



Swobodne drgania powierzchni pustki kulistej w ośrodku liniowo-sprężystym

EDWARD WŁODARCZYK, BARTOSZ FIKUS

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, edward.wlodarczyk@wat.edu.pl

Streszczenie. Rozwiązano w zamkniętej postaci problem swobodnych drgań powierzchni pustki kulistej w niezaburzonej ośrodku liniowo-sprężystym. Ruch ośrodka spowodowano nagłym radialnym napędzeniem powierzchni kawerny do początkowej prędkości v_0 . Tak wymuszone drgania powierzchni kawerny są tłumione z upływem czasu. Przyczyną tłumienia jest rozbieżna fala odkształcenia, która dywergentnie rozprasza energię w ośrodku. Miarą intensywności tłumienia jest liczba Poissona ν , która charakteryzuje ściślność ośrodka. Można wyróżnić dwa przedziały zmian parametru ν , w których intensywność tłumienia jest różna. I tak, zmniejszenie parametru ν poniżej 0,45 powoduje intensywne tłumienie drgania powierzchni kawerny, które po kilku cyklach zanika (rys. 1). Natomiast dla $0,45 < \nu < 0,5$ (ośrodek quasi nieściśliwy) tłumienie jest nieznaczne i w granicznym przypadku, tj. przy $\nu = 0,5$ (ośrodek nieściśliwy) powierzchnia kawerny drga harmonicznym ze stałą amplitudą wokół położenia początkowego ($R = r_0$, $\xi = 1$). Wyniki niniejszej pracy wykorzystamy do analitycznej symulacji kształtu krateru podczas penetracji tarczy przez pocisk. Zagadnienie to rozpatrzymy w oddzielnym opracowaniu.

Słowa kluczowe: Swobodne drgania powierzchni kawerny, kinetyczne warunki początkowe, ośrodek sprężysty, tłumienie dywergentne

1. Wprowadzenie

Proces wnikania pocisku broni strzeleckiej w tarczę charakteryzuje się złożonymi zjawiskami [1, 2]. Dla dokładnego opisu tego zagadnienia początkowo-brzegowego (jeśli znane są dynamiczne właściwości mechaniczne oddziałujących ze sobą ciał, tj. pocisku i tarczy) używa się skomplikowanego układu nieliniowych równań różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi poszukiwanych funkcji, które rozwiązuje się numerycznie za pomocą szybkich komputerów [1-4]. Programy numeryczne

stosowane do rozwiązywania tych równań są kosztowne i często wymagają długiego czasu do ich realizacji.

Z tej przyczyny proste inżynierskie teorie wnikania pocisku w różne przegrody mają istotne znaczenie praktyczne. Takie modele często umożliwiają badaczom wgląd we wzajemne oddziaływania fizycznych parametrów analizowanych ośrodków i ich stosunek do wyniku przypadkowego. Te wzajemne oddziaływania są trudne do ustalenia za pomocą złożonych wydruków komputerowych. Ponadto proste inżynierskie teorie często dostarczają podstawy do projektowania eksperymentów i interpretacji fizycznej ich wyników. Do tego rodzaju teorii można zaliczyć uproszczony model wnikania pocisku w metalową tarczę [5-7] oraz analityczny model pulsacyjnej jamy postrzałowej [8, 9].

Jednym z głównych problemów w balistyce końcowej jest teoretyczne określanie kształtu i głębokości kraterów. W literaturze podawane są empiryczne wzory, z których można określić objętość, średni promień i głębokość krateru [6, 10, 11].

Okazuje się, że dynamikę i wymiary krateru można analitycznie określić za pomocą podobnego modelu, jaki zastosowano do analizy pulsacyjnej jamy postrzałowej w tkankach żywych organizmów [8, 9]. Autorzy tych prac chwilowy kształt jamy postrzałowej aproksymowali obwiednią powierzchni pulsujących kulistych kawern w cieczy nieściśliwej. Zatem jako pierwsze w kolejności rozpatrzymy w niniejszej pracy zagadnienie swobodnych drgań powierzchni pustki (kawerny) kulistej w izotropowym ośrodku sprężystym.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy dynamikę powierzchni pustki kulistej w izotropowym ośrodku sprężystym. Ruch ośrodka spowodowano przez radialne napędzenie powierzchni pustki w sposób nagły (skokowy) do początkowej prędkości v_0 .

Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia posłużymy się układem współrzędnych sferycznych r, φ, θ . Ze względu na kulistą symetrię problemu, kierunki styczne φ i θ są równoważne. Radialny początkowy ruch powierzchni pustki i izotropowość ośrodka powodują, że problem jest przestrzennie jednowymiarowy i niezależny od zmiennych φ i θ .

Stany naprężenia i odkształcenia w ośrodku otaczającym kawernę reprezentowane są przez następujące składowe główne:

- σ_r — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ — naprężenia obwodowe (styczne),
- ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenia obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Zgodnie z liniową teorią sprężystości [12, 13] mamy następujące relacje:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = (2\mu + \lambda)\varepsilon_r + 2\lambda\varepsilon_\varphi = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda\frac{u}{r}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_\varphi = 2\mu\varepsilon_\varphi + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = 2(\mu + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_r = 2(\mu + \lambda)\frac{u}{r} + \lambda\frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.3)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.4)$$

gdzie u jest radialnym przemieszczeniem ośrodka, v — radialną prędkością masową, natomiast λ i μ oznaczają stałe Lamego:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.5)$$

Z kolei symbole E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona, r jest współrzędną Lagrange'a, natomiast t oznacza czas.

Równanie kulistego ruchu ośrodka w zakresie małych odkształceń ma postać [12, 13]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r}, \quad (2.6)$$

gdzie ρ_0 jest początkową gęstością ośrodka.

Po podstawieniu w równaniu (2.6) wyrażeń dla σ_r i σ_φ — wzory (2.2) i (2.3) — oraz po dokonaniu przekształceń, otrzymuje się równanie ruchu ośrodka wyrażone za pomocą przemieszczenia u i jego pochodnych cząstkowych, a mianowicie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (2.7)$$

gdzie

$$a^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} a_0^2, \quad a_0^2 = \frac{E}{\rho_0}, \quad (2.8)$$

a jest prędkością propagacji kulistej fali zaburzenia w ośrodku sprężystym. Ze wzoru (2.8)₁ bezpośrednio wynika, że jeśli $\nu \rightarrow 1/2$ (ośrodek nieściśliwy), to $a \rightarrow \infty$ (zanika ruch falowy).

Rozwiązanie rozpatrywanego problemu musi spełniać następujące warunki graniczne:

początkowe

$$u(r_0, 0) = 0, \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0, \quad (2.10)$$

dla $r = r_0$ i $t = 0$
oraz brzegowe

$$\sigma_r(r_0, t) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial r} + 2\lambda \frac{u(r_0, t)}{r_0} = 0 \quad \text{dla } r = r_0, \quad (2.11)$$

$$u(r, t) \equiv 0 \quad \text{i} \quad \sigma_r(r, t) \equiv 0 \quad \text{dla } r = \infty. \quad (2.12)$$

3. Rozwiązanie problemu

Całka ogólna równania (2.7) ma postać [13]:

$$u(r, t) = \frac{\varphi'(r - r_0 - at)}{r} - \frac{\varphi(r - r_0 - at)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie φ' oznacza pochodną względem argumentu.

Z wyrażenia (3.1) po zróżniczkowaniu względem czasu mamy:

$$v(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = -a \frac{\varphi''(r - r_0 - at)}{r} + a \frac{\varphi'(r - r_0 - at)}{r^2}. \quad (3.2)$$

Dalej, z relacji (2.2) i (3.1), po odpowiednim zróżniczkowaniu wyrażenia (3.1) i przekształceniach, otrzymuje się:

$$\sigma_r(r, t) = (2\mu + \lambda) \frac{\varphi''(x)}{r} - 4\mu \frac{\varphi'(x)}{r^2} + 4\mu \frac{\varphi(x)}{r^3}, \quad (3.3)$$

a po uwzględnieniu, że

$$2\mu + \lambda = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E, \quad 4\mu = \frac{2}{1 + \nu} E, \quad (3.4)$$

jest

$$\sigma_r(r,t) = E \left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\varphi''(x)}{r} - \frac{2}{1+\nu} \frac{\varphi'(x)}{r^2} + \frac{2}{1+\nu} \frac{\varphi(x)}{r^3} \right], \quad (3.5)$$

gdzie

$$x = r - r_0 - at. \quad (3.6)$$

Zauważmy, że wyrażenie (3.5) spełnia bezpośrednio warunek brzegowy (2.12) dla dowolnej ograniczonej funkcji φ i jej pochodnych, a po podstawieniu go do warunku (2.11) dostajemy:

$$\varphi''(x_0) - 2h\varphi'(x_0) + \omega_0^2\varphi(x_0) = 0, \quad (3.7)$$

gdzie

$$h = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_0} > 0, \quad \omega_0^2 = \frac{2h}{r_0} = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_0^2}, \quad x_0 = -at. \quad (3.8)$$

Z kolei po podstawieniu wyrażeń (3.1) i (3.2) do warunków początkowych (2.9) i (2.10), otrzymuje się:

$$\frac{\varphi'(0)}{r_0} - \frac{\varphi(0)}{r_0^2} = 0, \quad -\frac{\varphi''(0)}{r_0} + \frac{\varphi'(0)}{r_0^2} = \frac{v_0}{a}. \quad (3.9)$$

Całka ogólna równania (3.7) ma postać [14]:

$$\varphi(x_0) = e^{hx_0} (C_1 \cos \omega x_0 + C_2 \sin \omega x_0), \quad (3.10)$$

gdzie

$$\omega = (\omega_0^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{1}{r_0}, \quad (3.11)$$

stałe C_1 i C_2 są zdeterminowane przez warunki początkowe (3.9).

Następnie przez podstawienie rozwiązania (3.10) do warunków początkowych (3.9) uzyskuje się algebraiczny układ równań w postaci:

$$hC_1 + \omega C_2 = \frac{1}{r_0} C_1, \quad (h^2 - \omega^2)C_1 + 2\omega h C_2 = \frac{1}{r_0^2} C_1 - r_0 \frac{v_0}{a},$$

z którego wyznaczamy stałe C_1 i C_2 , a mianowicie:

$$C_1 = r_0^3 \frac{v_0}{a}, \quad C_2 = \frac{\nu}{\sqrt{1-2\nu}} r_0^3 \frac{v_0}{a}. \quad (3.12)$$

Ostatecznie funkcja $\varphi(x_0)$ i jej pochodne, które spełniają równanie (3.7) i warunki początkowe (3.9), mają postać:

$$\varphi(x_0) = r_0^3 \frac{v_0}{a} \exp\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) + \frac{\nu}{\sqrt{1-2\nu}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) \right], \quad (3.13)$$

$$\varphi'(x_0) = r_0^2 \frac{v_0}{a} \exp\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) - \sqrt{1-2\nu} \sin\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) \right], \quad (3.14)$$

$$\varphi''(x_0) = -2r_0 \sqrt{1-2\nu} \frac{v_0}{a} \exp\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{x_0}{r_0}\right), \quad (3.15)$$

gdzie zgodnie z (2.8) i (3.8) jest:

$$x_0 = -at = -\sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} a_0 t, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (3.16)$$

W ten sposób uzyskaliśmy jawną postać funkcji $\varphi(x_0)$ i jej pochodnych, które spełniają równanie ruchu powierzchni kawerny (2.7) i warunki graniczne badanego zagadnienia: (2.9)-(2.12). Po podstawieniu funkcji $\varphi(x_0)$ i $\varphi'(x_0)$ do wyrażenia (3.1) dla $r = r_0$ otrzymuje się wzór na przemieszczenie powierzchni pustki kulistej w ośrodku sprężystym w następującej postaci:

$$u(r_0, t) = u_0(t) = r_0 \frac{v_0}{a} \frac{1-\nu}{\sqrt{1-2\nu}} \exp\left(-\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{at}{r_0}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \frac{at}{r_0}\right) \quad (3.17)$$

lub

$$u_0(t) = r_0 \frac{v_0}{a_0} \sqrt{1-\nu^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \frac{a_0 t}{r_0}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{a_0 t}{r_0}\right). \quad (3.18)$$

W przypadku ośrodka nieściśliwego, tj. dla $\nu = 0,5$, mamy:

$$u_0(t) = \sqrt{0,75} r_0 \frac{v_0}{a_0} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{0,75}} \frac{a_0 t}{r_0}\right). \quad (3.19)$$

4. Analiza swobodnych drgań powierzchni pustki

Oznaczmy przez R bieżący promień pustki. Aktualna wartość promienia R w chwili t określona jest wzorem:

$$R(t) = r_0 + u_0(t). \quad (4.1)$$

W celu uproszczenia ilościowej analizy ruchu powierzchni pustki wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{R}{r_0}, \quad \eta = \frac{a_0 t}{r_0}, \quad V_0 = \frac{v_0}{a_0}. \quad (4.2)$$

Wówczas, z wyrażeń (3.18), (4.1) i (4.2), otrzymuje się:

$$\xi(\eta) = 1 + V_0 \sqrt{1 - \nu^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2}} \eta\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2}} \eta\right). \quad (4.3)$$

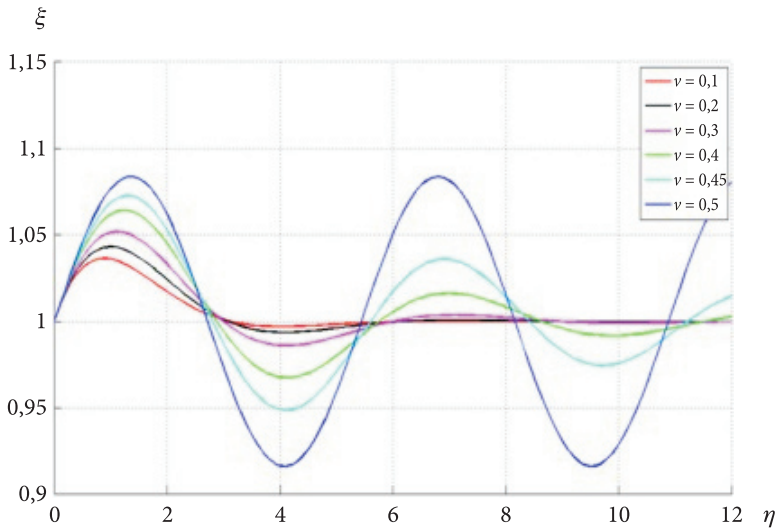
Ze struktury wzoru (4.3) bezpośrednio wynika, że swobodne drgania powierzchni kawerny są tłumione, mimo że otaczający ją ośrodek jest sprężysty. Natura tego tłumienia jest dywergentna i wynika z warunków brzegowych typu Sommerfelda (2.12), które eliminują fale propagujące się z nieskończoności w kierunku pustki [14]. Energia powierzchni pustki rozpraszana jest w sposób dywergentny w otaczającym ją ośrodku ściśliwym. Powoduje to pulsacyjne zanikanie drgań powierzchni kawerny, która przy $\nu \neq 0,5$ z upływem czasu zmierza do położenia początkowego ($\xi \rightarrow 1, R \rightarrow r_0$).

Na tłumienie swobodnych drgań powierzchni kawerny istotny wpływ ma ściślność otaczającego ją ośrodka, która mierzona jest modulem ściślności nazywanym również modulem odkształceń objętościowych. Określa się go wzorem:

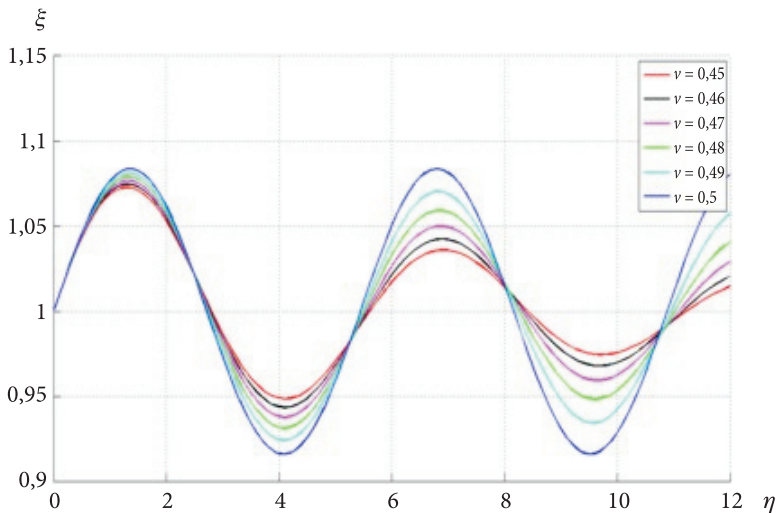
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (4.4)$$

Z wzoru wynika, że moduł K dla danego E jednoznacznie określa się za pomocą liczby Poissona ν . Dlatego w niniejszej pracy ściślność ośrodka charakteryzujemy parametrem ν . Dla $\nu = 0,5$ moduł $K = \infty$ i ośrodek jest nieściśliwy.

Przykładową zmianę względnego przemieszczenia ($\xi = R/r_0$) powierzchni kawerny w funkcji $\eta = a_0 t/r_0$ dla kilku wartości parametru ν przedstawiono na rysunkach 1 i 2. W obliczeniach przyjęto następujące dane: moduł Younga $E = 210$ GPa, gęstość $\rho = 7850$ kg/m³ oraz początkową prędkość powierzchni kawerny $v_0 = 500$ m/s.



Rys. 1. Zmiana względnego przemieszczenia powierzchni kawerny w funkcji η dla kilku wartości parametru ν i początkowej prędkości powierzchni pustki $v_0 = 500$ m/s



Rys. 2. Zmiana względnego przemieszczenia powierzchni kawerny w funkcji η dla kilku wartości parametru ν i początkowej prędkości powierzchni pustki $v_0 = 500$ m/s

Z zamieszczonych na rysunkach wykresów wynika, że zmniejszanie wartości parametru ν w przedziale $\nu \leq 0,45$ (wzrost ściśliwości ośrodków) powoduje intensywne zanikanie oscylacji powierzchni kawerny. Dla tych wartości ν powierzchnia kawerny zmierza do położenia początkowego $R(t) \approx r_0$ już po upływie kilku cykli drgań (rys. 1). Natomiast w przedziale $0,45 < \nu < 0,5$ (ośrodki quasi-ściśliwe) tłumienie drgań powierzchni kawerny jest słabe. W granicznym przypadku dla $\nu = 0,5$,

tj. w ośrodku nieściśliwym, tłumienie drgań całkowicie zanika i powierzchnia kawerny pulsuje harmonicznie wokół położenia początkowego $R = r_0$. Z analizy tej wynika, że parametr ν oddziałuje na drgania kawerny w sposób rezonansowy.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na fakt, że wartość amplitudy drgań powierzchni pustki rośnie wprost proporcjonalnie do początkowej prędkości jej napędzenia. Fakt ten ma istotny wpływ na gabaryty krateru drażonego przez pocisk wnikaający ze zmienną prędkością w metalową tarczę. Problemem tym zajmujemy się w oddzielnym opracowaniu.

Artykuł wpłynął do redakcji 24.01.2012 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2012 r.

LITERATURA

- [1] M. E. BACKMAN, W. GOLDSMITH, *The mechanics of penetration of projectiles into targets*, Int. J. Engng. Sci., 16, 1, 1978, 1-99.
- [2] W. GOLDSMITH, Review. *Non-ideal projectile impact on targets*, Int. J. Impact Engng., 22, 23, 1999, 95-395.
- [3] A.YA. SAGOMONYAN, *Penetration*, M.Y., Moscow, 1974 (in Russian).
- [4] K. JACH et al., *Computer modeling dynamical interactions of bodies by means of freepoints*, PWN, Warsaw, 2001 (in Polish).
- [5] A. TATE, *A theory for the deceleration of long rods after impact*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 6, 1967, 387-399.
- [6] A. TATE, *Further results in the theory of long rod penetration*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 2, 1969, 141-150.
- [7] V.P. ALEKSEEVSKII, *Penetration of a rod into a target at high velocity*, Combust. Expansion. Shock Waves, 2, 1966, 63-66.
- [8] E. WŁODARCZYK, M. MARUSZYŃSKI, *Mathematical model of the temporary pulsating gunshot cavity*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 275-288.
- [9] E. WŁODARCZYK, M. MARUSZYŃSKI, *Analytical model of the shape of the temporary gunshot cavity*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 289-299.
- [10] R. KINSLOW, *High-velocity impact phenomena*, New York and London: Academic Press, 1970.
- [11] W.A. ALLEN, J. W. ROGERS, *Penetration of rod into a semi-infinite target*, J. Franklin Inst., 272, 1961, 275-284.
- [12] W. NOWACKI, *Theory of elasticity*, PWN, Warsaw, 1970 (in Polish).
- [13] J.D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- [14] S. KALISKI, W. BOGUSZ, Z. DŻYGADEŁO, D. ROGULA, K. SOB CZYK, L. SOLARZ, *Vibrations*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1992.
- [15] S. KALISKI, Cz. RYMARZ, K. SOB CZYK, E. WŁODARCZYK, *Waves*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1992.
- [16] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of expanding spherical stress wave*, I. *Analytical solution of the problem*, JTAM, 46, 1, 2008, 21-40.
- [17] E. WŁODARCZYK, *Normal penetration of the rigid penetrator into ductile halfspace with viscosity*, Engineering Transactions, 55, 4, 2007, 335-344.

E. WŁODARCZYK, B. FIKUS

Free vibration of a spherical cavity surface into linear-elastic medium

Abstract. A problem of the free vibration of the spherical cavity surface into motionless isotropic linear-elastic medium has been solved in the closed form. The medium motion was caused by surge radial driving of the motionless cavity surface to the initial velocity v_0 . Thus, forced vibration of the cavity surface is damped in course of time. The cause of this damping is the elastic divergent wave which dissipates energy into infinite medium. The Poisson's ratio, ν , characterizing a compressibility of elastic medium is gauge of the damping intensity. One can mark out two ranges of ν values in which vibration of the cavity surface is damped with a different degree. Thus, decrease in the parameter ν below the value of about 0.45 causes intense decaying of the cavity surface vibration. In this range of ν values, the displacement of the cavity surface approaches its initial value, i.e. $u = 0$. On the other hand, in the range $0.45 < \nu < 0.5$, i.e. in quasi-incompressible media the vibration damping is very low. In the limiting case, when $\nu = 0.5$, i.e. in the incompressible medium damping vanishes and the cavity surface harmonically vibrates around its static position, $R = r_0$ ($\xi = 1$). The results of this paper we are going to conform at analytical simulation of a crater shape into a target during its penetration by a projectile.

Keywords: spherical cavity free vibration, kinetic initial condition, elastic medium, divergent damping