_0 = E^{(a)} + E^{(b)} + E^{(c)} + E^{(d)}, \quad (4)$$

gdzie $E^{(a)}$, $E^{(b)}$, $E^{(c)}$, $E^{(d)}$ to energia potencjalna obszarów otaczających węzeł.



Rys. 2. Lokalne otoczenie węzła N

Położenie węzła N jest poprawiane tak, aby wartość energii potencjalnej sił sprężystości E_0 obszaru otaczającego ten węzeł była minimalna. Wartość składowych jego położenia jest wyznaczana na podstawie przyrostów energii odkształcenia elementów połączonych bezpośrednio z danym węzłem, wywołanych próbnym przemieszczaniem węzła w kierunku zgodnym ze stopniem swobody odpowiadającym danej sile składowej. Badając zmiany energii podczas przemieszczania węzła w kierunkach zgodnym lub przeciwnym do osi współrzędnych, określamy w ten sposób siły oddziaływania węzła na najbliższe otoczenie w zależności od położenia węzła, a ich różnica odniesiona do drogi przemieszczenia węzła wyznacza gradient siły, który jest miarą lokalnej sztywności odpowiadającej danemu stopniowi swobody. Wykorzystując wartości lokalnych sztywności odpowiadających danemu węzłowi, obliczamy nowe położenie węzła likwidujące jego lokalne niezrównoważenie. Postępowanie takie jest wielokrotnie powtarzane dla kolejnych węzłów, aż siły składowe lokalnego niezrównoważenia węzłów, określane w powyższy sposób, będą mniejsze od z góry zadanej małej wartości.

Z dokładnym opisem matematycznym energetycznego elementu skończonego i metody relaksacji lokalnej oraz ich wykorzystania do obliczeń odkształceń materiału hiperelastycznego bez uwzględnienia zjawiska tarcia powierzchniowego można zapoznać się w literaturze występującej w pozycjach [2, 8]. Procedura relaksacji lokalnej przedstawiona szczegółowo w tych pracach została uzupełniona tak, aby w obliczeniach możliwe było uwzględnienie zjawiska tarcia powierzchniowego. Zastosowanie metody relaksacji lokalnej do analizy zagadnień uwzględniających zjawisko tarcia powierzchniowego jest opisane w pracach [3, 5, 7].

3. Obliczanie tarcia powierzchniowego w metodzie relaksacji lokalnej

Tarcie elastomerów, a przede wszystkim gumy, ze względu na skomplikowany charakter występujących tam zjawisk, jest w trybologii rozpatrywane jako całkowicie osobne zjawisko [1]. Warunki współpracy powierzchni trących, z których jedną jest guma, zależą od bardzo wielu czynników, między innymi od: składu chemicznego gumy, jej elastyczności i struktury wewnętrznej materiału, czynników zewnętrznych, gładkości powierzchni, rodzaju warstwy oraz substancji wypełniającej przestrzeń między nimi. Biorąc pod uwagę stopień skomplikowania zjawiska tarcia gumy, do wyznaczenia jej odkształceń z uwzględnieniem tarcia powierzchniowego wykorzystano oryginalną metodę opartą na energetycznym elemencie skończonym, w której położenie poszczególnych węzłów modelu obiektu gumowego uwzględniającego tarcie powierzchniowe jest wyznaczane metodą relaksacji lokalnej.

Procedura relaksacji lokalnej została uogólniona tak, aby umożliwić wyznaczanie przemieszczeń węzłów elementów skończonych na powierzchniach trących. Głównym problemem do rozstrzygnięcia było ustalenie kryterium, w jakich warunkach dany węzeł w warstwie stykającej się z powierzchnią trącą ma możliwość przemieszczania się. Pod wpływem nacisku na powierzchni materiału powstają siły normalne i styczne do powierzchni trących. Znając naprężenia normalne i naprężenia styczne działające na powierzchni pierścienia, możemy wyznaczyć siły docisku i siły styczne działające na powierzchni styku płyta-pierścien:

$$N = -\int_A \sigma_z dA, \quad S = -\int_A \tau_{zr} dA, \quad (5)$$

gdzie: N — siła normalna;

S — siła styczna;

σ_z — naprężenia normalne;

τ_{zr} — naprężenia styczne;

A — pole powierzchni trącej z otoczenia węzła w stanie nieodkształconym.

Siła styczna po przekroczeniu pewnej granicznej wartości, która zależy od siły normalnej i wartości współczynnika tarcia, powoduje zerwanie kontaktu pomiędzy powierzchniami trącymi, co w modelowanym elemencie skończonym uwzględniającym zjawisko tarcia sprowadza się do odblokowania węzła w obszarze działania siły stycznej.

Ze względu na skomplikowany charakter zjawiska tarcia i jego uzależnienie od wielu czynników przyjęto mechanizm lokalnego oddziaływania zjawiska tarcia wyrażony modelem Coulombowskim [1], z którego wynika, że zerwanie kontaktu pomiędzy powierzchniami trącymi zachodzi wtedy, gdy siła styczna przekroczy wartość graniczną wyznaczoną z zależności:

$$S > T = \mu N, \quad (6)$$

gdzie: T — siła tarcia;
 μ — współczynnik tarcia;
 N — siła docisku.

W konsekwencji następuje przemieszczanie się ciała wzdłuż powierzchni trącej, co powoduje zmniejszenie naprężeń stycznych i zmianę naprężeń normalnych. Przekłada się to na zmianę wartości sił stycznych i normalnych, co może spowodować ponowne zablokowanie przemieszczeń węzła, jeśli warunek (6) nie będzie spełniony.

4. Zasada zachowania energii w opisie zjawiska tarcia powierzchniowego

Zastosowanie metody energetycznej pozwala określić wartości siły działającej na pierścień. Z zasady zachowania energii wynika zależność:

$$\Delta L = \Delta E_p, \quad (7)$$

gdzie: ΔL — przyrost pracy sił zewnętrznych;
 ΔE_p — przyrost energii odkształcenia pierścienia.

Ponieważ praca sił zewnętrznych jest równa sumie pracy sił czynnych i biernych:

$$\Delta L = \Delta L_p + \Delta L_T, \quad (8)$$

więc podstawiając powyższą zależność do wzoru (7), otrzymujemy:

$$\Delta L_p = \Delta E_p - \Delta L_T, \quad (9)$$

gdzie: ΔL_p — przyrost pracy sił obciążających (sił czynnych);
 ΔL_T — przyrost pracy sił tarcia (sił biernych), przy czym $\Delta L_T < 0$,
 bowiem siły tarcia mają zwrot przeciwny do przemieszczenia węzła.

Przyrost pracy sił obciążających, będących w tym wypadku siłami działającymi bezpośrednio na pierścień, wyznaczamy ze wzoru:

$$\Delta L_p = P_{sr} \cdot \Delta f, \quad (10)$$

gdzie: P_{sr} — średnia wartość siły obciążającej pierścień w danym kroku;
 Δf — odpowiadający jej przyrost ugięcia.

Podstawiając do wzoru (9) zależność wynikającą ze związku (10), otrzymujemy:

$$P_{sr} = \frac{\Delta E_p - \Delta L_T}{\Delta f}. \quad (11)$$

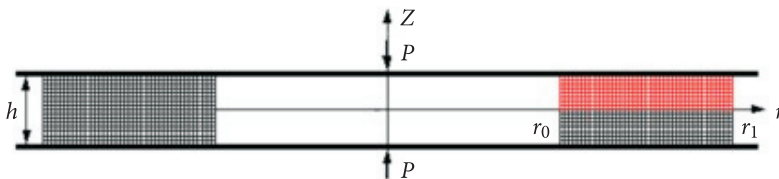
Część energii, która akumuluje się w pierścieniu przy działaniu sił obciążających będących siłami czynnymi, jest rozpraszana przez siły tarcia, czyli w tym przypadku zostanie przejęta przez siły biernie. Są one zróżnicowane i uzależnione od przyjętej w obliczeniach granicznej wartości współczynnika tarcia oraz lokalnych wartości sił dociskających, co bezpośrednio wpływa na wielkość rozpraszanej energii i wartość siły obciążającej pierścień [3].

Wyznaczając średnią wartość sił obciążających pierścień zarówno w przypadku procesu obciążania (uginania) jak i odciążania pierścienia, należy zwrócić szczególną uwagę na wartości przyrostów prac i energii występujących podczas obciążania i odciążania, w zależności od wartości przyrostu strzałki ugięcia Δf , oraz że przyrost pracy sił tarcia przyjmuje zawsze wartości ujemne, ponieważ siła tarcia jest siłą bierną o zwrocie przeciwnym do kierunku przemieszczania się fragmentu powierzchni pierścienia.

5. Wyniki obliczeń pierścienia gumowego

Badanym obiektem jest pierścień o prostokątnym przekroju poprzecznym, wykonany z materiału praktycznie nieściśliwego. Obciążenie statyczne działa w osi symetrii pierścienia siłą przyłożoną prostopadle do sztywnej płyty. Założono, że średnica płyty jest większa od zewnętrznej średnicy odkształconego pierścienia. Ze względu na symetrię pierścienia względem płaszczyzny, obliczeniom została poddana tylko jego górna połowa zaznaczona na rysunku 3 kolorem czerwonym. Modelowaną część pierścienia podzielono na 40×8 obrotowo symetrycznych elementów energetycznych o przekroju kwadratowym. Przyjęto promień zewnętrzny pierścienia równy 80 mm, promień wewnętrzny 40 mm, a jego wysokość 16 mm.

Nieliniowe właściwości materiału pierścienia oraz zastosowanie oryginalnej metody obliczeniowej wykorzystującej energetyczny element skończony i metodę



Rys. 3. Schemat obciążenia badanego pierścienia

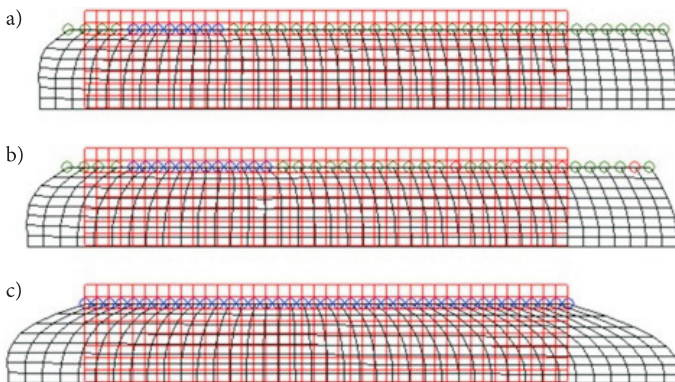
relaksacji lokalnej wymagały opracowania specjalnego programu, dzięki któremu zostały przeprowadzone badania wpływu zjawiska tarcia powierzchniowego na kształt pierścienia poddawanego ścisnaniu. Obliczenia polegały na wyznaczeniu odkształceń pierścienia w kolejnych pośrednich fazach, od stanu nieodkształconego do odkształconego, odpowiadającego pewnej zadanej maksymalnej wartości strzałki ugięcia górnej połowy pierścienia. W obliczeniach dla kolejnych ugięć przyjmowano przyrost ugięcia $\Delta f = 0,1$ mm.

Obliczeniom poddano pierścień wykonany z twardej gumy, której właściwości mechaniczne opisano energetycznym modelem w postaci funkcji gęstości energii odkształcenia (1) o następujących wartościach stałych materiałowych:

$$C_1 = 1,92 \text{ MPa}, C_2 = 0,08 \text{ MPa}, K = 200 \text{ MPa},$$

przyjmując wartości współczynników tarcia spoczynkowego: $\mu = 0,3$, $\mu = 0,6$ oraz $\mu = \infty$, przy czym wartość ostatniego współczynnika oznacza symbolicznie pierścień, którego górna i dolna powierzchnia jest trwale zamocowana do sztywnej płyty. W tym przypadku przyjęto, że węzły elementów skończonych pierścienia stykających się z płytą są z nią trwale połączone, przez co mają zablokowaną możliwość przemieszczania się w kierunku poprzecznym do osi pierścienia. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu, poniżej zostaną przedstawione tylko wyniki otrzymane dla strzałki ugięcia pierścienia równej $f = 1,5$ mm.

Pierwszym i najbardziej widocznym wpływem zjawiska tarcia powierzchniowego są uzyskiwane różne końcowe kształty pierścieni, które zależą od przyjętych w obliczeniach wartości współczynników tarcia pomiędzy nimi a płytą ściskającą. Uzyskane końcowe kształty pierścieni przedstawiono na rysunku 4. Dla lepszego zobrazowania wyników obliczeń odkształceń pierścienia, na rysunku kolorem czerwonym zaznaczono kształt pierścienia nieodkształconego, natomiast kolorem



Rys. 4. Odształcenie pierścienia dla strzałki ugięcia równej $f = 1,5$ mm i przyjętych w obliczeniach wartości współczynników tarcia: a) $\mu = 0,3$; b) $\mu = 0,6$; c) $\mu = \infty$

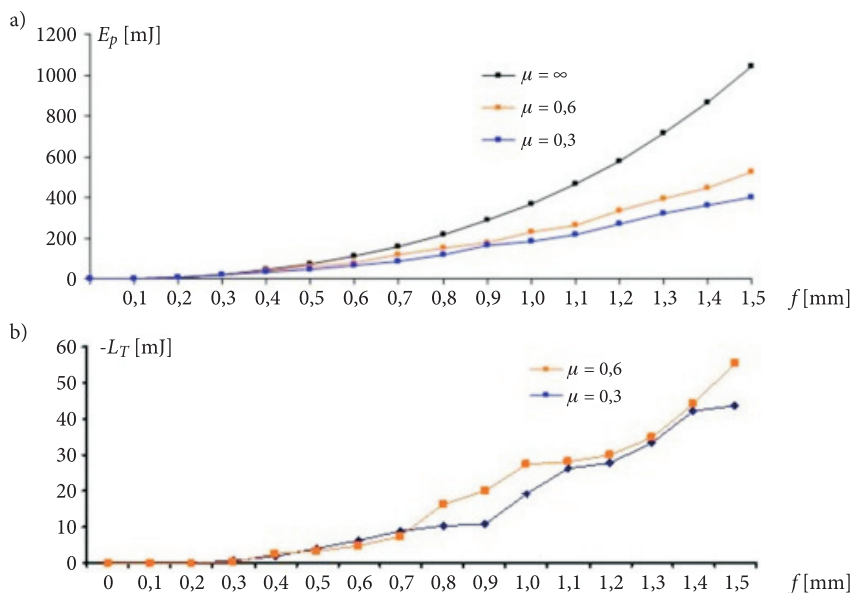
czarnym kształt pierścienia odkształconego. Wokół węzłów warstwy powierzchniowej stykającej się z płytą, narysowano okręgi, których kolor obrazuje stan poszczególnych węzłów. Kolor niebieski oznacza, że dany węzeł nie przesunął się. Kolor czerwony oznacza, że siła styczna do powierzchni pierścienia zewnętrznej siły działającej na węzeł, spowodowana ciernym kontaktem z płytą, jest większa od wartości granicznej siły tarcia, więc następuje przesuwanie się węzła. Kolor zielony oznacza, że nastąpiło przesunięcie węzła, ale z powodu zmniejszenia się wartości siły stycznej, działającej na węzeł, lub wzrostu wartości granicznej siły tarcia, nastąpiło ponowne jego utwierdzenie.

Analizując odkształcenia pierścieni przedstawionych na rysunku 4, można zauważyć, że w obu przypadkach, w których w obliczeniach uwzględniano zjawisko tarcia powierzchniowego, nastąpiło przemieszczenie się, a następnie ponowne utwierdzenie kilkunastu węzłów w płaszczyźnie styku płyta–pierścień. W większości zjawisko to wystąpiło z prawej strony rysunku, czyli bliżej zewnętrznej powierzchni swobodnej pierścienia. Różnice w ilości przemieszczonych węzłów na korzyść strony zewnętrznej są spowodowane tym, iż zmiana położenia materiału pierścienia w tym kierunku nie jest ograniczona dostępną wolną przestrzenią i w konsekwencji zmiany objętości materiału są niewielkie, co powoduje, że siły docisku materiału do powierzchni trącej są mniejsze. Stąd wartości granicznych sił tarcia są również mniejsze. Ostatecznie mechanizm ten powoduje, że znacznie więcej fragmentów powierzchni pierścienia stykającej się z płytą ulega przemieszczeniu w jego części znajdującej się bliżej zewnętrznej powierzchni swobodnej.

Z rysunku 4 widać również, że wielkość przemieszczeń w płaszczyźnie symetrii jest znacznie większa niż w przypadku płaszczyzny styku płyta–pierścień. Dzięki temu kształty pierścieni są wypukłe. Należy zwrócić szczególną uwagę, że największą wypukłość uzyskał pierścień, którego węzły w płaszczyźnie styku płyta–pierścień są utwierdzone. Wniosek, jaki można wyciągnąć po przeprowadzonej analizie przemieszczeń węzłów, jest taki, iż zjawisko tarcia jak i wartość współczynnika tarcia przyjętego w obliczeniach wpływa na uzyskiwane ostateczne kształty pierścieni.

W zależności od wartości współczynnika tarcia μ zmienia się również wartość energii potencjalnej odkształcenia pierścienia, praca sił tarcia, praca sił obciążających pierścień oraz średnia wartość siły obciążającej pierścień. Charakter i wielkość zmian energii potencjalnej odkształcenia pierścienia przedstawiają wykresy na rysunku 5a, natomiast pracy sił tarcia wykresy na rysunku 5b.

Na podstawie wykresów przedstawionych na rysunku 5a i 5b można stwierdzić, że zarówno energia potencjalna odkształcenia pierścienia jak i praca sił tarcia są nieliniowymi funkcjami ugięcia pierścienia. Funkcje te mają charakter progresywny, tzn. intensywność ich wzrostu zwiększa się ze wzrostem strzałki ugięcia pierścienia. Wartość współczynnika tarcia wpływa znacząco na wartość energii potencjalnej odkształcenia pierścienia, co wynika z porównania wykresów z rysunku 5a. Najmniejsza wartość energii występuje w pierścieniu, do obliczeń którego

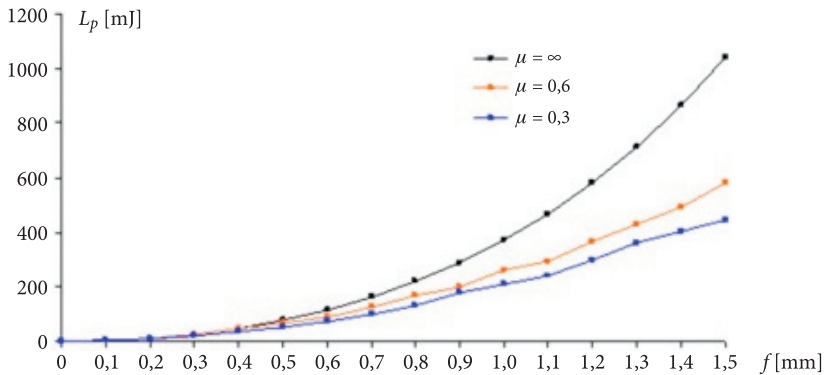


Rys. 5. Zmiany w zależności od ugięcia dla różnych wartości współczynników tarcia: a) energii potencjalnej odkształcenia pierścienia; b) pracy sił tarcia

przyjęto współczynnik tarcia o wartości $\mu = 0,3$ (wykres koloru niebieskiego). Wartość energii potencjalnej w tym pierścieniu jest prawie o połowę mniejsza niż w pierścieniu, w którym węzły w płaszczyźnie styku płyta-pierścień są utwierdzone (wykres koloru czarnego). Różnica ta zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości współczynnika tarcia μ przyjmowanego do obliczeń.

Na rysunku 5b zostały umieszczone wykresy pracy sił tarcia. Jak widać, wszystkie mają wartość ujemną. Siły tarcia mają zawsze zwroty przeciwne do wektorów przemieszczenia węzłów w płaszczyźnie tarcia, bowiem przeciwdziałają ruchowi węzłów względem płyty, stąd wartość pracy powierzchniowych sił tarcia jest ujemna. Wykresy przedstawione na rysunku 5b wyraźnie pokazują, że wartości pracy sił tarcia są prawie identyczne i nie zależą od wartości współczynników tarcia przyjętych w obliczeniach.

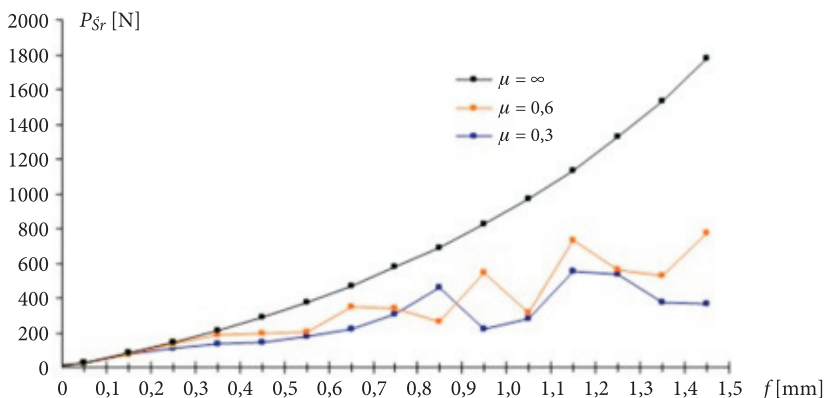
Praca zewnętrznych sił czynnych obciążających pierścieni powoduje zmianę energii potencjalnej odkształcenia pierścienia oraz jest w części wykorzystywana na pokonanie tarcia pomiędzy powierzchniami styku płyt i pierścienia. Na rysunku 6 przedstawiono wykresy pracy sił obciążających pierścieni, która zgodnie ze wzorem (9) jest różnicą energii potencjalnej odkształcenia pierścienia E_p (pracy sił wewnętrznych) i pracy sił tarcia L_T . Dokonując porównania z wykresami energii potencjalnej odkształcenia pierścienia E_p zamieszczonymi na rysunku 5a, zauważyć można, że wykresy pracy sił obciążających L_p mają podobny przebieg. Różnica pomiędzy nimi polega na tym, że wykresy pracy sił obciążających pierścieni, w obliczeniach



Rys. 6. Praca sił obciążających pierścieni w zależności od ugięcia dla różnych wartości współczynników tarcia

których uwzględniamy zjawisko tarcia powierzchniowego, na rysunku 6 są położone bliżej wykresu czarnego przedstawiającego pracę sił obciążających pierścieni, którego węzły w płaszczyźnie styku płyta–pierścień są utwierdzone. Jak już wcześniej wspomniano, praca sił obciążających L_p jest różnicą pracy sił wewnętrznych E_p i pracy sił tarcia L_T . Jak widać z rysunku 5b, wszystkie prezentowane wartości L_T mają znak ujemny. Wynika więc stąd, że wartość prac sił czynnych obciążających pierścieni L_p przedstawianych na rysunku 6 jest równa sumie energii potencjalnej odkształcenia pierścienia E_p oraz energii rozproszonej $-L_T$ w wyniku działania sił biernych spowodowanych zjawiskiem tarcia powierzchniowego.

Dysponując wykresami energii potencjalnej odkształcenia pierścienia E_p oraz pracy sił tarcia L_T , dla założonej wartości przyrostu strzałki ugięcia Δf , korzystając ze wzoru (11), można wyznaczyć średnią wartość siły obciążającej pierścieni P_{sr} ,



Rys. 7. Zmiany średniej wartości siły obciążającej pierścieni w zależności od ugięcia dla różnych wartości współczynników tarcia

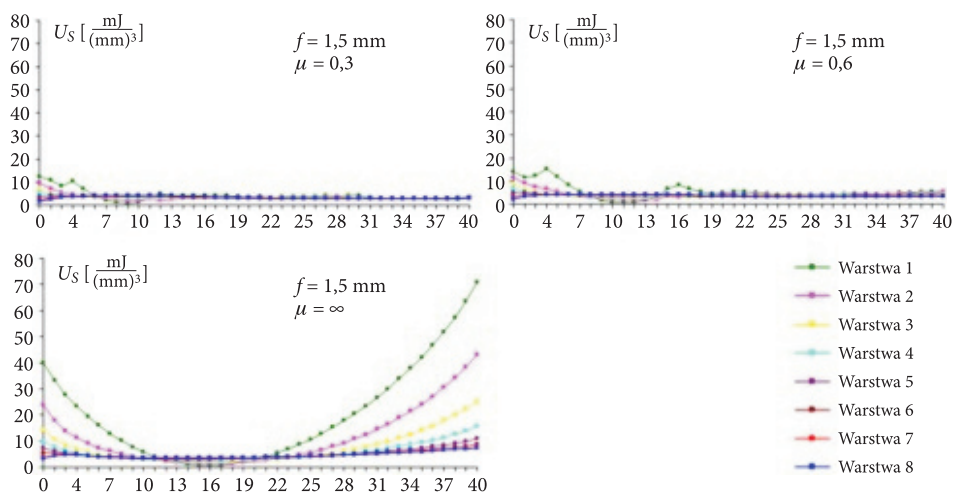
której zmiany w zależności od wartości ugięcia i współczynnika tarcia przyjętego w obliczeniach przedstawiono na rysunku 7.

Z rysunku wynika, że jedynie dla pierścienia, którego węzły są połączone trwale z płytą ściskającą, wykres średnich sił ściskających pierścieni w zależności od ugięcia jest monotoniczny. Pozostałe dwa wykresy, przedstawiające zmianę wartości średniej siły obciążającej pierścieni w zależności od ugięcia dla przyjętego współczynnika tarcia, nie są monotoniczne. Oznacza to, że proces odkształcania pierścienia nie ma charakteru ciągłego i ze zmianą ugięcia pierścienia przyrosty wartości średniej siły obciążającej nie są regularne. Wskutek występowania zjawiska tarcia powierzchniowego sztywność pierścienia zmienia się skokowo w zależności od stosunku obszarów powierzchni zablokowanych do przemieszczających się i podlegających tarcu w płaszczyźnie styku płyta–pierścień, co powoduje żywiolowy przebieg tarcia powierzchniowego i brak jego ciągłości.

Z wykresów na rysunku 7 widać również wyraźnie, że im mniejsza wartość współczynnika tarcia μ , tym mniejsza wartość średniej siły obciążającej pierścieni. Zjawisko to można wytłumaczyć w następujący sposób. Podczas ściskania pierścienia powstają siły przeciwdziałające odkształceniu pierścienia. Istotną część tych sił tworzą opory tarcia pomiędzy płytami ściskającymi a pierścieniem. Należy pamiętać, że ze względu na symetrię pierścienia względem płaszczyzny, modelowana jest tylko jego górna połowa. Analizując wyniki, trzeba brać pod uwagę, iż opory spowodowane tarcem występują w dwóch płaszczyznach styku pierścienia z płytami ściskającymi. Mała wartość współczynnika tarcia pomiędzy powierzchniami pierścienia a płytami ściskającymi powoduje, że do pokonania oporów tarcia jest potrzebna znacznie mniejsza siła. Zwiększający się współczynnik tarcia powoduje zwiększenie oporów tarcia. Jeżeli założono ten sam przyrost ugięcia $\Delta f = 0,1$ mm, a różne współczynniki tarcia, to do pokonania większych oporów sił tarcia, dla uzyskania tej samej wartości ugięcia, musi zostać użyta większa siła.

Zastosowana oryginalna metoda energetyczna umożliwia również analizę wpływu wielkości współczynnika tarcia na zmiany energii, jakie zachodzą w trakcie deformacji badanego obiektu w poszczególnych elementach skończonych, w zależności od ich położenia w badanym obiekcie. W tym momencie należy przypomnieć, że ważnym założeniem metody badań nad materiałami hiperelastycznymi, do których należy guma, było przyjęcie, że ulegają one pewnej małej ściśliwości, która w istotny sposób wpływa na ostateczne wyniki przeprowadzanych obliczeń. Mooney konstruując po raz pierwszy funkcję gęstości energii odkształcenia opisującą mechaniczne właściwości materiałów kauczukopodobnych, zakładał, że guma jest materiałem idealnie nieściśliwym. Współcześnie autorzy modelujący materiały kauczukopodobne zakładają, że są one w niewielkim stopniu ściśliwe. Dwa pierwsze składniki zmodyfikowanego energetycznego modelu Mooneya (1) zaproponowanego w pracy [8] reprezentują energię odkształcenia postaciowego U_S , natomiast ostatni człon opisuje energię odkształcenia czysto objętościowego U_V .

Na początku zostanie przeanalizowany wpływ wielkości współczynnika tarcia na zmiany energii odkształcenia postaciowego U_S , której wykresy zostały umieszczone na rysunku 8.



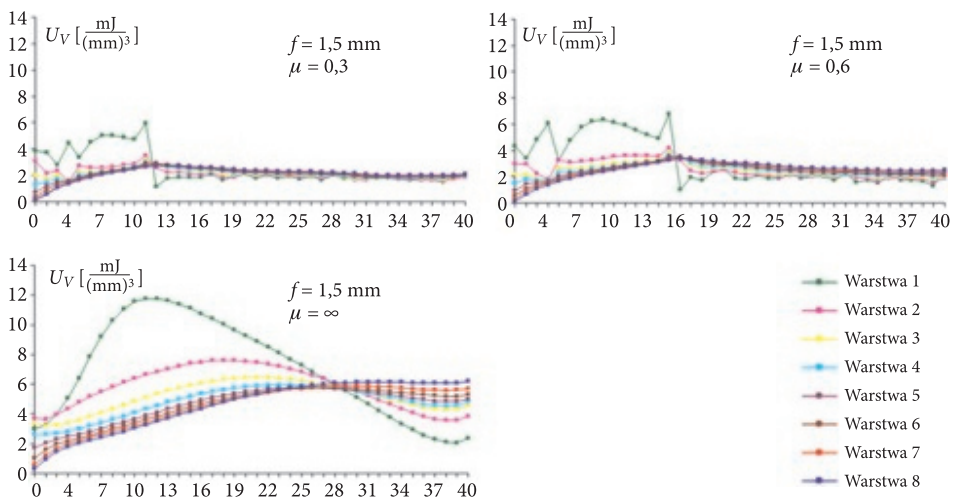
Rys. 8. Rozkład energii właściwej postaciowego odkształcenia pierścienia dla ugięcia $f = 1,5 \text{ mm}$ i różnych wartości współczynników tarcia

Oś pozioma wykresów wskazuje numer elementu skończonego, dla którego wyznaczono wartość energii właściwej oznaczanej na osi pionowej. Numeracja zaczyna się od skrajnego wewnętrznego elementu, a kończy się na skrajnym, zewnętrznym elemencie. Każdy z nich jest również przyporządkowany danej warstwie pierścienia. „Warstwa 1” jest warstwą, której górna płaszczyzna styka się z płytą ściskającą, „Warstwa 8” jest warstwą, której dolna płaszczyzna stanowi płaszczyznę symetrii pierścienia.

Porównując wykresy umieszczone na rysunku 8 można stwierdzić, że wykresy energii dla pierścieni, w obliczeniach których uwzględniono zjawisko tarcia powierzchniowego są podobne do siebie, ale różnią się znacząco od wykresu wartości energii dla pierścienia, w obliczeniach którego nie uwzględniono tego zjawiska. Główna różnica polega na wielkościach uzyskiwanych energii, szczególnie w elementach znajdujących się bliżej krawędzi zarówno wewnętrznej jak i zewnętrznej pierścienia. W obu wypadkach dla pierścieni, w których była możliwość przemieszczania się węzłów w płaszczyźnie styku pierścien-płyta, wartość energii odkształcenia postaciowego jest większa bliżej wewnętrznej krawędzi pierścienia, a mniejsza na jego zewnętrznej krawędzi. Przyczyną takich zmian energii właściwej odkształcenia jest to, że do wewnątrz pierścienia przemieściło się znacznie mniej węzłów niż na zewnątrz pierścieni. Siły docisku działające na elementy położone bliżej wewnętrznej krawędzi są znacznie większe niż te działające na elementy

usytuowane bliżej zewnętrznej, swobodnej strony pierścienia, stąd wartości granicznych sił tarcia bliżej jego wnętrza są również większe. Opory tarcia wpływają na wielkość deformacji postaciowej elementów skończonych, od której zależy wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego. Przemierzając się w kierunku na zewnątrz pierścienia, zmniejsza się ich deformacja i energia U_S . Taki sam mechanizm działa również, gdy w obliczeniach pierścienia nie uwzględniono zjawiska tarcia powierzchniowego. W tym wypadku do wewnątrz pierścienia przemieściło się mniej węzłów niż na zewnątrz, co dotyczy płaszczyzny symetrii pierścienia. Zablokowanie możliwości przemieszczania się węzłów w płaszczyźnie styku płyta-pierścień powoduje większe deformacje kształtów elementów skończonych na zewnętrznej krawędzi pierścienia, czego obrazem są uzyskane na wykresie większe wartości energii postaciowej U_S . Analizując wykresy z rysunku 8 trzeba również zwrócić szczególnie uwagę na fakt, iż we wszystkich trzech rozważanych przypadkach dla elementów skończonych położonych bliżej środka analizowanego przekroju, w warstwach znajdujących się bliżej płaszczyzny styku, wartości energii odkształcenia postaciowego osiągają wartości bliskie zero, co oznacza, że nie zmieniły swego pierwotnego kształtu. Jednak właśnie to te elementy skończone uzyskują za to największe wartości energii odkształcenia objętościowego U_V , co można zobaczyć na wykresach umieszczonych na rysunku 9.

Porównując wykresy z rysunku 9 z wykresami z rysunku 8 można stwierdzić, że są one odwrotne. We wszystkich trzech rozważanych przypadkach elementy skończone, których energia odkształcenia postaciowego była bliska zero, posiadają największe wartości energii odkształcenia objętościowego. Zjawisko to wytłumaczyć

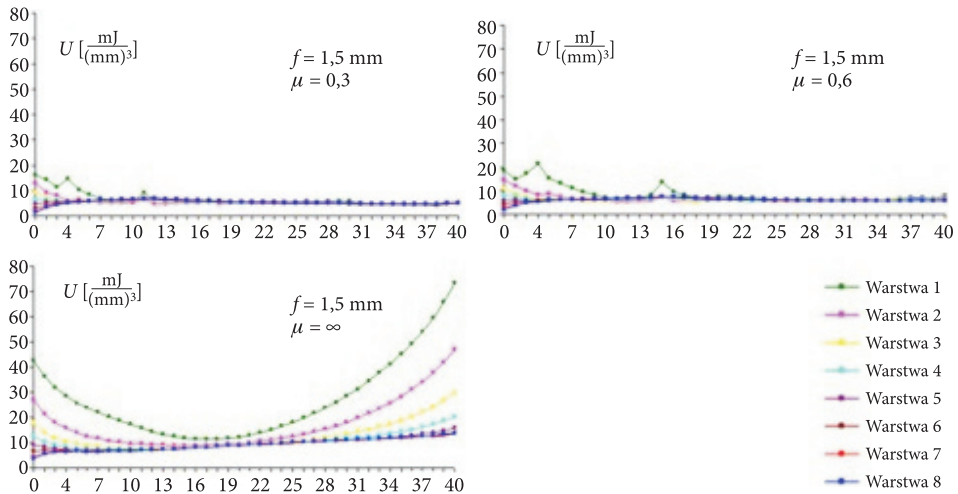


Rys. 9. Rozkład energii właściwej odkształcenia objętościowego pierścienia dla ugięcia $f = 1,5$ mm i różnych wartości współczynników tarcia

można w ten sposób, iż elementy skończone znajdujące się bliżej krawędzi pierścienia, pod wpływem zwiększanego ugięcia i spowodowanym tym „wypływaniem” materiału pierścienia, bardziej zmieniają swój pierwotny kształt, nie zmieniając jednak w tak dużym stopniu swej pierwotnej objętości początkowej. Przeciwnie zachowują się, elementy skończone znajdujące się bliżej środka modelowanej połowy pierścienia. Elementy te są otoczone materiałem i ich węzły nie mają możliwości przemieszczenia się przez co zmiany pierwotnej postaci są prawie niezauważalne, co można zobaczyć, analizując kształty pierścieni na rysunku 4. Jednak brak możliwości zmiany postaci powoduje, że podlegają one większej zmianie objętości, przez co wzrasta w nich wartość energii odkształcenia objętościowego U_V , co pokazują wykresy na rysunku 9.

We wszystkich trzech przypadkach największe wartości energii odkształcenia objętościowego posiadają elementy skończone znajdujące się w „Warstwie 1”, czyli w warstwie znajdującej się bezpośrednio pod płytą ściskającą. Duży wpływ na wielkość U_V ma wartość współczynnika tarcia przyjętego do obliczeń. Największą energię odkształcenia objętościowego posiadają elementy skończone pierścienia, w obliczeniach którego nie uwzględniono zjawiska tarcia powierzchniowego, i jest ona co najmniej dwukrotnie większa niż w przypadku elementów pierścieni, w których węzły miały możliwość przemieszczania się. Główną przyczyną tych różnic jest właśnie brak możliwości wypływania materiału. Gdy w obliczeniach nie uwzględnia się zjawiska tarcia powierzchniowego, węzły elementów położonych bliżej powierzchni swobodnych pierścienia mają możliwość przemieszczania się, przez co powodują zmianę ich kształtu. Jednak im bliżej środka połowy badanego obiektu, przemieszczanie węzłów jest coraz bardziej utrudnione i tym większa zachodzi zmiana objętości elementu skończonego związana z jego większym ściskaniem. Jest to bardzo widoczne, porównując energię odkształcenia objętościowego dla elementów środkowych w „Warstwie 1” znajdującej się tuż pod płytą ściskającą i w „Warstwie 8”, której dolna płaszczyzna stanowi płaszczyznę symetrii pierścienia. W dolnej warstwie materiał ma możliwość wypływania na zewnątrz i do środka pierścienia. Węzły elementów górnej warstwy są trwale przymocowane do płyty ściskającej, przez co są pozbawione możliwości przemieszczania się. W ten sposób zmiany energii spowodowane wzrostem wartości strzałki ugięcia pierścienia nie mogą zostać skompensowane poprzez zmianę postaci elementu, tylko przez zmianę jego objętości, co powoduje wzrost energii odkształcenia objętościowego i łatwo jest zauważalne na wykresach umieszczonych na rysunku 9. Wpływ energii odkształcenia objętościowego na energię właściwą odkształcenia pierścienia można zobaczyć na wykresach umieszczonych na rysunku 10.

Jak widać, wykresy energii właściwej odkształcenia pierścienia są prawie identyczne jak wykresy energii odkształcenia postaciowego. Widoczną różnicą pomiędzy wykresami umieszczonymi na rysunku 10 i 8 są wartości energii, jakie zostały uzyskane dla środkowych elementów skończonych, szczególnie tych



Rys. 10. Rozkład energii właściwej odkształcenia pierścienia dla ugięcia $f = 1,5 \text{ mm}$ i różnych wartości współczynników tarcia

położonych w górnych warstwach pierścienia znajdujących się blisko płyty ścisniającej. W przypadku energii odkształcenia postaciowego te wartości są bliskie zeru, natomiast w przypadku całkowitej energii odkształcenia pierścienia są one powiększone o wartość energii odkształcenia objętościowego, co powoduje znaczący ich wzrost. Zjawisko to występuje we wszystkich trzech obliczanych pierścieniach, ale największy przyrost w stosunku do energii odkształcenia postaciowego występuje w elementach skończonych pierścienia, którego węzły w płaszczyźnie styku płyta-pierścień były pozbawione możliwości przemieszczania się.

6. Wnioski

Przedstawione w artykule wyniki badań pierścienia gumowego poddanego ścisnaniu wykazały, że zjawisko tarcia powierzchniowego ma duży wpływ na wielkość jego odkształcenia. Jest ono uzależnione od wartości współczynnika tarcia przyjętego do obliczeń.

Jednocześnie zachodzi zależność odwrotna. Jak bowiem wykazano w analizie przytoczonej w pracy, stan odkształcenia pierścienia ma istotny wpływ na kształtowanie procesu tarcia poprzez oddziaływanie na lokalną wartość granicznej siły tarcia.

Pomijanie tarcia pomiędzy płytą a pierścieniem nie daje miarodajnych wyników opisujących rzeczywiste zachowanie się pierścienia podczas ściskania. Od wartości współczynnika tarcia oraz granicznej wartości siły tarcia uzależnionej od lokalnego stanu odkształcenia fragmentu materiału podlegającego tarcia zależy, jak duży fragment pierścienia przemieści się, co powoduje zmiany energii wewnątrz pierścienia.

Wyniki potwierdzają również znaczący wpływ energii odkształcenia objętościowego na uzyskaną ostateczną wartość energii właściwej odkształcenia pierścienia. To pozwala stwierdzić, podobnie jak przy zjawisku tarcia powierzchniowego, że nieuwzględnianie energii odkształcenia objętościowego w obliczeniach, czyli brak modyfikacji funkcji Mooneya powoduje, że wyniki są obarczone dużym błędem. Należy jednak pamiętać, że dobór członu opisującego zmiany objętościowe jest uzależniony od właściwości materiału, a wybrany model powinien jak najwierniej odzwierciedlać rzeczywiste związki fizyczne zachodzące między naprężeniami i odkształceniami w trójosiowym stanie naprężenia.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2012 r.

LITERATURA

- [1] M. HEBDA, A. WACHAL, *Trybologia*, WNT, Warszawa, 1980.
- [2] T. WEGNER, A. PĘCZAK, *Implementation of a strain energy-based nonlinear finite element in the object-oriented environment*, 181, 3, Computer Physics Communications, Elsevier, 2010, 520-531.
- [3] T. WEGNER, M. KOKOT, *Influence of a surface friction on the deformation process of ring made of nonlinear properties material*, Journal of KONES Powertrain and Transport, 17, 1, 2010, 465-478.
- [4] T. WEGNER, *Energetyczne modelowanie w nieliniowej mechanice materiałów i konstrukcji*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2009.
- [5] T. WEGNER, M. KOKOT, *Wpływ zjawiska tarcia powierzchniowego na odkształcenia gumowego pierścienia*, Przegląd Mechaniczny, 5, 2008, 13-18.
- [6] T. WEGNER, A. PĘCZAK, *Metoda elementów skończonych modelowanych energetycznie*, Analizy numeryczne wybranych zagadnień mechaniki, roz. 3, w monografii pod red. nauk. Tadeusza Niezgody, Warszawa, 2007, 59-83.
- [7] T. WEGNER, *Zastosowanie metody relaksacji lokalnej do analizy zagadnień uwzględniających zjawisko tarcia powierzchniowego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, seria Mechanika, 47, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2000, 73-87.
- [8] T. WEGNER, *Energetyczna metoda modelowania i wyznaczania charakterystyk dynamicznych elementów mechanicznych o silnym tłumieniu*, Seria Rozprawy, 323, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1997.
- [9] T. WEGNER, K. MAGNUCKI, P. WASILEWICZ, *Compression of a ring to large deformations with dissipation of energy*, Archive of Applied Mechanics — Ingenieur-Archiv, 58, Springer-Verlag, 1988, 109-112.
- [10] T. WEGNER, K. MAGNUCKI, P. WASILEWICZ, *Finite deformation of nonlinearly elastic ring*, Rozprawy Inżynierskie, PAN IPPT, Warszawa, 1987, 695-704.
- [11] T. WEGNER, K. MAGNUCKI, P. WASILEWICZ, *Large axisymmetrical deformation of a compressed ring made of a incompressible nonlinear material*, Mathematical Methods in Engineering, The conference with Foreign Participation, Karlove Vary, 1986.

T. WEGNER, M. KOKOT

Analysis of distribution of strain energy including superficial friction phenomena in a ring made of material with hyperelastic properties

Abstract. The information technology development improved engineering calculations by global spread of finite element method FEM to simulate behaviour of machine elements, mechanical devices and physical phenomena. The main problem of using it in case of superficial friction phenomenon is that in most cases its main purpose is to calculate materials of linear properties. This phenomenon is especially important for calculations of hyperelastic materials which include rubber. Nowadays, it is widely used in technology. Friction directly influences on deformations of objects made from hyperelastic materials. Energy method has been used for materials' calculations by means of energy-based finite element of non-linear features, and iterative algorithm, named the local relaxation method. This paper presents the application of energy method for rubber ring deformations assignment including the superficial friction phenomena. Besides the observed deformations of examined element, there have been also presented the results of energy dissipation caused by friction forces work and the energy density distribution of volumetric and deviatoric strain in particular layers of the deformed ring.

Keywords: energy-based finite element, hyperelastic material, energy methods, surface friction

