



Wpływ pierścieniowej masy skupionej na drgania własne płyt kołowych z typowymi warunkami brzegowymi

JERZY JAROSZEWICZ¹, KRZYSZTOF KAMIL ŻUR^{1,2}

¹ Politechnika Białostocka, Wydział Zarządzania,
16-001 Kleosin, ul. Ojca Tarasiuka 2, j.jaroszewicz@pb.edu.pl

² Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny,
15-351 Białystok, ul. Wiejska 45C, k.zur@pb.edu.pl

Streszczenie. W artykule przedstawiono rozwiązanie zagadnienia brzegowego drgań osiowosymetrycznych płyt kołowych o stałej grubości: utwierdzonych na obwodzie i swobodnie podpartych, z dyskretnymi wtrąceniami w ciągły rozkład masy w postaci koncentrycznych pierścieni masowych. Wyprowadzono wzory i przedstawiono wykresy uwzględniające wpływ promienia pierścienia masy dodatkowej na częstość podstawową dla przypadku, gdy masa dodatkowa przewyższa masę własną płyty oraz jest porównywalna z masą własną płyty. Przedstawiono zbieżność wyników obliczeń uzyskanych na podstawie wyprowadzonych w pracy wzorów i obliczeń MES ze znanymi z literatury wynikami ścisłymi dla pojedynczej masy zlokalizowanej w środku symetrii [10]. Wyniki teoretyczne potwierdzono eksperymentalnie.

Słowa kluczowe: drgania własne, płyta kołowa, masa skupiona, funkcja wpływu

1. Wprowadzenie

Analizując wyniki badań teoretycznych opublikowanych w poprzednich pracach [3-9,15] można stwierdzić, że zastosowanie metody elementów skończonych do wyznaczenia częstości rezonansowych płyt kołowych jest celowe i uzasadnione. Potwierdza to bardzo mały błąd procentowy MES-u w stosunku do rozwiązań ścisłych. Na korzyść MES przemawia również brak skomplikowanego aparatu matematycznego, niezbędnego do rozwiązania danego zagadnienia na drodze teoretycznej, gdyż MES jest najprostszą metodą pozwalającą na wystarczająco rozległą analizę. Rozwiązania ścisłe i przybliżone ograniczają się do wąskiej grupy przypadków,

a badania doświadczalne wymagają skomplikowanych stanowisk pomiarowych oraz kosztownej aparatury i oprogramowania. Mimo niewątpliwych zalet metody elementów skończonych nie należy zapominać, że ta metoda należy do grupy metod przybliżonych. Wyniki uzyskiwane w takich przypadkach są obarczone błędami metody oraz błędami numerycznymi. W tej sytuacji należy porównywać uzyskane wyniki z istniejącymi rozwiązaniami ścisłymi uzyskanymi na drodze teoretycznej. Stosowana w pracy metoda dyskretyzacji częściowej również pozwala uzyskać dokładne wyniki [12-14]. Stosowalność tej metody ogranicza się jednak wyłącznie do wyznaczania wartości pierwszej częstości podstawowej. Należy pamiętać, że dokładność rozwiązań uzyskiwanych w tej metodzie zależy od przyjętego stopnia dyskretyzacji. Stosowanie wysokich stopni dyskretyzacji ($k = 100$) jest możliwe jedynie przy komputerowym wspomaganie procesu obliczeń.

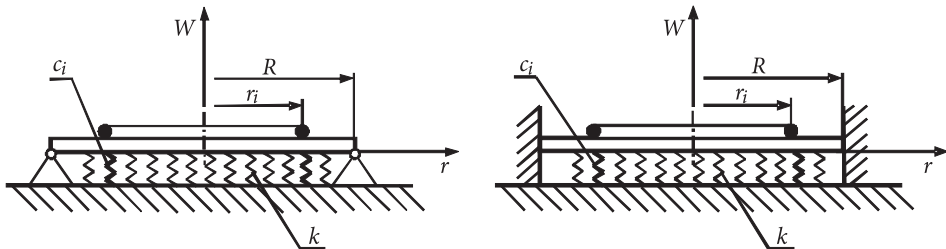
2. Sformułowanie zagadnienia

Swobodne poprzeczne drgania płyty kołowej (rys. 1) o promieniu R w biegunowym układzie współrzędnych (r, φ) opisane są znanym równaniem różniczkowym [11]:

$$\Delta_r \Delta_r W + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1)$$

$$\Delta_r = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

gdzie: $W(r, \varphi, t)$ — ugięcie dynamiczne;
 D, ρ, h — odpowiednio sztywność walcowa, gęstość właściwa i grubość płyty;
 E — moduł Younga;
 ν — współczynnik Poissona;
 t — czas.



Rys. 1. Model dynamiczny rozpatrywanych płyt: od lewej płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona na brzegu, gdzie: c_i — sztywność podpór; R — promień płyty kołowej; r_i — współrzędna promieniowa określająca odległość masy skupionej od środka symetrii płyty

Aby przejść od ogólnego równania (1) do równania opisującego zagadnienie brzegowe, dokonano rozdzielenia zmiennych poprzez uwzględnienie dynamicznego ugięcia w biegunowym układzie współrzędnych:

$$W(r, \phi, t) = u(r) \cos n\phi e^{i\omega t}, \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (2)$$

Badania osiowosymetrycznych drgań płyty z dyskretnymi wtrąceniami, których rozkład zależy od zmiennej promieniowej r ($0 < r \leq R$), sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego opisanego równaniem:

$$L_0[u] + r\chi u - \sum_{i=1}^k \alpha_i u(r_i) \delta(r - r_i) = 0, \quad 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < R, \quad (3)$$

gdzie: $L_0[u]$ — operator różniczkowy o postaci:

$$L_0[u] = u^{IV} + \frac{2}{r} u^{III} - \frac{1}{r^2} (1 + 2n^2) u^{II} + \frac{1}{r^3} (1 + 2n^2) u^I - \frac{1}{r^4} (1 + 2n^2) n \quad (4)$$

$u = u(r)$ — amplituda ugięcia;

$\delta(r)$ — delta Diraca;

$\chi = \frac{1}{D} (\rho h \omega^2 - \kappa^2)$ — współczynnik sprężystego podłoża;

$\alpha_i = \frac{1}{D} (m_i \omega^2 - c_i)$ — parametr wtrąceń;

$m_i, \omega, \rho h$ — odpowiednio masa skupiona, parametr częstości oraz masa właściwa płyty;

n — rząd drgań.

W pracy rozważa się dwa rodzaje zamocowania płyty: utwierdzonej i swobodnie podpartej, dla których warunki brzegowe przyjmują postać:

$$u(R) = 0, \quad u'(R) = 0, \quad (5)$$

$$u(R) = 0, \quad u''(R) + \nu R^{-1} u' = 0. \quad (6)$$

3. Funkcja Cauchy pomocniczego zagadnienia brzegowego dla płyty o stałej grubości

Równanie

$$L_0[u] = 0 \quad (7)$$

jest równaniem Eulera, którego fundamentalny układ rozwiązań tworzą funkcje:

$$r^n, r^{-n}, r^{2+n}, r^{2-n}. \quad (8)$$

Funkcja Cauchy równania $L_0[u] = 0$ zbudowana wg metody przedstawionej w pracy [7] z uwzględnieniem (2) ma postać:

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{8n} \left[\frac{\alpha^n r^{-n+2} - r^n \alpha^{-n+2}}{n-1} + \frac{\alpha^{-n} r^{n+2} - r^{-n} \alpha^{-n+2}}{n-1} \right]. \quad (9)$$

Funkcja (9) jest nieokreślona przy wartościach $n = 0$ i $n = 1$, które odpowiadają postaciom: podstawowej osiowosymetrycznej i pierwszej nieosiowosymetrycznej, dlatego konieczne jest wyznaczenie (rozkrycie) nieokreśloności, po wykonaniu której otrzymano:

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{4} \left[\alpha^2 - r^2 + (\alpha^2 + r^2) \ln \frac{r}{\alpha} \right] \quad \text{dla } n = 0, \quad (10)$$

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{8} \left[2\alpha r \ln \frac{r}{\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{r} \right) \right] \quad \text{dla } n = 1. \quad (11)$$

Znajomość funkcji Cauchy $K(r, \alpha)$ jest wystarczająca, by wyprowadzić analityczne zależności częstości ω od masowo-sprężystych parametrów układu.

4. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego bezmasowej płyty z masowym pierścieniem

Założono dla bezmasowej płyty, że jest ona jednorodna. Ograniczone w zerze rozwiązanie pomocniczego zagadnienia (7) ma postać:

$$u(r) = C_0 + C_1 r^2 - F_j K_o(r, r_j) \theta(r - r_j), \quad (12)$$

gdzie: c_0, c_1 — stałe;

$K_o(r, r_j)$ — fundamentalna funkcja operatora $L_o[u]$ przy $\alpha = r_j$;

$\theta(r)$ — funkcja Heavisida'a.

Z równania (12) mamy:

$$u'(r) = C_1 r - F_j K'_o(r, r_j) \theta(r - r_j). \quad (13)$$

Podstawiając (12) i (13) do warunków (5), wyznaczono stałe całkowania C_0, C_1 i na podstawie (12) znaleziono współczynniki wpływu β_{ij} :

$$\beta_{ij} = u_j(r_i) = \frac{1}{2R} \left[(R^2 - r_j^2) K'_{Ri} - 2RK_{Ri} \right]. \quad (14)$$

W przypadku $i = j = 1$ z (14) wyznaczamy częstość drgań własnych ω bezmasowej płyty, która niesie masę skupioną M na okręgu $r = r_1$:

$$\frac{\omega^2}{D} = \frac{1}{\tilde{\rho}\beta_{11}}, \quad M = 2\pi r_1 \tilde{\rho}, \quad (15)$$

gdzie: $\tilde{\rho}$ — gęstość liniowa żebra masowego;
 D — sztywność walcowa.

Po uwzględnieniu (10) β_{11} przyjmuje ostateczną postać:

$$\beta_{11} = \frac{r_1}{2R} \left(\frac{1}{4} R^3 - \frac{1}{4} \frac{r_1^4}{R} - r_1^2 R \ln \frac{R}{r_1} \right). \quad (16)$$

Postępując analogicznie i wykorzystując funkcje (11), można wyznaczyć częstości drgań odpowiadające pierwszej postaci nieosiowosymetrycznej. W przypadku płyty swobodnie podpartej po uwzględnieniu warunków brzegowych (6) przekształcenia należy prowadzić w analogiczny sposób i ostatecznie otrzymano następującą postać β_{11} :

$$\beta_{11} = \frac{r_1}{2(1+\nu)} \left[\frac{3}{4} R^2 - r_1^2 \left(1 - \ln \frac{R}{r_1} \right) + \nu \frac{1}{4} R^2 - r_1 \ln \frac{R}{r_1} \right]. \quad (17)$$

Na podstawie (16), (17), uwzględniając (15) i skierowując $r_1 \rightarrow 0$, otrzymamy znacznie prostsze wzory dla kwadratu częstości podstawowej dla przypadków, gdy masa M znacznie przekracza masę własną płyty i jest skupiona w środku symetrii ($r = 0$) [2]:

$$\omega^2 = \frac{16\pi D}{MR^2}, \quad \omega^2 = \frac{16\pi D(1+\nu)}{MR^2(3+\nu)}. \quad (18)$$

Na podstawie (15) można obliczyć częstości podstawowe ω , wprowadzając parametr częstości $\gamma(x)$, który uzależnimy od stosunku $x = \frac{r_1}{R}$. I tak na podstawie (16), (17) zapisujemy:

$$\omega = \gamma(x) \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (19)$$

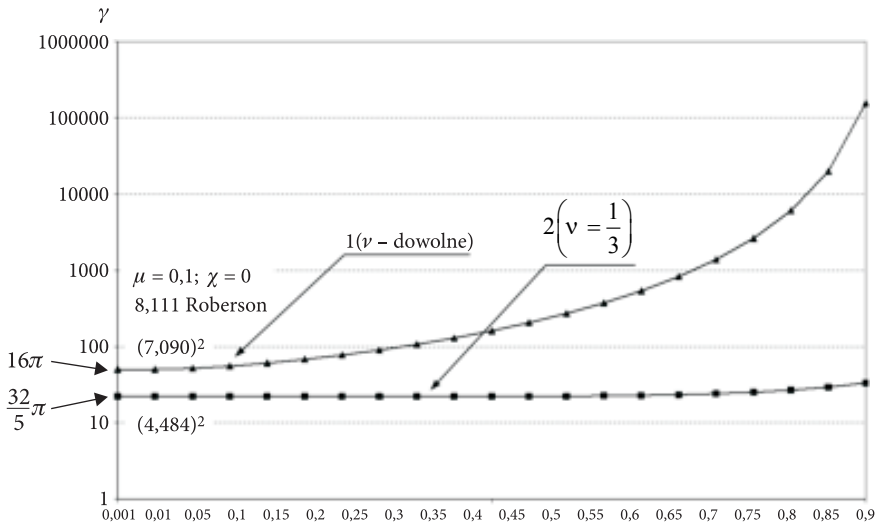
Dla płyty utwierdzonej:

$$\gamma(x) = \frac{16\pi}{1 - x^4 + 4x^2 \ln x}. \quad (20)$$

Dla płyty swobodnie podpartej:

$$\gamma(x) = \frac{16\pi(1 + \nu)}{[3 - x^2(1 + \ln x) + \nu + 4x^2 \ln x]}. \quad (21)$$

Na rysunku 2 przedstawiono zależność parametru częstości podstawowej γ od promienia rozłożenia dodatkowej masy $x = \frac{r_1}{R}$.



Rys. 2. Zależność parametru częstości podstawowej γ od promienia rozłożenia dodatkowej masy $x = \frac{r_1}{R}$ dla: 1 — płyty utwierdzonej, 2 — płyty przegubowo-podpartej

5. Uwzględnienie masy własnej i dodatkowego pierścienia masowego dla płyty utwierdzonej o stałej grubości

Zastosujemy metodę dyskretyzacji do płyty ze stałymi parametrami bez dyskretnych wtrąceń i bez sprężystego podłoża ($\chi = 0$). Elementy macierzy wpływu podatności mają postać (14). Podstawiając postacie funkcji wpływu (10) i jej pochodne do (14) otrzymujemy:

$$\beta_{ij} = \frac{R^2}{8} \left(1 - \frac{r_j^2 - r_i^2}{R^2} - \frac{r_i^2 r_j^2}{R^4} + 2 \frac{r_i^2 + r_j^2}{R^2} \ln \frac{R_j}{R} \right) i \leftarrow j. \quad (22)$$

Również w zadaniu drgań membranowych dyskretyzujemy masę płyty, zastępując układ ciągły dyskretnymi K układami z masami skupionymi o wielkości:

$$m_i = \frac{\pi R^2 \rho h}{k^2} (2i - 1) \quad (i \leq 1, \bar{K}) \quad (23)$$

rozmieszczonymi na okręgach o promieniach:

$$r_i = \frac{R}{2K} (2i - 1). \quad (24)$$

Postępując zgodnie z metodyką omówioną między innymi w [8, 9], dla $K = 2$ budujemy równanie częstości w postaci:

$$a_o - a_1 \lambda^2 - a_2 \lambda^4 = 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{D}, \quad (25)$$

gdzie: $a_o = 1$;

$$a_1 = \frac{m_1 m_2}{2\pi} \beta_{11} + \frac{m_2}{2\pi} \beta_{22} = 0,011850 (R^2 \rho h);$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2}{4\pi^2} (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2) = 0,0000092 (R^2 \rho h)^2.$$

Stosując najprostsze dwustronne estymatory Berenstejna w postaci [1]:

$$(a_1^2 - 2a_2)^{-\frac{1}{2}} < \gamma_1^2 < 2 \left[a_1 + (a_1^2 - 4a_2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad (26)$$

znajdujemy średnią wartość częstości podstawowej:

$$\omega_1 = \gamma_1 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \gamma = 3,085.$$

Tak więc otrzymana wartość współczynnika częstości podstawowej γ różni się od wartości dokładnej mniej niż 4%.

Całkiem analogicznie można teraz wyznaczyć częstości własne płyty, która różni się od rozpatrywanej obecnością dodatkowej masy m_o równomiernie rozłożonej na okręgu o promieniu r_1 . Przyjmując $K = 3$ i biorąc pod uwagę $0 \leq r_o < r_1 < r_2 < R$:

$$\mu_o = \frac{m_o}{\pi R^2 \rho h}, \quad X_o = \frac{r_o}{R}, \quad (27)$$

widzimy, że celowe jest uwzględnienie poprzednio wyznaczonych współczynników $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}$, a także masy m_1, m_2 na okręgach i dodatkowo wyznaczając współczynniki $\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{02}$ z uwzględnieniem (27), znajdujemy równanie charakterystyczne:

$$1 + \tilde{a}_1 \lambda^2 + \tilde{a}_2 \lambda^4 + \tilde{a}_3 \lambda^6 = 0, \quad (28)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{m_o}{2\pi} + a_1, \\ \tilde{a}_2 &= a_2 + \frac{m_o m_1}{4\pi^2} (\beta_{00} \beta_{11} - \beta_{01}^2) + \frac{m_o m_2}{4\pi^2} (\beta_{00} \beta_{22} - \beta_{02}^2), \\ \tilde{a}_3 &= \frac{m_o m_1 m_2}{8\pi^3} \begin{vmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \lambda^2 a_1 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^6 + \dots \end{aligned}$$

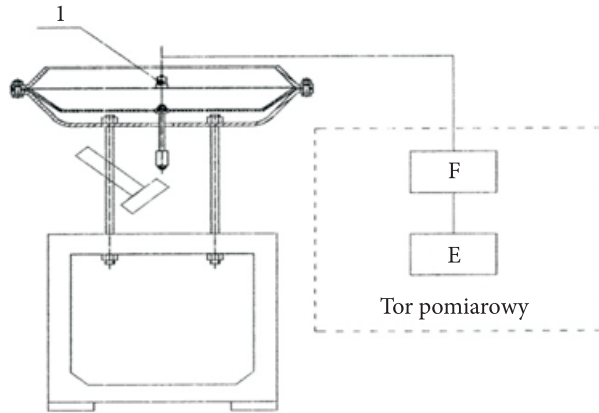
a_1, a_2 tak jak w (25).

Częstość podstawową możemy obliczyć za pomocą estymatorów (26), a także za pomocą ciągu dalszych estymatorów i tablic Berenstejna można ocenić drugą częstość i oszacować trzecią oraz czwartą [1].

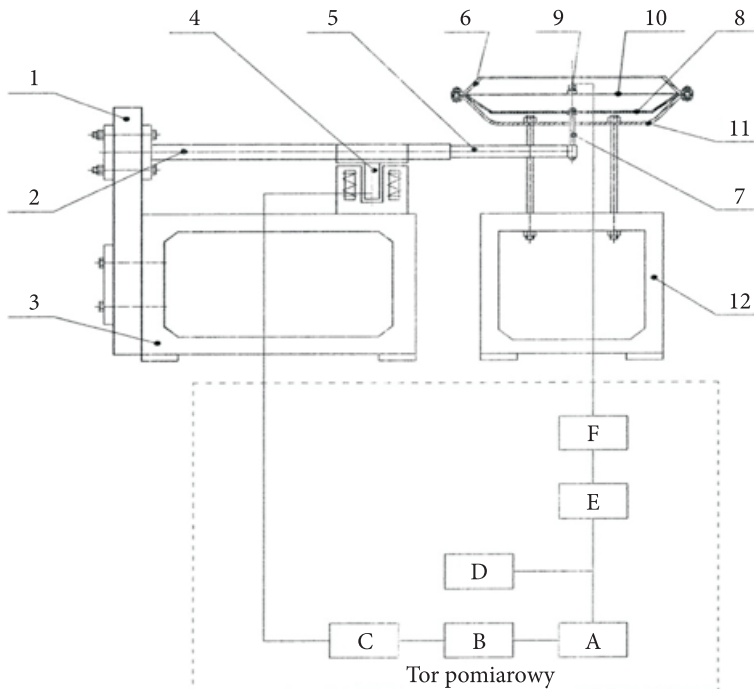
6. Porównanie wyników uzyskanych z obliczeń i eksperymentu

W celu weryfikacji obliczeń przeprowadzono badania doświadczalne, w których wyznaczono częstość drgań własnych badanej płyty przy wykorzystaniu metody rezonansowej i impulsowej. Schemat stanowisk i układów pomiarowych przedstawiono na rysunkach 3 i 4.

W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń dwóch pierwszych częstości podstawowych drgań płyty kołowej z dodatkową masą skupioną w jej środku. Płyta stalowa miała wymiary: średnica $\phi = 500$ mm oraz grubość $h = 1$ mm. Dokonano porównania istniejących rozwiązań ścisłych (uzyskanych poprzez funkcje Bessela) z wynikami uzyskanymi metodą dyskretyzacji częściowej oraz metodą elementów skończonych. Dodatkowo zweryfikowano wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych w oparciu o metodę impulsową i rezonansową.



Rys. 3. Schemat stanowiska i układu pomiarowego do pomiaru drgań własnych płyty metodą wymuszenia impulsowego: 1 — czujnik KD 35; F — miernik drgań SM 231; E — rejestrator



Rys. 4. Schemat stanowiska i układu pomiarowego do pomiaru drgań własnych płyty metodą rezonansową: 1 — wspornik; 2 — belka; 3 — korpus; 4 — elektromagnes; 5 — rura; 6 — pokrywa górna; 7 — trzpień; 8 — membrana; 9 — czujnik KD 35; 10 — badana płyta; 11 — pokrywa dolna; 12 — korpus; A — generator PM 5121; B — wzmacniacz; C — wzbudnik PR 9270; D — licznik impulsów; E — oscyloskop PM 3206; F — miernik drgań SM 231

TABELA 1

Porównanie wyników obliczeń i pomiarów

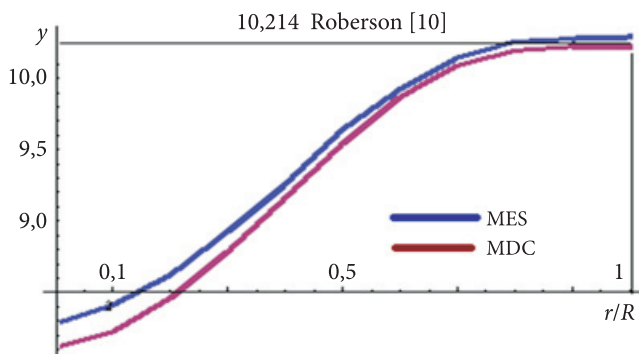
	Rozwiązanie ścisłe	Metoda dyskretyzacji		MES		Eksperyment			
		f [Hz]	Δ [%]	f [Hz]	Δ [%]	Metoda impulsowa		Metoda rezonansowa	
						f [Hz]	Δ [%]	f [Hz]	Δ [%]
1	26,432	26,499	0,25	26,483	0,19	23,11	12,57	24,11	8,78
2	98,383	–	–	98,198	0,19	98,96	0,59	99,46	1,09

W tabeli 2 dokonano porównania wyników obliczeń parametru częstości γ uzyskanych metodą dyskretyzacji częściowej oraz metodą elementów skończonych. Obliczenia przeprowadzono dla modelu płyty utwardzonej na brzegu i obciążonej dodatkową masą $m_0/m = 0,1$ rozmieszczoną na dowolnym promieniu r ($0 < r < R$). Dodatkowo zilustrowano to na rysunku 5.

TABELA 2

Wartość parametru częstości γ uzyskana metodą dyskretyzacji częściowej oraz metodą elementów skończonych

$\frac{r}{R}$	Parametr γ MES	Parametr γ Metoda dyskretyzacji częściowej	Błąd Δ [%]
0	8,281	8,117	1,98
0,1	8,412	8,225	2,22
0,2	8,623	8,462	1,87
0,3	8,928	8,787	1,58
0,4	9,259	9,163	1,04
0,5	9,643	9,544	1,03
0,6	9,925	9,87	0,55
0,7	10,146	10,09	0,55
0,8	10,258	10,195	0,61
0,9	10,278	10,222	0,54
1	10,29	10,224	0,64



Rys. 5. Porównanie wyników obliczeń parametru częstości γ uzyskanych metodą dyskretyzacji częściowej MDC oraz metodą elementów skończonych MES

7. Wnioski

Na podstawie rysunku 5 można ocenić, że wyniki otrzymane dwiema metodami (MES, MDC) niewiele różnią się od siebie. Błąd procentowy zawiera się w granicach $\Delta = 0,54-1,98\%$. Największe rozbieżności występują dla przypadku płyty z masą dodatkową skupioną w środku symetrii i zmniejszającą się w miarę zbliżania się promienia masy dodatkowej do krawędzi płyty. Roberson w [10] otrzymał dla $r/R = 1$ wartość $\gamma = 10,214$, a autorzy metodą dyskretyzacji częściowej oraz metodą elementów skończonych otrzymali odpowiednio $\gamma_{MDC} = 10,224$ i $\gamma_{MES} = 10,29$.

Zamieszczone w tabeli 1 wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych z wykorzystaniem metody impulsowej i rezonansowej potwierdziły wyniki obliczeń teoretycznych. Z zestawionych w tabeli 1 rezultatów wynika, że błąd procentowy wyznaczania częstości rezonansowych maleje wraz ze wzrostem częstości w przypadku obydwu stosowanych metod pomiaru drgań. Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, obie metody dają wyniki będące dobrym przybliżeniem wyników uzyskanych na drodze teoretycznej. Błąd procentowy jest największy dla niskich częstości oraz waha się w granicach 8,78-12,57% i zdecydowanie maleje wraz ze wzrostem badanej częstości rezonansowej. Dla drugiej częstości błąd wynosi około 1%.

Artykuł wpłynął do redakcji 28.03.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w maju 2012 r.

LITERATURA

- [1] S.A. BERNSTEIN, K.K. KIEROPIAN, *Opređenje chastot kolebanij sterzhnevnykh system metodom spektralnoi funkcii*, Gosstroizdat, Moskwa, 1960, 281.
- [2] W.S. HONDKIEWIC, *Sobstvennyye kolebaniya plastin i oboloček*, Kiev, Nukowa Dumka, 1964, 288.
- [3] J. JAROSZEWICZ, L.M. ZORYI, *Izhibnyje kolebanija i dinamičeskaja ustojčivost' balok s peremennymi parametrami*, Prikladnaja mehanika, Kijev, 30, 9, 1994, 75-81.

- [4] J. JAROSZEWICZ, L.M. ZORYJ, *Metody analizy drgań i stateczności kontynuualno-dyskretnych układów mechanicznych*, Monografia, Białystok, 1997.
- [5] J. JAROSZEWICZ, *Drgania swobodne utwierdzonej płyty kołowej obłożonej masami*, Prace Naukowe Instytutu Techn. Wojsk Lotniczych, 9, 2000, 37-44.
- [6] J. JAROSZEWICZ, L.M. ZORYJ, A. KATUNIN, *Dwustronne estymatory częstości własnych drgań osiowosymetrycznych płyt kołowych o zmiennej grubości*, Materiały III Konferencji Naukowo-Praktycznej „Energia w Nauce i Technice”, Suwałki, 2004, 45-56.
- [7] J. JAROSZEWICZ, L.M. ZORYJ, *Metody analizy drgań osiowosymetrycznych płyt kołowych z zastosowaniem funkcji wpływu Cauchy’ego*, Monografia, Białystok, 2005.
- [8] J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *The method of partial discretization in free vibration problems of circular plates with variable distribution of parameters*, International Applied Mechanics, Number 3, 2006, 135-144.
- [9] J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, A. KATUNIN, *Influence of Additional Mass’ Rings on Frequencies of Axi-Symmetrical Vibrations of Linear Variable Thickness Clamped Circular Plates*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44, 4, 2006.
- [10] R.E. ROBERSON, *Vibration of a Clamped Circural Plate Carrying Concentrated Mass*, J. Appl. Mech., 18, 4, 1951, 349-352.
- [11] S.P. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, New York, 1940, 283.
- [12] *Vibracii v tekhnike*, Spravochnik, 6, Moskva, Mashinostroenie, 1978-1981, vol. 1: *Kolebania liniinykh sistem*, 1978, 352.
- [13] L.M. ZORYJ, *Ob universalnykh kharakteristicheskikh uravneniyakh w zadachakh kolebanij i ustoichivosti uprugikh sistem*, Mekhanika Tverdogo Tela, 6, 1982, 155-162.
- [14] L.M. ZORYJ, J. JAROSZEWICZ, *Influence of concentrated mass on vibrations of the circular plate*, Mechanical Engineering, Lviv, 9, 2000, 17-18 (in Ukrainian).
- [15] L. ZORYJ, J. JAROSZEWICZ, *Main frequencies of axial symmetric vibrations of the thin plates with variable parameters distribution*, Mechanical Engineering, Lviv, 5, 2002, 37-38 (in Ukrainian).

J. JAROSZEWICZ, K.K. ŻUR

Influence of carrying concentrated mass on natural vibrations of circular plates with typical boundary conditions

Abstract. In this paper, the boundary value problem of axial symmetrical vibrations of plates clamped on contour and free supported with discrete inclusions in continuous distribution of masses in form of concentric mass rings has been solved.

The formulas and graphics have been made which take into consideration the influence of ring radius of additional mass on basic frequency in the case when additional mass is bigger and when it is comparable with the own mass plate.

To solve this problem, the method of partial discretization with based on the influence function has been applied. Comparison results of calculation obtained on base formulas which were derived in this paper and FEM with exact solution [10] for singular mass located in the centre of plate show good approximate. The theoretical results were confirmed by experimental investigations.

Keywords: natural vibrations, circular plate, concentrated mass, influence function