



Metoda funkcji Cauchy w analizie częstości drgań kuli sprężystej

JERZY JAROSZEWICZ¹, KRZYSZTOF KAMIL ŻUR²

¹Politechnika Białostocka, Wydział Zarządzania,
16-001 Kleosin, ul. Ojca Tarasiuka 2, j.jaroszewicz@pb.edu.pl

²Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny,
15-351 Białystok, ul. Wiejska 45C, k.zur@pb.edu.pl

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę funkcji Cauchy do rozwiązania zagadnienia brzegowego drgań promieniowych jednorodnej kuli sprężystej. Uwzględniono liniową zależność naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia od promieniowej współrzędnej. Wyprowadzono analityczną postać szeregu charakterystycznego. Wykorzystując wzory i tablice Bernsteina-Kieropiana, obliczono częstości podstawowe i wyższe drgań promieniowych. Porównanie wyników obliczeń otrzymanych metodą funkcji wpływu z rozwiązaniem ścisłym potwierdza wysoką dokładność metody po uwzględnieniu kilku pierwszych członów szeregu charakterystycznego.

Słowa kluczowe: drgania promieniowe, funkcja Cauchy, zagadnienie brzegowe

1. Wstęp

Przy projektowaniu elementów maszyn i konstrukcji nośnych, które mogą być zamodelowane kulą lub powłoką kulistą, obciążonych dynamicznie, wymagana jest znajomość odpowiednich charakterystyk dynamicznych, takich jak wartości i postacie własne.

W związku z tym konieczne jest rozwiązanie zagadnienia brzegowego drgań promieniowych kuli sprężystej. Zagadnienie to opisuje się zwyczajnymi równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach. Ścisłe rozwiązanie takich równań w ogólnym przypadku napotyka duże trudności i jest możliwe tylko w kilku szczególnych przypadkach, np. przy pomocy funkcji Bessela. Najczęściej do rozwiązania takich zagadnień stosuje się analityczne i przede wszystkim numeryczne metody

przybliżone (elementów i różnic skończonych, macierzy przeniesienia). Należy zauważyć, że jeśli stosuje się wyżej wymienione metody, problemem pozostaje ocena dokładności obliczonych charakterystyk bez znajomości wartości dokładnych.

Na uwagę zasługuje propozycja autorów zastosowania metody szeregów charakterystycznych i funkcji wpływu Cauchy [1, 4] w obliczeniu wartości ścisłych częstości drgań promieniowych kuli sprężystej. W pracach [2, 3] wykorzystano wyżej wymienioną metodę do rozwiązania zagadnienia brzegowego drgań giętych belki o dowolnej zmianie przekroju. Autorzy używają ważnej własności funkcji Cauchy, która polega na tym, że funkcja wpływu i jej kolejne pochodne względem parametru zawsze tworzą podstawowy układ rozwiązań zwyczajnego równania różniczkowego ze zmiennymi parametrami [4].

W niniejszej pracy, w wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego drgań promieniowych sprężystej kuli [8, 9], wyprowadzono szereg charakterystyczny w zamkniętej postaci.

2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Rozpatruje się swobodne drgania promieniowe sprężystej izotropowej kuli, uwzględniając fakt, że naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia zależą tylko od zmiennej promieniowej r ($0 \leq r \leq R$) i od czasu t . Zgodnie z prawem Hooke'a można zapisać równanie równowagi dynamicznej [6]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_\Theta)}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

gdzie:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) - 4\mu \frac{u}{r}, \quad (2)$$

$$\sigma_\phi = \sigma_\Theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r}, \quad (3)$$

gdzie: $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ — parametry Lamego;
 $\rho = \rho(r)$ — masa właściwa;
 $u = u(r, t)$ — promieniowe przemieszczenie.

Dokonując zmiany zmiennych przez podstawienie wyrażenia:

$$V(r, t) = r^2 u(r, t), \quad (4)$$

otrzymano następujące zależności:

$$\sigma_r = f(r)V' - 4\mu r^{-3}V, \quad (5)$$

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = \lambda r^{-2}V' + 2\mu r^{-3}V, \quad (6)$$

$$f(r) = (\lambda + 2\mu)r^{-2}; \quad V' = \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (7)$$

Z równania (1), uwzględniając wyrażenia (2-7), otrzymano:

$$\frac{\partial(f(r)V')}{\partial r} - 4\mu'Vr^{-3} = \rho \frac{\partial^2(Vr^{-2})}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Równanie (8) opisuje również drgania swobodne niejednorodnej kuli, której parametry zależą tylko od zmiennej r .

Spotyka się dwa rodzaje warunków brzegowych:

— dla pełnej kuli:

$$U(0,t) < \infty, \quad \sigma_r(R,t) = 0, \quad (9)$$

— dla powłoki kulistej:

$$\sigma_r(a,t) = 0, \quad \sigma_r(R,t) = 0, \quad (10)$$

gdzie: a — promień wewnętrzny kuli ($0 < a < R$).

Rozdzielając zmienne w równaniu wyjściowym (8) i warunkach brzegowych (9) przez podstawienie wyrażenia:

$$V(r) = y(r)e^{\sqrt{-1}\omega t}, \quad (11)$$

otrzymujemy zagadnienie brzegowe opisane równaniami:

$$(fy')' + V(r)y = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} y(r)r^{-2} < \infty, \quad (fy' + ey)|_{r=R} = 0. \quad (13)$$

W równaniu (12), (13) uwzględniono wyrażenia:

$$V(r) = \omega^2 \rho(r)r^{-2} - 4\mu'(r)r^{-3}, \quad (14)$$

$$e = -4\mu(R)R^{-3}. \quad (15)$$

3. Równania charakterystyczne

Rozpatrujemy przypadek, gdy parametry Lamego są stałe ($\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \rho = \rho_0 g(r)$).

Przyjmujemy ograniczone rozwiązanie równania (12) w postaci szeregu [2, 3]:

$$y = y_0 - A^2 y_1 + A^4 y_2 - \dots, \quad (16)$$

gdzie:

$$A^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\lambda_0 + 2\mu_0} \quad (17)$$

oraz na podstawie prac [4, 7]:

$$y = \int_0^r K_0(r, t) \frac{g(t)}{t^2} y_{k-1}(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

$$K_0(r, \alpha) = \frac{r^3 - \alpha^3}{3}, \quad y_0 = \frac{r^3}{3}. \quad (19)$$

W przypadku jednorodnej kuli, gdy $g(r) \equiv 1$, otrzymano:

$$y = \frac{r^3}{3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A^{2j} r^{2j} c_j, \quad (20)$$

gdzie:

$$c_0 = 1, \quad c_j = c_{j-1} \frac{1}{2j(2j+3)} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Łatwo jest udowodnić, że powyższe rozwiązanie zadowala pierwszy spośród warunków (13). Uwzględniając znane zależności [5]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (22)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (23)$$

gdzie jest współczynnikiem Poissona, znajdujemy następujące wyrażenia:

$$\lambda + 2\mu = E\phi(\nu), \quad (24)$$

$$\phi(\nu) = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (25)$$

Podstawiając szereg (20) do drugiego warunku (13), otrzymano następującą postać równania częstości:

$$a_0 - a_1\Omega^2 + a_2\Omega^4 - \dots = 0, \quad (26)$$

gdzie:

$$a_i = \frac{i+1}{(2i+3)!} [2i+1 - \nu(2i-1)] \quad (i=0,1,2) \quad (27)$$

oraz

$$\Omega^2 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{E(1+\nu)q(\nu)}, \quad (28)$$

$$q(\nu) = \frac{1-2\nu}{1-\nu}. \quad (29)$$

Każdemu rozwiązaniu równania (26) $\Omega_j^2(\nu)$ odpowiada częstość własna ω_j^2 , którą wyznaczamy z następującego wyrażenia:

$$\omega_j^2 = \Omega_j^2(\nu)(1+\nu)q(\nu)\frac{E}{\rho R^2} \quad (j=1,2,\dots). \quad (30)$$

4. Wyniki obliczeń częstości drgań promieniowych kuli sprężystej

W celu wyznaczania estymatora częstości podstawowej ω_0^2 wystarczy wykorzystać wzór (30) i najprostszy dolny (31) i górny (32) estymator Bernsteina [1]:

$$\gamma_-^2 = \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 - 2a_0a_2}}, \quad (31)$$

$$\gamma_+^2 = \frac{2a_0}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}. \quad (32)$$

Obliczenia pokazały, że najprostszy estymator dolny różni się od wartości dokładnych o 2-2,5%. Rezultaty obliczeń przedstawiono w tabeli 1. Należy zauważyć, że w przypadku kuli najprostszy estymator górny nie istnieje dla parametru $\nu > 0,246$, dlatego że $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$.

TABELA 1

Wyniki obliczeń częstości podstawowych drgań promieniowych kuli sprężystej dla wybranych liczb Poissona

ν	$q(\nu)$	Ω_-^2	Ω_+^2	γ_-^2	γ_+^2
0	1	4,29	4,58	8,58	9,16
0,25	0,6	6,44	-	5,37	-
0,353	0,454	7,57	-	4,65	-
0,49	0,039	9,34	-	0,55	-

Stosując bardziej dokładne obliczenia numeryczne na podstawie szeregu (26), można znaleźć kolejne miejsca zerowe przedstawione w tabeli 2, które zgadzają się z wynikami rozwiązania ścisłego [5]:

$$z^{-1}tg(z) = \left(1 - \frac{1}{4}z^2 \left(2 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\right)^{-1}, \quad z = \Omega^2, \quad (33)$$

$$\Omega_1^2 = (0,816\pi)^2 = 6,5717, \quad \nu = 0,25, \quad (34)$$

$$\Omega_1^2 = (2,788)^2 = 7,7729, \quad \nu = 0,353. \quad (35)$$

TABELA 2

Wyniki obliczeń miejsc zerowych równania charakterystycznego (26)

ν	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2	Ω_4^2
0	4,3347	35,2836	84,7688	158,1809
0,25	6,6049	36,6993	86,1184	160,7317
0,353	8,3694	37,5891	87,4599	164,3524
0,4	9,2694	38,0689	87,8906	–
0,499	9,8219	39,3881	89,0569	–

Mając obliczone trzy pierwsze współczynniki równania sekularnego a_0, a_1, a_2 , można obliczyć estymatory trzech wyższych częstości drgań oraz czwartą przybliżoną. Bernstein i Kieropian opracowali wzory na estymatory wyższych częstości oraz stablicowali zależności występujące między nimi [1]. Obliczając stosunek B_2 / B_1^2 wykorzystując zależności:

$$B_1 = \frac{a_1}{a_0}, B_2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_1 a_2}{a_0}, \quad (36)$$

odczytujemy z tablicy [1] wartości $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi$, a następnie obliczamy estymatory górne i dolne wyższych częstości:

$$(\gamma_i)_- = \sqrt[4]{\frac{\varphi_i}{B_1}}, \quad (\gamma_i)_+ = \sqrt[4]{\frac{\beta_i}{B_1}}, \quad \gamma_4 \approx \sqrt[4]{\frac{\psi}{B_1}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (37)$$

gdzie: $(\gamma_i)_-$ — dolny estymator;

$(\gamma_i)_+$ — górny estymator;

$\gamma_i = \frac{(\gamma_i)_- + (\gamma_i)_+}{2}$ — wartość średnia i -tego estymatora;

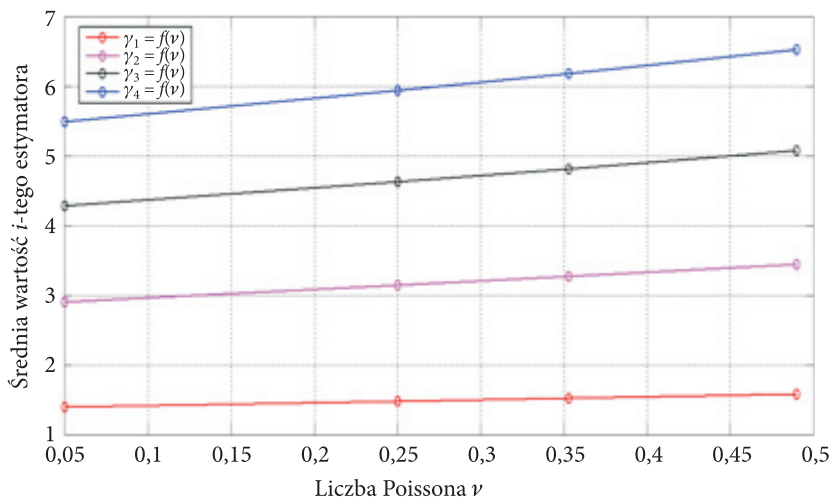
γ_4 — przybliżona wartość estymatora czwartej częstości drgań.

W tabeli 3 przedstawiono wyniki obliczeń wyższych częstości drgań promieniowych kuli sprężystej dla wybranych wartości liczby Poissona oraz przedstawiono ich średnią wartość w zależności od liczby Poissona na rysunku 1.

TABELA 3

Obliczenia dolnych i górnych estymatorów wyższych częstości drgań promieniowych kuli sprężystej

ν	$(\gamma_1)_-$	$(\gamma_1)_+$	$(\gamma_2)_-$	$(\gamma_2)_+$	$(\gamma_3)_-$	$(\gamma_3)_+$	γ_4
0,05	1,39498	1,39573	2,74914	3,06021	3,66986	4,90443	5,49148
0,25	1,48143	1,48247	2,97052	3,30538	3,95963	5,29624	5,93600
0,353	1,52474	1,52563	3,09078	3,43859	4,11802	5,50954	6,18074
0,49	1,58155	1,58211	3,25616	3,62169	4,33549	5,80271	6,51764



Rys. 1. Średnia wartość estymatora $\gamma_i = f(\nu)$ w zależności od liczby Poissona

5. Wnioski

Zaproponowana metoda funkcji Cauchy pozwoliła otrzymać analityczną postać szeregu charakterystycznego (23), na podstawie którego obliczono cztery częstości własne. Wysoką dokładność metody potwierdza obliczona wartość częstości podstawowej, która zgadza się z wynikami rozwiązania ścisłego otrzymanego przez Magnickiego [5]. Wykorzystując wzory i tablice Bernsteina-Kieropiana, obliczono estymatory wyższych częstości drgań promieniowych. Estymatory zmieniają się w sposób liniowy dla wybranych liczb Poissona. Mając rozwiązanie ścisłe, można w następnej kolejności dokonać obliczeń numerycznych MES, a następnie zweryfikować otrzymane wyniki w oparciu o rozwiązanie uzyskane na drodze analitycznej.

Artykuł wpłynął do redakcji 26.04.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lipcu 2012 r.

LITERATURA

- [1] S.A. BERNSTEIN, K.K. KIEROPIAN, *Opređenienije castot kolebanij strznevych system metodom spektralnoi funkcji*, Gosstroizdat, Moskva, 1960.
- [2] M. DOMORADZKI, J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *Analysis of influence of elasticity constants and material density on base frequency of axi-symmetrical vibrations with variable thickness plates*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43, 4, 2005, 763-775.
- [3] J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *The method of partial discretization in free vibration problems of circular plates with variable distribution of parameters*, International Applied Mechanics, 42, 3, 2006, 364-373.
- [4] L.M. ZORYJ, *Ob universalnykh kharakteristicheskikh uravneniakh w zadachakh kolebanii i ustojchivosti uprugikh system*, Mekhanika Tverdogo Tiela, 6, 1982, 155-162.
- [5] V.A. MAGNICKIJ, *Vnutrennije strojenie i fizika zemli*, Nedra, Moskva, 259, 1965.
- [6] S.P. TIMOSENKO, *Ustojcywość sterżnej, płastin i obolocek*, *Izbrannyje raboty* pod redakcją Grygoluka E.I., Nauka, 807, 1971.
- [7] J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *Metody analizy drgań osiowosymetrycznych płyt kołowych z zastosowaniem funkcji wpływu Cauchy*, Rozprawy Naukowe Politechniki Białostockiej, Białystok, 2005.
- [8] W.Q. CHEN, J.B. CAI, G.R. YE, H.J. DING, *On eigenfrequencies of an anisotropic sphere*, J. Appl. Mech., 67, 2002, 422-424.
- [9] X. WANG, C. WANG, G. LU, B.M. ZHOU, *Thermal stresses-focussing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere*, J. Therm. Stresses, 25, 2002, 31-44.
- [10] J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *Drgania promieniowe kuli sprężystej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, 20, 1998, 329-335.

J. JAROSZEWICZ, K.K. ŻUR

Method of Cauchy function in analysis of radial vibration of an elastic sphere

Abstract. In this study, the method of Cauchy function is applied to solve boundary-value problem of free radial vibrations of an elastic isotropic sphere. The linear dependence stress, deformation and displacement against radial coordinate are settled. The form of characteristic series was derived. The application of tables and formulas of Bernstein-Kieropian to calculate basic and higher estimators of radial vibration was presented. The presented method gives satisfactory accuracy to exact solution [5] even if the characteristic series is truncated after a few first terms.

Keywords: radial vibrations, Cauchy function, boundary value problem