



Znaczenie dyskretyzacji przestrzennej na przykładzie numerycznej analizy problemu perforacji płyt

ANDRZEJ MORKA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, amorka@wat.edu.pl

Streszczenie. Wiele zagadnień mechaniki analizowanych metodami numerycznymi, szczególnie z obszaru procesów szybkozmiennych, wykazuje dużą wrażliwość na gęstość dyskretyzacji przestrzennej. Fakt ten związany jest z występowaniem szeregu złożonych zjawisk fizycznych oraz czynników o charakterze numerycznym, jak np. erozja, czyli usuwanie z obliczeń zniszczonych elementów. Prezentowana praca, posługując się przykładem numerycznej analizy zagadnienia perforacji płyty przez wybrany pocisk, dostarcza narzędzia (metodyki) do oceny zbieżności rozwiązania numerycznego ze względu na zmiany dyskretyzacji przestrzennej problemu. Zadanie to zostało zrealizowane poprzez adaptację metody stosowanej przez NASA w analizach CFD (ang. *Computational Fluid Dynamics*) do problemu z zakresu mechaniki ciała stałego. W rezultacie możliwe jest uzyskanie ilościowego wyniku obciążonego określonym błędem niezależnego od siatki numerycznej. Ponadto dostępna jest informacja określająca rząd zbieżności rozwiązania, który może stanowić dodatkowy wskaźnik poprawności rezultatu.

Słowa kluczowe: mechanika komputerowa, MES, zbieżność rozwiązania, siatka numeryczna, perforacja/penetracja

1. Wprowadzenie

Wiarygodność rezultatów uzyskiwanych na drodze modelowania i symulacji komputerowej jest funkcją wielu czynników. W przeważającej większości przypadków stanowi konieczny kompromis między pożądanymi oczekiwaniami a dostępnymi zasobami obliczeniowymi sprzętowymi i oprogramowaniem. Każdy nowo powstały model numeryczny powinien podlegać procesowi walidacji, czyli oszacowaniu stopnia i zakresu jego zgodności z rzeczywistością. Proces ten może

zostać podzielony na kilka etapów: (1) analiza stabilności rozwiązania, (2) ocena zgodności z podstawowymi prawami natury, np. przeprowadzenie bilansu energetycznego, (3) ocena zbieżności rozwiązania i ostatecznie (4) porównanie z rezultatami badań eksperymentalnych i/lub rozważań teoretycznych. W przedstawianej pracy główny wysiłek skoncentrowano na punkcie trzecim dotyczącym oceny zbieżności rozwiązania. Najczęściej zawierany kompromisem jest ustalenie dostatecznie dokładnej, ale jednocześnie obliczeniowo efektywnej dyskretyzacji przestrzennej problemu. Wiele zagadnień, szczególnie z obszaru procesów szybkozmiennych, wykazuje dużą wrażliwość na gęstość dyskretyzacji przestrzennej. Fakt ten związany jest z występowaniem szeregu zjawisk fizycznych, w szczególności transportem istotnej części energii w ruchu falowym, występowaniem ekstremalnie dużych deformacji i prędkości odkształceń, możliwością pojawienia się zniszczeń. Zniszczenia materiału skutkujące koniecznością usuwania uszkodzonych fragmentów z obliczeń, tzw. erozja, pogłębiają jeszcze bardziej wrażliwość modelu na zmiany gęstości siatki numerycznej. Klasycznym przykładem problemów, które mieszczą się w tej grupie, są zagadnienia zderzeń prowadzące do perforacji/penetracji czy też opis ruchu fali uderzeniowej i jej oddziaływania na elementy konstrukcji. We wszystkich tych przypadkach konieczna jest ocena rozwiązania ze względu na przyjętą dokładność dyskretyzacji przestrzennej, w szczególności z określeniem stopnia zbieżności i oszacowaniem wartości asymptotycznej rozwiązania (przy nieskończeniu dużej gęstości siatki numerycznej).

W tym celu odpowiednie podstawy teoretyczne oraz metodyka postępowania zostały zaproponowane przez Roache w [1] i [2]. Oryginalnie stanowią one element procesu modelowania i symulacji stosowanego w NASA do oceny rezultatów analiz CFD. W prezentowanej pracy dokonano adaptacji tej metody do zagadnień z zakresu mechaniki ciała stałego. Punkt wyjścia stanowi równanie (1) opisujące błąd E między rozwiązaniem numerycznym $f(h)$ uzyskanym na siatce o umownym wymiarze dyskretyzacji h oraz rozwiązaniem dokładnym f_d . Pozostałe parametry występujące w równaniu (1) oznaczają odpowiednio: C — stała, p — rząd zbieżności, R — wyrazy wyższego rzędu.

$$E = f(h) - f_d = Ch^p + R. \quad (1)$$

Przyjmując, że dysponujemy rozwiązaniem dla trzech siatek numerycznych o narastającej gęstości dyskretyzacji: f_3, f_2, f_1 , gdzie $f_i = f(h_i)$ oraz $\frac{h_3}{h_2} = \frac{h_2}{h_1} = r$, można określić rząd zbieżności postępując się równaniem:

$$p = \ln \left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1} \right) / \ln r. \quad (2)$$

Następnie wykorzystując technikę ekstrapolacji Richardsona, wartość asymptotyczna rozwiązania o dokładności rzędu $p + 1$ wyraża się formułą:

$$f_{h=0} \cong f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r^p - 1}. \quad (3)$$

Ilościową (procentową) miarę błędu rozwiązania asymptotycznego określa tzw. indeks zbieżności siatki (ang. *Grid Convergence Index* — GCI) definiowany następująco:

$$GCI_{12} = \frac{F_s |\varepsilon|}{r^p - 1}, \quad (4)$$

gdzie $F_s = 1,25$ oznacza współczynnik bezpieczeństwa oraz

$$\varepsilon = \frac{f_2 - f_1}{f_1}. \quad (5)$$

Ostatnim parametrem służącym do analizy wrażliwości modelu na zmiany dyskretyzacji przestrzennej jest tzw. indeks asymptotycznego zakresu zbieżności:

$$r_a = \frac{GCI_{23}}{r^p GCI_{12}}. \quad (6)$$

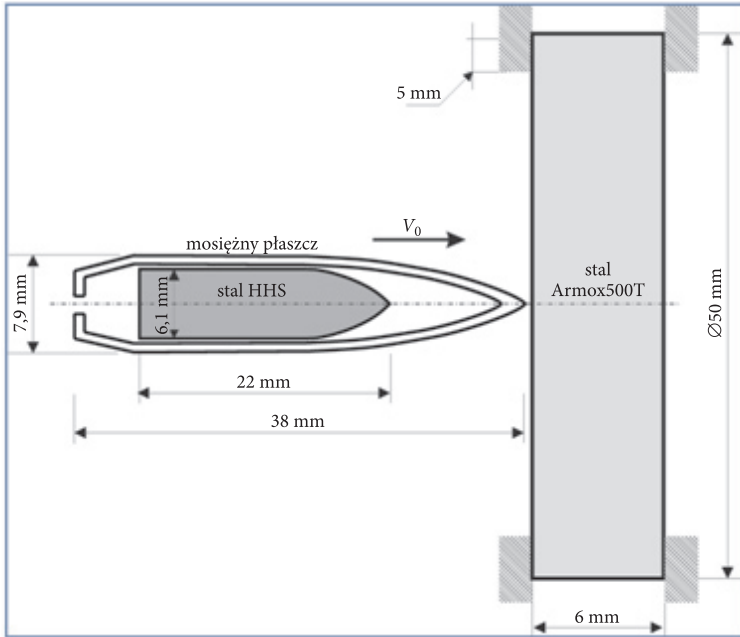
Parametr ten jest wykorzystywany do oceny, czy wybrany ciąg trzech gęstości siatek numerycznych znajduje się w zakresie asymptotycznej zbieżności (wartość bliska 1), w przeciwnym wypadku należy dokonać innego doboru siatek, ponieważ prezentowana procedura wymaga spełnienia tego warunku.

2. Sformułowanie problemu

Analizę zbieżności rozwiązania numerycznego ze względu na dyskretyzację przestrzenną przeprowadzono na przykładzie problemu perforacji płytki pancernej wykonanej ze stali ArmoX500T przez pocisk przeciwpancerny $7,62 \times 54R$ B32. Schemat konfiguracji układu wraz z podstawowymi wymiarami został zamieszczony na rysunku 1. Do analizy przyjęto uderzenie prostopadłe w okrągłą płytkę o średnicy 50 i grubości 6 mm sztywnie podpartą na obwodzie pierścieniem o grubości 5 mm z obu stron.

Najważniejsze parametry dotyczące pocisku zbudowanego z płaszczka i rdzenia zawarto w tabeli 1. Ponadto ze względu na symetrię zastosowano osiowosymetryczne

sformułowanie problemu, co znacznie poprawiło efektywność obliczeniową przy realizacji głównego celu pracy.



Rys. 1. Schemat badanego problemu

TABELA 1

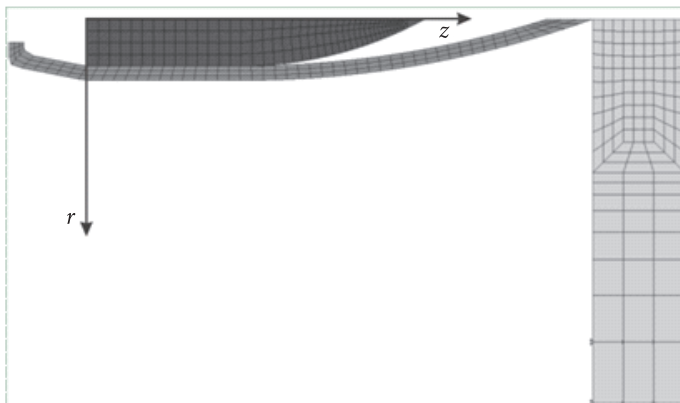
Podstawowe dane o pocisku 7,62 × 54R B32

Parametr	Płaszcz	Rdzeń	Pocisk
Materiał	mosiądz	stal HHS (> 63HRC)	–
Masa [g]	6	3,95	9,95
Energia kinetyczna [kJ]	2,2	1,4	3,6
Prędkość początkowa [m/s]	854		

3. Opis modelu numerycznego

Na podstawie przyjętych założeń zbudowano model numeryczny problemu, w skład którego wchodziły: (1) metoda rozwiązania numerycznego — metoda elementów skończonych z jawnym schematem całkowania równań ruchu (różnic centralnych) w opisie Lagrange’a zaimplementowana w systemie LS-DYNA [3], (2) dyskretyzacja przestrzenna elementów układu fizycznego, której koncepcja została przedstawiona na rysunku 2, (3) numeryczna realizacja warunków

początkowych i brzegowych (WPB), (4) modele konstytutywne wraz z danymi materiałów z uwzględnieniem możliwości powstawania zniszczeń/erozji.



Rys. 2. Koncepcja dyskretyzacji przestrzennej modelu

Zastosowano osiowosymetryczne elementy skończone o topologii czworościennej z jednym punktem całkowania. Wszystkie materiały (stal HHS i ArmoX500T oraz mosiądz) zostały opisane modelem konstytutywnym Johnsona-Cooka (JC) uzupełnionym o równanie stanu Gruneisena i model zniszczeń JC. Odpowiednie dane dla poszczególnych materiałów pozyskano z literatury [4, 5, 6, 7]. W skład WPB wchodziła prędkość początkowa pocisku, numeryczna realizacja podparcia tarczy jako kontakt z nieodkształcalną ścianką przy współczynniku tarcia 0,9 oraz opis wzajemnego oddziaływania elementów pocisku i tarczy realizowany jako kontakt typu kary, przy czym sztywność kontaktową skalowano względem masy. Model numeryczny został dopełniony poprzez zastosowanie pseudolepkości typu Richards-Wilkins do rozmywania frontów fal uderzeniowych oraz kontrolą *hourglass* o charakterze lepkościowym Flanagan-Belytschko z dokładnym całkowaniem objętości w celu minimalizacji tzw. modów deformacji o zerowej energii.

4. Analiza wyników

Zasadniczą analizę zbieżności rozwiązania zrealizowano z wykorzystaniem czterech siatek numerycznych, charakterystyczne parametry każdej z nich zostały zamieszczone w tabeli 2. Parametr podlegający ocenie stanowiła szczątkowa (po przebicciu) prędkość integralnej części rdzenia pocisku (*RVP*), która jest stosunkowo łatwo mierzalna eksperymentalnie, np. z wykorzystaniem ultraszybkich kamer lub bramek fotoelektrycznych. Jednocześnie stanowi ona dobrą miarę efektywności hamowania pocisku przez tarczę.

TABELA 2

Podstawowe informacje o badanych wariantach

Wariant	Liczba elm./dług. rdzenia pocisku	Max. liczba elm./ grub. tarczy	Całkowita liczba węzłów (pocisk/tarcza)
S7d	30	9	569 (421/148)
S8d	60	18	1923 (1363/560)
S9d	120	36	6964 (4825/2139)
S10d	240	72	26453 (18169/8284)

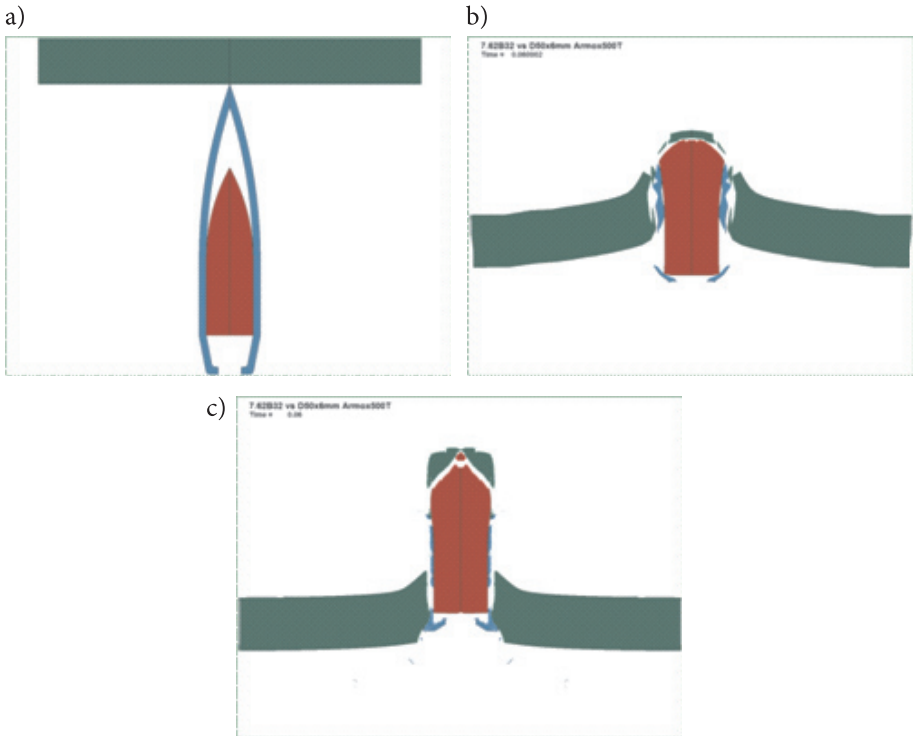
Układ czterech siatek numerycznych pozwala na zbudowanie dwóch ciągów rozwiązań dla siatek o narastającej gęstości zgodnie z procedurą opisaną wcześniej $A(S7d, S8d, S9d)$ oraz $B(S8d, S9d, S10d)$. Po wykonaniu niezbędnych obliczeń podsumowanie osiągniętych rezultatów zaprezentowano w tabeli 3. Wartość asymptotyczną RVP_a określano na podstawie formuły (3). Niewymieniany wcześniej parametr Δs może być rozumiany jako pewna miara gęstości siatki numerycznej, np. charakterystyczna wielkość elementu skończonego lub liczba elementów przypadająca na długość rdzenia pocisku, wartość oznaczona gwiazdką dotyczy najgęstszej siatki. Analiza uzyskanych wyników sugeruje, że ciąg siatek A nie znajduje się w zakresie zbieżności asymptotycznej, wartość indeksu $r_a = 1,421$, w związku z tym nie jest możliwe przeprowadzenie oceny zbieżności zgodnie z zaproponowaną koncepcją. Ponadto otrzymane wartości RVP są dość przypadkowe, dla S7d i S8d mamy poniżej 300 m/s, natomiast S9d dostarcza RVP na poziomie 415 m/s. Ponadto skutkuje to bardzo dużą różnicą wartości RVP_a oraz RVP dla wariantu S9d. Ciąg B z wartością $r_a = 1,092$ wykazuje cechy poprawności, czyli właściwie dobranych gęstości siatek. Ponadto rząd zbieżności równy 1,69 mieści się w typowo osiąganym zakresie dla większości metod numerycznych. Wartości p bliskie i mniejsze od zera lub większe od 3 zwykle są przejawem błędów w rozwiązywaniu (modelu) o naturze niezwiązanej z dyskretyzacją przestrzenną problemu. Ostatecznie uzyskano rozwiązanie asymptotyczne w odniesieniu do prędkości $RVP_a = 470$ m/s z błędem o wartości 5%. Dodatkowo na rysunku 3 przedstawiono obraz końcowej deformacji pocisku i tarczy dla dwóch siatek o skrajnych gęstościach. Występujące różnice są zasadnicze w stosunku do RVP oraz przebiegu procesu deformacji/erozji tarczy i pocisku.

Określenie wartości asymptotycznych nie oznacza automatycznie zgodności rozwiązania z rzeczywistością, ale stanowi jedynie rozwiązanie numeryczne zadanego problemu niezależne od dyskretyzacji przestrzennej przy zachowaniu $p+1$ rzędu dokładności. W celu dopełnienia walidacji należy przeprowadzić wszystkie jej cztery etapy wspomniane na wstępie.

TABELA 3

Rezultaty oceny zbieżności rozwiązania ze względu na gęstość siatki numerycznej, h — unormowana gęstość siatki num., RVP — prędkość szczytkowa integralnej części pocisku (rdzenia), RVP_a — wartość asymptotyczna RVP dla $h \rightarrow 0$, GCI — indeks zbieżności siatki num., r_a — indeks zakresu asymptotycznej zbieżności, p — rząd zbieżności, dolne indeksy „c” oraz „f” przy oznaczeniu parametru h dotyczą odpowiednio siatki rzadszej oraz gęstszej w ciągu siatek A(S7d, S8d, S9d) i B(S8d, S9d, S10d)

Wariant	$H = \Delta s / \Delta s^*$	$R = h_c / h_f$	RVP	RVP_a	GCI	r_a	p
	[]	[]	[m/s]	[m/s]	[%]	[]	[]
S7d	8	–	239	–	–	–	–
S8d	4	2	292	–	–40	–	–
S9d	2	2	415	199	–65	1,421	–1,21
S10d	1	2	453	470	5	1,092	1,69



Rys. 3. Obraz deformacji pocisku i tarczy po upływie 60 μs od momentu uderzenia: (a) stan początkowy; (b) wariant S7d; (c) wariant S10d

5. Wnioski

Prezentowana praca posługując się przykładem numerycznej analizy zagadnienia perforacji płyty przez wybrany pocisk dostarcza narzędzia (metodyki) do oceny zbieżności rozwiązania numerycznego ze względu na zmiany dyskretyzacji przestrzennej problemu. Do najważniejszych wniosków należą:

- 1) zakończona sukcesem adaptacja metody stosowanej uprzednio w analizach CFD do problemu z zakresu mechaniki ciała stałego,
- 2) uzyskanie rozwiązania obarczonego określonym błędem (GCI) niezależnego od siatki numerycznej,
- 3) pozyskanie dodatkowego parametru (rzęd zbieżności) jako wskaźnika poprawności rozwiązania.

Praca została wykonana w ramach projektu Nr O R00 0056 07, finansowanego przez MNiSW/NCBiR.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano we wrześniu 2012 r.

LITERATURA

- [1] P.J. ROACHE, *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Albuquerque, Hermosa Publishers, 1998.
- [2] Examining Spatial (Grid) Convergence, [online] [Zacytowano: 17 Jul 2008.] <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/tutorial/spatconv.html>.
- [3] M. NILSSON, *Constitutive model for ArmoX 500T and ArmoX 600T at low and medium strain rates*, s. l. Swedish Defence Research Agency, 2003, TR FOI-R-1068-SE.
- [4] N.S. BRAR, N.S. SIMHA, C. HARI MANOJ, *Material model for high-hard steel and ballistic penetration simulations*, [ed.] Karl P. Staudhammer, Lawrence Eugene, Murr and Marc A. Meyers, *Fundamental Issues and Applications of Shock-Wave and High-Strain-Rate Phenomena*, s. l. Elsevier Science and Technology Books, 2001, 64.
- [5] J.W. KURY, R.D. BREITHAUP, M. CRAIG TARVER, *Detonation waves in trinitrotoluene. Shock Waves*, 9, 1999, 227-237.
- [6] LS-DYNA Keyword User's Manual Version 971/Rev 5. Livermore, CA USA, Livermore Software Technology Corporation (LSTC), May 2010.
- [7] B. ADAMS, *Simulation of ballistic impacts on armored civil vehicles*, Master Thesis, Eindhoven, Eindhoven University of Technology, 2003.

A. MOROKA

Importance of spatial discretization on an example of numerical analysis of plate perforation problem

Abstract. Many of mechanic issues analyzed by numerical methods, especially in the area of fast-changing processes, are highly sensitive to the density of spatial discretization. This fact is related to the presence of a number of complex physical phenomena and factors such as numerical erosion that is removal of damaged parts of material from the calculation. The present work using the example of

a numerical analysis of the plate perforation by the selected projectile provides the tools (methodology) to assess the convergence of numerical solution due to changes in the spatial discretization of the problem. This task was carried out by adapting the method used by NASA in the CFD (Computational Fluid Dynamics) analysis to the problem of solid mechanics. Consequently, it is possible to obtain a quantitative mesh size independent result carrying the particular error. In addition, there is information indicating the convergence order of solutions, which can be an additional indicator of the result correctness.

Keywords: computational mechanics, FEM, convergent solution, numerical mesh, perforation/penetration

