



Spektralne własności filtrów Laplace'a piątego stopnia w przetwarzaniu danych cyfrowych

KAROLINA KRAWCZYK, IRENEUSZ WINNICKI,
KRZYSZTOF KROSCZYŃSKI, SŁAWOMIR PIETREK,
JANUSZ JASIŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
Zakład Systemów Informacji Geograficznej, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2,
kkrawczyk@wat.edu.pl, ireneusz.winnicki@wat.edu.pl, kkroszczyński@wat.edu.pl,
spietrek@wat.edu.pl, janusz.jasinski@wat.edu.pl

Streszczenie. Artykułem [5] autorzy rozpoczęli cykl prezentacji wyników badań masek konwulucyjnych filtrów Laplace'a wykorzystywanych w cyfrowym przetwarzaniu obrazów. W [6] omówiono spektralne własności filtrów trzeciego stopnia. W niniejszej pracy przedstawiono spektralne własności filtrów Laplace'a stopnia piątego.

Na podstawie macierzy indukowanych przez schematy różnicowe aproksymujące operator Laplace'a wyprowadzono II-formy pierwszego przybliżenia różniczkowego tych schematów, wyznaczono funkcje spektralne operatorów wzmocnienia $f_p(k, l)$ (gdzie p numer maski — wyjaśnienia w tekście), przedstawiono graficzną interpretację tych funkcji oraz wzajemną relację funkcji spektralnej operatora różniczkowego $f_p(k, l)$ i operatora różniczkowego $f_L(k, l)$, czyli relację $f_p(k, l)/f_L(k, l)$.

Widmowy operator przejścia (operator wzmocnienia), często nazywany też funkcją przejścia (*transfer function*) jest funkcją charakteryzującą własności schematów różniczkowych aproksymujących operatory różniczkowe. Ponieważ są to zależności, które wyprowadza się w obu przestrzeniach (ciągłej i dyskretniej), zatem ich porównywanie ułatwia ocenę zastosowanej metody przybliżonej. Operator przejścia przedstawia więc spektralne własności masek konwulucyjnych filtrów liniowych w funkcji liczb falowych k i l . Wartości $f_p(k, l)$ i $f_L(k, l)$ są pośrednio generowane przez długości zaburzeń pojawiających się podczas analizy pól cyfrowych. Zagadnienie to zostało szczegółowo opisane w [6]. Przedstawiono tam też na konkretnym przykładzie metodę wyprowadzania funkcji spektralnych $f_p(k, l)$. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy również do [2, 4, 9, 10].

Badanie przebiegów funkcji $f_p(k, l)$ będzie wykorzystane do przedstawienia własności poszczególnych filtrów Laplace'a. Obszarem porównania będzie pole testowe utworzone za pomocą skryptu *peaks.m* (pakiet Matlab®). Słuszność tego podejścia potwierdzają wyniki badań omówionych w [5] i [6].

Celem prezentowanej pracy jest przede wszystkim poszerzenie i uporządkowanie wiedzy na temat filtrów Laplace'a piątego stopnia oraz wyjaśnienie ich własności spektralnych, które najczęściej mówią o cechach filtrów w obszarze dużych nieregularności, czyli znacznych różnic jasności w blisko położonych punktach zdjęcia cyfrowego. Dodatkowo pokażemy wyraźne różnice w przebiegach funkcji spektralnych związanych z różnymi maskami piątego stopnia. Nie były one takie istotne w przypadku masek stopnia trzeciego [6].

W [6] wprowadziliśmy pojęcie *wskaźnik dobroci* maski (mierzony liczbą bezwzględną) jako wartość $D_p = f_p(k, l)/f_L(k, l)$ w punkcie narożnym dziedziny, np. w punkcie (π, π) . Będziemy się do niego odwoływać również w tej pracy.

Słowa kluczowe: maski liniowych filtrów Laplace'a piątego stopnia, spektralny operator przejścia, metody różnicowe, forma przybliżenia różniczkowego

2. Wprowadzenie. Co to są widmowe operatory przejścia?

Niech

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

gdzie: $L = \nabla^2$ — operator Laplace'a;

u — funkcja zmiennych rzeczywistych (x, y) , np. jasność.

Podobnie jak w [6] założymy, że pojedyncza składowa rozwiązania równania (1) ma postać:

$$u(x_m, y_n) = u_{mn} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)}, \quad (2)$$

gdzie: \hat{u} — amplituda funkcji $u(x, y)$;

k, l — liczby falowe;

$k = 2\pi/\lambda_x, l = 2\pi/\lambda_y$;

λ_x i λ_y — długości fal opisujących dowolne zaburzenie znajdujące się w badanym obszarze zdjęcia cyfrowego. Indeksy m i n lokalizują punkt na dyskretnej siatce obliczeniowej. Więcej informacji na ten temat można znaleźć m.in. w [3, 9-13].

Długości zaburzeń oraz liczby falowe zależne od nich są pojęciami abstrakcyjnymi. W przypadku zdjęcia cyfrowego, na którym mogą w bezpośrednim sąsiedztwie znajdować się punkty o maksymalnej i minimalnej jasności, określenie tych długości jest złożone.

Należy też pamiętać o ograniczeniu wprowadzanym przez metody różnicowe — na siatce dyskretnej możemy analizować zaburzenia, których długość nie jest mniejsza od podwójnej długości kroku siatki, czyli $2h$.

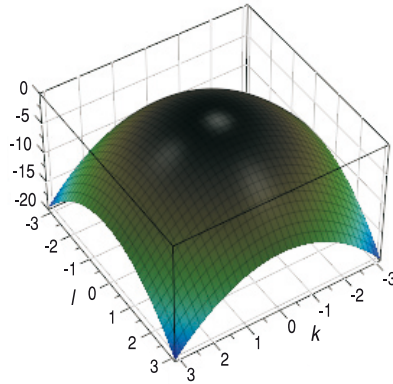
Uwzględniając składową harmoniczną (2) w równaniu (1), otrzymujemy:

$$\nabla^2 u_{mn} = -h^2(k^2 + l^2) \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} = -h^2(k^2 + l^2) u_{mn}. \quad (3)$$

Wyrażenie $-h^2(k^2 + l^2)$ nazywamy widmową funkcją przenoszenia $f_L(k, l)$ operatora Laplace'a:

$$f_L(k, l) = -h^2(k^2 + l^2). \quad (4)$$

Funkcja $f_L(k, l)$ jest zobrazowana na rysunku 1.



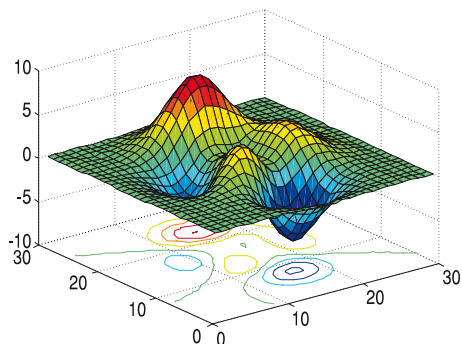
Rys. 1. Widmowa funkcja przenoszenia różniczkowego operatora Laplace'a

Postulowaną postać rozwiązania (2) wykorzystamy do wyznaczenia funkcji opisujących widmowe operatory przenoszenia masek filtrów Laplace'a. Podobnie jak w [6] analizę przeprowadzimy na siatce prostokątnej $M \times N$ podzielonej na kwadraty o jednostkowym boku h . Założenie, że h ma jednostkową długość, jest niezwykle ważne ze względu na występowanie kwadratu tej wielkości w mianownikach współczynników stojących przed macierzami definiującymi maski krawędziowych filtrów Laplace'a. Oprócz tego, operator (1) jest sumą operatorów względem różnych zmiennych przestrzennych. Pominięcie założenia, że $h_x = h_y = h$, znacznie utrudnia prowadzenie badań.

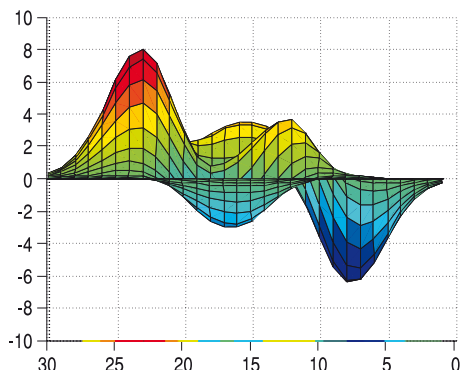
Ponadto przyjmijmy, że punkt o indeksach (m, n) ma współrzędne $(x_m, y_n) = (hm, hn)$. Nie należy też utożsamiać liczb falowych (k, l) ze współrzędnymi (m, n) siatki różnicowej.

Kompleksową analizę przeprowadzimy na przykładzie pola wygenerowanego przez skrypt *peaks.m* z pakietu Matlab[®]. Jest ono przedstawione na rysunkach 2 i 3. Pole to stanowiło podstawę badań prowadzonych w [5] i [6].

Na rysunku 2 zobrazowane jest przykładowe pole analizy. Występują na nim obszary o wartościach dodatnich i ujemnych oraz miejsca, w których zmiana przebiegu funkcji charakteryzuje się dużą dynamiką.



Rys. 2. Pole wejściowe utworzone przez zbiór *peaks.m*



Rys. 3. Pole wejściowe z rysunku 2 w rzucie poprzecznym

Na rysunku 3 przedstawiono rzut poprzeczny omawianego pola. Głównym celem tej prezentacji jest pokazanie zmian wielkości amplitud poszczególnych zaburzeń. Nieregularności, które wygenerował skrypt *peaks.m*, dają podstawę do kontynuowania badań oraz wyciągnięcia wniosków natury ogólniejszej. Słuszność prowadzenia tego typu testów została potwierdzona wynikami badań opisanych w [5] i [6].

2. Wyprowadzenie przykładowej funkcji operatora przejścia maski filtru piątego stopnia

Postępując zgodnie z procedurą badania stabilności liniowych schematów różnicowych za pomocą metody Fouriera i biorąc za podstawę przykład opisany w [6], wyprowadzimy funkcję spektralną maski Laplace'a piątego stopnia, którą w [5] nazwaliśmy maską Kupidury-Kozy-Marciniaka (maską KKM) — patrz [8]. Jest to pełna dwudziestopięcioelementowa macierz piątego stopnia pochodząca od rozbudowanego schematu różnicowego aproksymującego operator Laplace'a $\nabla^2 u$:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla^2 u_{mn}} = & (u_{m-2n+2} + u_{m-1n+2} + u_{mn+2} + u_{m+1n+2} + u_{m+2n+2} + u_{m-2n+1} + u_{m-1n+1} + \\ & + u_{mn+1} + u_{m+1n+1} + u_{m+2n+1} + u_{m-2n-1} + u_{m-1n-1} + u_{mn-1} + u_{m+1n-1} + u_{m+2n-1} + \\ & + u_{m-2n-2} + u_{m-1n-2} + u_{mn-2} + u_{m+1n-2} + u_{m+2n-2} + u_{m-2n} + u_{m-1n} + u_{m+1n} + \\ & + u_{m+2n} - 24u_{mn}) / (25h^2) + 0(h^2), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie $\overline{\nabla^2 u_{mn}}$ — różnicowa aproksymacja operatora Laplace'a.

Ma ona postać (w opisie programu BlueNote autorzy nie uwzględniają współczynnika $1/25$):

$$Lap_6 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -24 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Pomimo tego że schemat różnicowy (5) rozpięty jest na tak dużej liczbie węzłów, to jego rząd aproksymacji jest równy tylko 2. W masce Lap_6 pominięto w mianowniku współczynnika wyraz h^2 .

W procedurze wyprowadzania funkcji widmowego operatora przejścia wykorzystamy relacje zamieszczone w tabeli 1. Będą one stosowane we wszystkich następujących analizach.

TABELA 1

Widmowa interpretacja wartości funkcji u_{mn} w poszczególnych węzłach siatki obliczeniowej

$u_{m-2n+2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-2h)+l(y_n+2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-2ihk} e^{2ihl}$	$= u_{mn} e^{-2ihk} e^{2ihl}$
$u_{m-1n+2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-h)+l(y_n+2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-ihk} e^{2ihl}$	$= u_{mn} e^{-ihk} e^{2ihl}$
$u_{mn+2} =$	$\hat{u} e^{i(kx_m+l(y_n+2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{2ihl}$	$= u_{mn} e^{2ihl}$
$u_{m+1n+2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+h)+l(y_n+2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{ihk} e^{2ihl}$	$= u_{mn} e^{ihk} e^{2ihl}$
$u_{m+2n+2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+2h)+l(y_n+2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{2ihk} e^{2ihl}$	$= u_{mn} e^{2ihk} e^{2ihl}$
$u_{m-2n+1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-2h)+l(y_n+h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-2ihk} e^{ihl}$	$= u_{mn} e^{-2ihk} e^{ihl}$
$u_{m-1n+1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-h)+l(y_n+h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-ihk} e^{ihl}$	$= u_{mn} e^{-ihk} e^{ihl}$
$u_{mn+1} =$	$\hat{u} e^{i(kx_m+l(y_n+h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{ihl}$	$= u_{mn} e^{ihl}$
$u_{m+1n+1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+h)+l(y_n+h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{ihk} e^{ihl}$	$= u_{mn} e^{ihk} e^{ihl}$
$u_{m+2n+1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+2h)+l(y_n+h))} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{2ihk} e^{ihl}$	$= u_{mn} e^{2ihk} e^{ihl}$
$u_{m-2n} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-2h)+ly_n)} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-2ihk}$	$= u_{mn} e^{-2ihk}$
$u_{m-1n} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-h)+ly_n)} = \hat{u} e^{i(kx_m+ly_n)} e^{-ihk}$	$= u_{mn} e^{-ihk}$

cd. tabeli 1

$u_{mn} =$	$\hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)}$	$= u_{mn}$
$u_{m+1n} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+h) + ly_n)} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{ihk}$	$= u_{mn} e^{ihk}$
$u_{m+2n} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+2h) + ly_n)} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{2ihk}$	$= u_{mn} e^{2ihk}$
$u_{m-2n-1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-2h) + l(y_n-h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-2ihk} e^{-ihl}$	$= u_{mn} e^{-2ihk} e^{-ihl}$
$u_{m-1n-1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-h) + l(y_n-h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-ihk} e^{-ihl}$	$= u_{mn} e^{-ihk} e^{-ihl}$
$u_{mn-1} =$	$\hat{u} e^{i(kx_m + l(y_n-h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-ihl}$	$= u_{mn} e^{-ihl}$
$u_{m+1n-1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+h) + l(y_n-h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{ihk} e^{-ihl}$	$= u_{mn} e^{ihk} e^{-ihl}$
$u_{m+2n-1} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+2h) + l(y_n-h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{2ihk} e^{-ihl}$	$= u_{mn} e^{2ihk} e^{-ihl}$
$u_{m-2n-2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-2h) + l(y_n-2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-2ihk} e^{-2ihl}$	$= u_{mn} e^{-2ihk} e^{-2ihl}$
$u_{m-1n-2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m-h) + l(y_n-2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-ihk} e^{-2ihl}$	$= u_{mn} e^{-ihk} e^{-2ihl}$
$u_{mn-2} =$	$\hat{u} e^{i(kx_m + l(y_n-2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{-2ihl}$	$= u_{mn} e^{-2ihl}$
$u_{m+1n-2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+h) + l(y_n-2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{ihk} e^{-2ihl}$	$= u_{mn} e^{ihk} e^{-2ihl}$
$u_{m+2n-2} =$	$\hat{u} e^{i(k(x_m+2h) + l(y_n-2h))} = \hat{u} e^{i(kx_m + ly_n)} e^{2ihk} e^{-2ihl}$	$= u_{mn} e^{2ihk} e^{-2ihl}$

Wprowadzając do (5) tożsamości zawarte w tabeli 1, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \overline{\nabla^2} u_{mn} = & (e^{-2ihk} e^{2ihl} + e^{-ihk} e^{2ihl} + e^{ihk} e^{2ihl} + e^{2ihk} e^{2ihl} + e^{-2ihk} e^{ihl} + e^{-ihk} e^{ihl} + \\
 & + e^{ihk} e^{ihl} + e^{2ihk} e^{ihl} + e^{-ihk} e^{-ihl} + e^{ihk} e^{-ihl} + e^{-2ihk} e^{ihl} + e^{-ihk} e^{-2ihl} + \\
 & + e^{ihk} e^{-2ihl} + e^{2ihk} e^{-2ihl} + e^{-2ihk} + e^{2ihl} + e^{2ihk} + e^{-2ihl} + e^{ihk} + e^{-ihk} + \\
 & + e^{ihl} + e^{-ihl} - 24) u_{mn}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Stąd:

$$f_6(k, l) = \frac{16 \left(\sin^2 hk + \sin^2 \frac{hk}{2} \right) \left(\sin^2 hl + \sin^2 \frac{hl}{2} \right) - 20 \left(\sin^2 hk + \sin^2 hl + \sin^2 \frac{hk}{2} + \sin^2 \frac{hl}{2} \right)}{25}. \tag{8}$$

Do wyprowadzenia funkcji (8) wykorzystano tożsamości:

$$2 \cos \omega = e^{i\omega} + e^{-i\omega}; \quad \cos \omega = 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}. \quad (9)$$

Cechą charakterystyczną funkcji $f_6(k, l)$ jest występowanie w jej opisie iloczynów typu $\sin^2(hk/2)\sin^2(hl/2)$ oraz $\sin^2(hk)\sin^2(hl)$ (pochodzą od wyrazów wyróżnionych w (7) czerwoną czcionką). W odróżnieniu od masek trzeciego stopnia w tym przypadku pojawiają się również iloczyny mieszane: $\sin^2(hk)\sin^2(hl/2)$ oraz $\sin^2(hk/2)\sin^2(hl)$. Wymienione tu wyrażenia występują w opisie funkcji spektralnych części masek filtrów Laplace'a piątego stopnia.

3. Filtry Laplace'a piątego stopnia

W poprzednim punkcie omówiliśmy metodę konstrukcji widmowych operatorów przejścia, w tym przedstawimy własności spektralne macierzy definiujących wybrane maski krawędziowych filtrów Laplace'a piątego stopnia. W szczegółowej analizie przedstawimy również Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego, funkcje spektralne operatorów wzmocnienia wraz z ich graficzną interpretacją oraz wzajemną relacją funkcji spektralnej operatora różnicowego i operatora różniczkowego (4).

Analizę rozpoczniemy od maski Lap_4 indukowanej przez schemat różnicowy czwartego rzędu (patrz np. [3, 5, 12]). Ma ona postać przedstawioną w tabeli 2. Jest to maska typu „krzyż”, podobna w swojej konstrukcji do klasycznej maski Lap_1

$$Lap_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

filtru Laplace'a trzeciego stopnia, której podstawowe własności zostały opisane w [6].

O ile jednak podstawą maski Lap_1 jest standardowa aproksymacja operatora Laplace'a rozpięta na pięciu węzłach, to schemat różnicowy prowadzący do maski Lap_4 ma nietypowe podstawy matematyczne. Jest to złożenie schematów różnicowych skonstruowanych dla pojedynczych (a więc jednowymiarowych) wyrazów operatora Laplace'a ($\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$). Konstrukcja przebiega w jednowymiarowej przestrzeni Lagrange'a elementu skończonego z aproksymacją rozwiązania wielomianem drugiego stopnia. Oznacza to, że budujemy sumę pojedynczych operatorów dyskretnych będących wynikiem poniższego całkowania:

$$\overline{\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2}} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_i u_{ij} \varphi_i^{(2)}(x) \right) \varphi_i^{(2)}(x) dx \quad (10)$$

dla każdego wiersza j ,

$$\overline{\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2}} = \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_j u_{ij} \psi_j^{(2)}(y) \right) \psi_j^{(2)}(y) dy \quad (11)$$

dla każdej kolumny i , gdzie $\varphi_i^{(2)}(x)$, $\psi_j^{(2)}(y)$ — funkcje drugiego stopnia zależne tylko od jednej zmiennej przestrzennej. Każda z powyższych całek tworzy wektor współczynników stojących przed niewiadomymi $u_{i \pm rj}$ oraz $u_{ij \pm r}$, dla $r = -2, -1, 0, 1, 2$. Mają one postać:

$$\begin{aligned} [-1, 16, -30, 16, -1] &\rightarrow (-u_{i-2j}, 16u_{i-1j}, -30u_{ij}, 16u_{i+1j}, -u_{i+2j}) \\ [-1, 16, -30, 16, -1]^T &\rightarrow (-u_{ij-2}, 16u_{ij-1}, -30u_{ij}, 16u_{ij+1}, -u_{ij+2}). \end{aligned} \quad (12)$$

Przypominamy, że maska MES-owska trzeciego stopnia Lap_{-7} (MES₃)

$$Lap_{-7} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

była konstruowana na podstawie poniższego algorytmu:

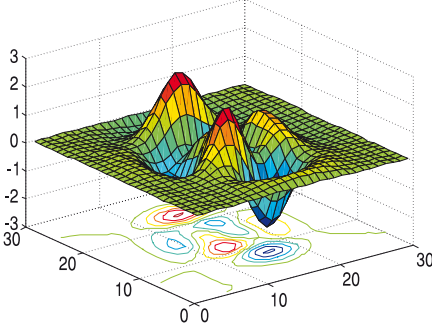
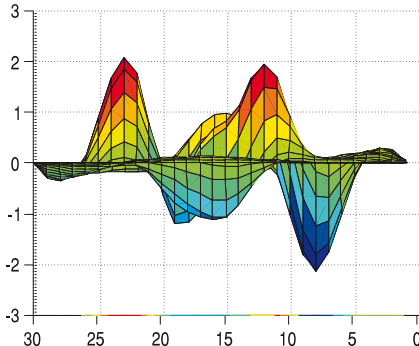
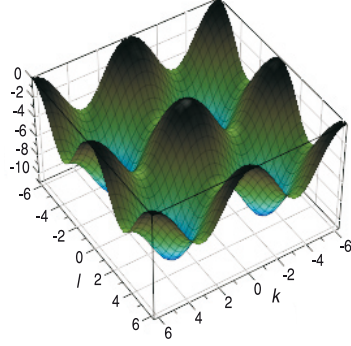
$$\overline{\nabla^2 u} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \left(\sum_{i,j} u_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y) \right) \varphi_i(x) \psi_j(y) dx dy, \quad (14)$$

gdzie: $\varphi_i(x)$, $\psi_j(y)$ — funkcje liniowe. Widzimy, że tak zdefiniowana aproksymacja (14) prowadzi do pełnej macierzy trzeciego stopnia, niezależnie od stopnia wielomianów $\varphi_i(x)$, $\psi_j(y)$.

Konsekwencją zastosowania procedury (10)-(11), w której $\varphi_i(x)$, $\psi_j(y)$ są funkcjami liniowymi, jest maska „krzyż” klasycznego filtru Laplace’a trzeciego stopnia, czyli poznana już maska Lap_{-1} .

TABELA 2

Maska Lap_4 (maska MES-owska piątego stopnia, MES_5), II-forma oraz operator wzmocnienia

$Lap_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>II-forma</p> $\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + O(h^6)$	 <p>Rys. 4. Pole wejściowe poddane oddziaływaniu filtru Lap_4</p>
 <p>Rys. 5. Przekrój poprzeczny pola z rysunku 4. Amplituda (-2,13÷2,08)</p>	 <p>Rys. 6. Przebieg funkcji operatora wzmocnienia $f_4(k, l)$</p>
$f_4(k, l) = \frac{-64 \sin^2 \frac{kh}{2} - 64 \sin^2 \frac{lh}{2} + 4 \sin^2 kh + 4 \sin^2 lh}{12}$	

Maskę

$$Lap_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

możemy zatem nazywać MES-owską maską „krzyż” piątego stopnia lub krótko — maską MES_5 . Zastosowanie procedury (14), w której $\varphi_i^{(2)}(x)$, $\psi_j^{(2)}(y)$ są

wielomianami drugiego stopnia, umożliwiła konstrukcję pełnej MES-owskiej maski krawędziowego filtru Laplace’a piątego stopnia — nie przytaczamy jej tutaj.

Spśród masek prezentowanych w tej pracy, powyższa — *Lap_4* — jako jedyna charakteryzuje się czwartym rzędem dokładności. Pierwsze wyrazy jej II-formy przedstawiamy poniżej:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + O(h^6). \quad (15)$$

Natomiast pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji spektralnej $f_4(k, l)$ w szereg Taylora mają postać:

$$\begin{aligned} f_4(k, l) = & f_L(k, l) + \frac{h^6}{90} (k^6 + l^6) - \frac{h^8}{1008} (k^8 + l^8) + \\ & + \frac{h^{10}}{21600} (k^{10} + l^{10}) + O(k^9, l^9). \end{aligned} \quad (16)$$

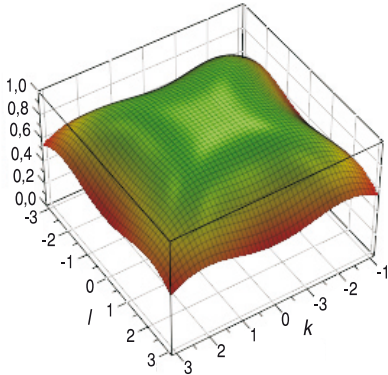
W II-formie pierwszego przybliżenia różniczkowego (15) maski *Lap_4* nie pojawiają się pochodne mieszane, a w wyrażeniu opisującym funkcję spektralną (16) — iloczyny liczb falowych. Oznacza to, że w maskach typu „krzyż” nie występują iloczyny harmonik zależnych tylko od jednej liczby falowej, jak ma to miejsce w przypadku tzw. masek pełnych (bez elementów zerowych).

Należy pamiętać, że filtry, jak każda różnicowa aproksymacja operatorów ciągłych, działają wyłącznie we wnętrzu analizowanego obszaru. Ich brzegi nie są poddawane transformacji

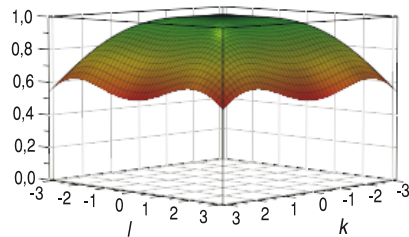
Omawiana tu maska piątego stopnia wprowadza podwójne brzegi. W związku z tym, cztery kolumny i cztery wiersze pikseli nie są modyfikowane. Punktem na brzegach zewnętrznych brakuje 10 węzłów sąsiednich (węzłom narożnym — 16), natomiast punktom na brzegach wewnętrznych (drugi wiersz, druga kolumna itd.) — już tylko pięciu. Można próbować w sposób sztuczny tak powiększać obszar analizy, żeby wpływ brzegu na zmiany w jego wnętrzu był pomijalnie mały. Jednak nie zawsze jest to wykonalne, ponieważ każdy przetwarzany obraz cyfrowy ma konkretny wymiar. Poza tym, zastosowanie operacji splotu i tak spowoduje, że po filtracji w każdym punkcie obrazu będzie zauważalny wpływ obrysu (naturalnego lub sztucznego — wprowadzonego) zdjęcia wejściowego. W związku z tym wynik konwolucji przedstawia obraz cyfrowy o mniejszych wymiarach. Oznacza to, że konwolucja nie dotyczy pikseli znajdujących się bezpośrednio na brzegu (filtry trzeciego stopnia) lub brzegach (filtry piątego stopnia) obrazu cyfrowego.

Porównując pole wejściowe (rys. 4) i jego przekrój poprzeczny (rys. 5) z analogicznymi polami będącymi efektem oddziaływania filtrów Laplace’a trzeciego stopnia, nie stwierdzamy występowania szczególnych różnic. Natomiast przebieg

funkcji spektralnej operatora wzmocnienia $f_4(k, l)$ jest wyraźnie inny. Inne są też relacje funkcji spektralnej $f_4(k, l)$ maski Lap_4 i funkcji $f_L(k, l)$ (rys. 7 i 8).



Rys. 7. Graficzna ilustracja relacji $f_4(k, l)/f_L(k, l)$



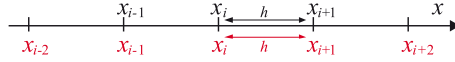
Rys. 8. Przebieg $f_4(k, l)/f_L(k, l)$

Na rysunku 9 prezentujemy dwie siatki różnicowe: powyżej osi x siatkę trzypunktową, na której zbudowane są maski krawędziowych filtrów Laplace'a trzeciego stopnia, a pod osią (oznaczenia czerwone) siatkę pięciopunktową, wykorzystywaną do konstrukcji filtrów piątego stopnia. W tym przypadku w każdym węźle siatki pięciopunktowej istnieje zmierzona wartość jasności piksela zdjęcia cyfrowego — nie ma tu węzłów pośrednich, w których nie wykonuje się pomiarów (rys. 10). Konsekwencją takiego podejścia jest rozszerzenie obszaru analizy do dziedziny naturalnej $\langle -2\pi, 2\pi \rangle \times \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

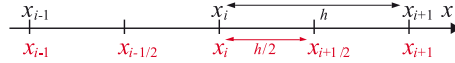
Jak widzimy, na siatkach z rysunku 9 nie zostały wprowadzone tak zwane węzły połówkowe (pośrednie) (rys. 10), w których wartości są obliczane jako średnia arytmetyczna wartości z węzłów sąsiednich. Takie podejście nie zmieniałoby wówczas obszaru analizy $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Uśrednianie wprowadziłoby jednak dodatkowe filtrowanie (wygładzanie) i obniżyłoby dokładność procedury konwolucji. A więc, transformacja zdjęć cyfrowych na siatce z rysunku 9 rozszerza obszar analizy.

Na rysunku 6 przedstawiono przebieg funkcji spektralnej operatora przejścia $f_4(k, l)$ w dziedzinie naturalnej $\langle -2\pi, 2\pi \rangle \times \langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Może się jednak pojawić konieczność porównania własności spektralnych masek piątego stopnia (np. Lap_4) z własnościami spektralnymi masek trzeciego stopnia (np. Lap_1). Wówczas obszar prowadzonej analizy powinien być ograniczony tylko do dziedziny $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Przebiegi funkcji spektralnych w tym przedziale liczb falowych są zamieszczone na rysunku 11.

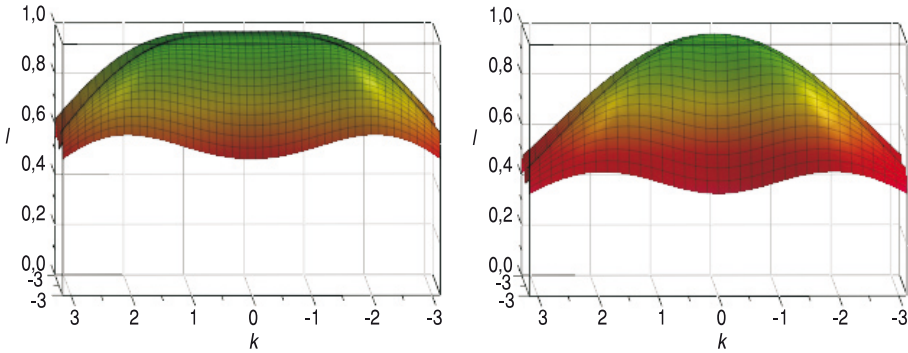
Rysunek 11 nie wymaga, naszym zdaniem, dodatkowego komentarza. Dobroć maski Lap_4 na granicach obszaru $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$ wynosi $D_4 = 0,54$ i jest



Rys. 9. Siatki obliczeniowe



Rys. 10. Siatki obliczeniowe



Rys. 11. Przebiegi funkcji spektralnej $f_4(k, l)$ (na lewo) i funkcji spektralnej $f_1(k, l)$ (na prawo) w obszarze $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$

wyższa od każdej analizowanej w [6] maski liniowego filtru Laplace’a trzeciego stopnia (patrz również tabele 7 i 8). W przebiegu funkcji $f_4(k, l)$ obserwujemy szeroki obszar poprawnego odtwarzania zjawisk nieregularnych, czyli miejsc znacznych (czy nawet skokowych) różnic, np. jasności. Warto zaznaczyć, że w punkcie $k = l = \pi/2$ wartość $f_4(k, l)/f_L(k, l) \approx 0,95$ (patrz rys. 11), natomiast $f_1(k, l)/f_L(k, l) \approx 0,81$. Funkcja $f_1(k, l)$ ma postać:

$$f_1(k, l) = -4 \sin^2 \frac{kh}{2} - 4 \sin^2 \frac{lh}{2}.$$

Podstawowe informacje o kolejnej masce filtru Laplace’a piątego stopnia są zawarte w tabeli 3. W [6] nazwaliśmy ją maską *Lap_5*.

Biorąc pod uwagę postać jej Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego:

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4) \tag{17}$$

zauważamy, że podobnie jak w przypadku maski *Lap_3*

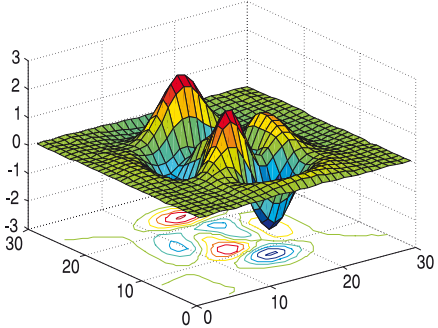
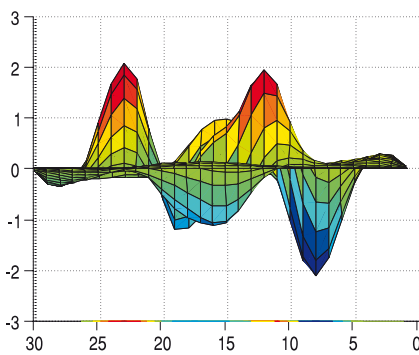
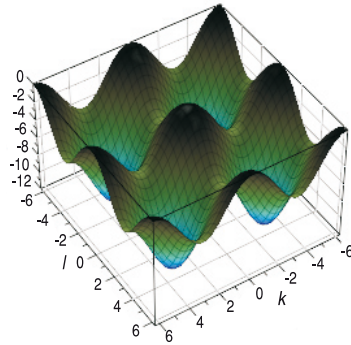
$$Lap_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -12 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

liniowego filtru Laplace'a trzeciego stopnia występują w niej wyrazy odpowiedzialne za kreację rozwiązania. Pierwszy z nich ma postać

$$-\frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} \tag{18}$$

TABELA 3

Maska Lap_5 , Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego oraz operator wzmocnienia

$Lap_5 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 24 & -2 & 0 \\ -1 & 24 & -84 & 24 & -1 \\ 0 & -2 & 24 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Π-forma</p> $\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + 0(h^4)$	 <p>Rys. 12. Pole wejściowe poddane oddziaływanu filtru Lap_5</p>
 <p>Rys. 13. Przekrój poprzeczny pola z rysunku 12. Amplituda (-2,12÷2,08)</p>	 <p>Rys. 14. Przebieg funkcji operatora wzmocnienia $f_5(k, l)$</p>
$f_5(k, l) = \frac{-80 \sin^2 \frac{kh}{2} - 80 \sin^2 \frac{lh}{2} - 32 \sin^2 \frac{kh}{2} \sin^2 \frac{lh}{2} + 4 \sin^2 kh + 4 \sin^2 lh}{16}$	

Wartość wyrażenia (18) jest jednak czterokrotnie mniejsza od jego odpowiednika (z dalszej analizy wynika, że jest to zaletą maski Lap_5)

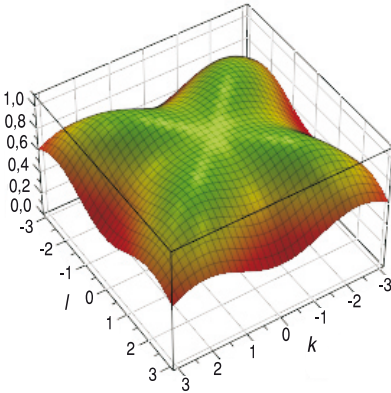
$$\frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y}$$

występującego w masce Lap_3 . Wpływ tego wyrazu na relację $f_5(k, l)/f_L(k, l)$ (patrz rysunki 15 i 16), a tym samym na własności maski Lap_5 nie przekracza 3%. Kolejne badania prowadzą do ujawnienia innych własności omawianej maski. Rozwiemy operator spektralny $f_5(k, l)$ w szereg Taylora względem liczb falowych k i l . Funkcja ta ma postać:

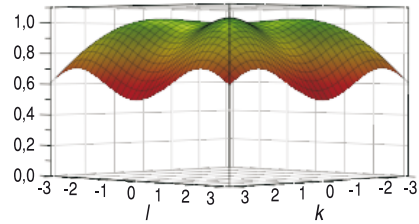
$$\begin{aligned} f_{5,sp}(k, l) = & -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{48}(k^4 + l^4) - \frac{h^4}{8}k^2l^2 + \frac{11h^6}{1440}(k^6 + l^6) + \\ & - \frac{h^6}{96}(k^4l^2 + k^2l^4) - \frac{59h^8}{80640}(k^8 + l^8) - \frac{h^8}{1152}k^4l^4 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Porównamy ją z rozwinięciem operatora $f_3(k, l)$ względem k i l (patrz [6]):

$$\begin{aligned} f_{3,sp}(k, l) = & -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^4}{2}k^2l^2 + \frac{h^6}{24}(k^4l^2 + k^2l^4) + \\ & - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) - \frac{h^8}{288}k^4l^4 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$



Rys. 15. Graficzna ilustracja relacji $f_5(k, l)/f_L(k, l)$



Rys. 16. Przebieg $f_5(k, l)/f_L(k, l)$

Podstawowy wniosek, jaki się tu nasuwa, jest następujący: za kreację rozwiązania w masce Lap_5

$$f_{5Kreacja}(k, l) = -\frac{h^4}{8}k^2l^2 + \frac{11h^6}{1440}(k^6 + l^6) - \frac{59h^8}{80640}(k^8 + l^8) - \frac{h^8}{1152}k^4l^4 + \dots \quad (21)$$

odpowiadają nie tylko wyrazy opisywane pochodnymi mieszany

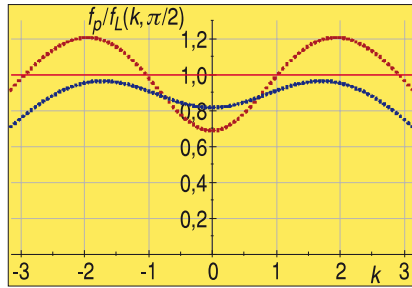
$$-\frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^6}{1152} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots, \quad (22)$$

lecz także wyrazy opisywane czystymi pochodnymi wyższych rzędów:

$$\frac{11}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) - \frac{59}{80640} h^6 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \dots \quad (23)$$

Zjawiska tego nie obserwujemy w przypadku funkcji spektralnej $f_3(k, l)$ maski Lap_3 , w której za kreację odpowiadają wyłącznie pochodne mieszane (rys. 17):

$$-\frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) - \frac{h^6}{288} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}. \quad (24)$$



Rys. 17. Przebiegi funkcji Lap_3 (linia brązowa) i Lap_5 (linia niebieska)

Na rysunku 17 przedstawiono przebiegi obu omawianych tu funkcji spektralnych: $f_3(k, l)$ (krzywa brązowa) oraz $f_5(k, l)$ (krzywa niebieska) dla wybranej wartości liczby falowej $l = \pi/2$. Wpływ wyrazów (23) wyraźnie poprawia własności maski Lap_5 . Pomimo występowania niewielkich oscylacji zgodność $f_5(k, l)$ z teoretyczną wartością równą 1 (linia czerwona) jest bardzo wysoka w całym przedziale drugiej liczby falowej $k \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Natomiast funkcja $f_3(k, l)$ przekracza tę wartość o około 20%. Ta cecha eliminuje schemat różnicowy, od którego pochodzi maska Lap_3 , z powszechnego wykorzystania w obliczeniach numerycznych.

Ciekawą, z punktu widzenia matematyki stosowanej, maską krawędziowego liniowego filtru Laplace'a piątego stopnia jest maska Lap_6 przedstawiona, niestety w sposób ukryty (tylko w opisie działania programu BlueNote — bez współczynnika $1/25$, a nie w monografii [8]), przez Kupidurę, Kożę i Marciniaka. Pełną postać maski gwarantującą zgodność filtru z różnicową aproksymacją (5) operatora Laplace'a cytujemy poniżej:

$$Lap_6 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -24 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 u + 0(h^2). \quad (25)$$

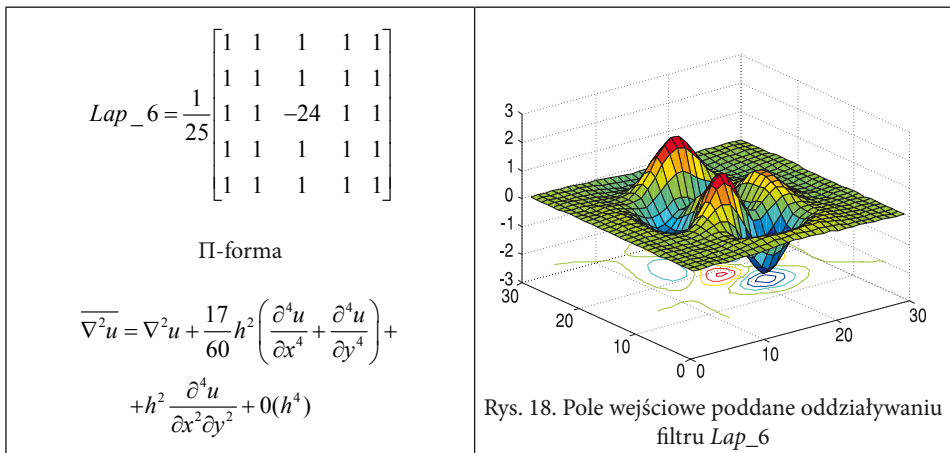
Maska (25) została skonstruowana na podstawie schematu różnicowego (5) aproksymującego operator Laplace'a oraz jego Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego (patrz (27)). Na jej przykładzie omówiliśmy procedurę konstruowania funkcji spektralnej masek liniowych filtrów Laplace'a piątego stopnia.

Charakteryzuje się ona silnymi własnościami dyssypacyjnymi. Jest to wyraźnie widoczne, zwłaszcza na rysunku 18. Amplituda zaburzeń filtrowanego pola początkowego jest o ponad 15% mniejsza niż w przypadku wcześniej omawianych filtrów (np. w [6]).

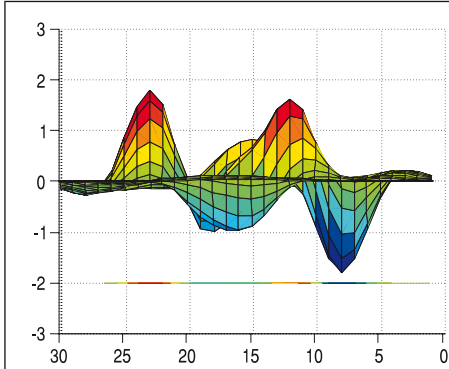
W Π -formie pierwszego przybliżenia różniczkowego maski Lap_6 nie występują wyrazy odpowiedzialne za kreację.

TABELA 4

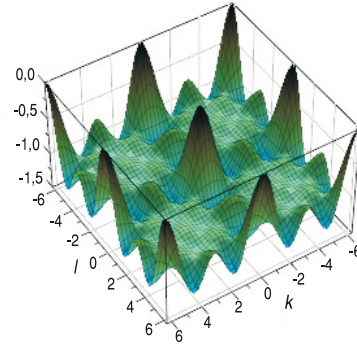
Maska Lap_6 (Kupidury, Kozy i Marciniaka — KKM), Π -forma oraz operator wzmocnienia



cd. tabeli 4



Rys. 19. Przekrój poprzeczny pola z rysunku 18. Amplituda (-1,79÷1,77)

Rys. 20. Przebieg funkcji operatora wzmocnienia $f_6(k, l)$

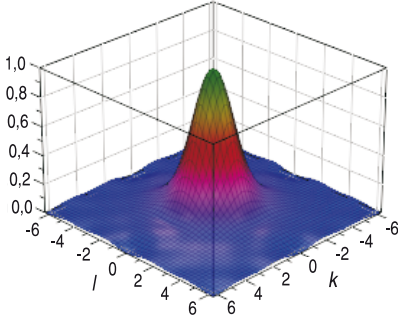
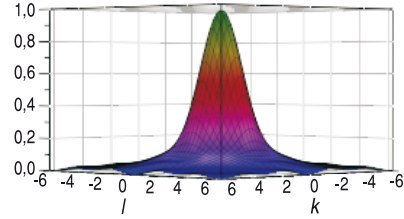
$$f_6(k, l) = \frac{16 \left(\sin^2 hk + \sin^2 \frac{hk}{2} \right) \left(\sin^2 hl + \sin^2 \frac{hl}{2} \right) - 20 \left(\sin^2 hk + \sin^2 hl + \sin^2 \frac{hk}{2} + \sin^2 \frac{hl}{2} \right)}{25}$$

Poza tym należy zaznaczyć, że w porównaniu z pozostałymi filtrami krawędziowymi Laplace'a maska Lap_6 działa bardziej punktowo. Pomimo że nie jest ona operatorem bezkontekstowym (punktowym), to zależność punktu centralnego od wartości 24 węzłów sąsiednich jest bardzo mała (odnosząc się do pojedynczego sąsiada). Połowa sumy bezwzględnych wartości wag tej maski przypada na wagę punktu centralnego. Podobną własnością charakteryzują się filtry Lap_1 , Lap_2 , Lap_7 i Lap_8 — patrz [6].

W związku z tym możemy stwierdzić, że im większa wartość wagi punktu centralnego (w odniesieniu do wag punktów sąsiednich), tym bardziej jego charakterystyka wpływa na wynik procesu filtrowania (tylko) w obszarach regularnych. Tym samym bardziej zbliża się do bezkontekstowej (punktowej) transformacji wartości pikseli. Oznacza to również, że określenie własności tego typu filtrów w odniesieniu do poprawnego odtwarzania nieciągłości (krawędzie i kontury) w zapisie cyfrowym wymaga dodatkowej analizy. Zagadnienie to będzie stanowić podstawę dalszych badań.

Dobroć maski Lap_6 na granicach dziedziny naturalnej $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$ wynosi tylko $D_6 \approx 0,05$ (rys. 21 i 22). Natomiast dla $k = l = 1,1$ wartość $D_6 = f_6(k, l)/f_L(k, l) = 0,4$, a dla $k = l = \pi/2$ wartość $D_6 = 0,19$. Przypominamy, że w punkcie $k = l = \pi/2$ otrzymaliśmy wartości $D_4 = f_4(k, l)/f_L(k, l) \approx 0,95$, i $D_1 = f_1(k, l)/f_L(k, l) \approx 0,81$ (rys. 11).

Poniżej przedstawiamy kilka pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji spektralnej operatora przejścia maski Lap_6 konwolucyjnego filtru Laplace'a piątego stopnia.

Rys. 21. Graficzna ilustracja relacji $f_6(k, l)/f_L(k, l)$ Rys. 22. Przebieg $f_6(k, l)/f_L(k, l)$

$$\begin{aligned}
 f_6(k, l) = & -h^2(k^2 + l^2) + \frac{68}{240}h^4(k^4 + l^4) + h^4k^2l^2 + \\
 & -\frac{52}{1440}h^6(k^6 + l^6) - \frac{408}{1440}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{289h^8}{3600}k^4l^4 + \dots
 \end{aligned} \quad (26)$$

oraz jej II-formę pierwszego przybliżenia różniczkowego:

$$\begin{aligned}
 \overline{\nabla^2 u} = & \nabla^2 u + \frac{68}{240}h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{52}{1440}h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \\
 & -\frac{408}{1440}h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{289}{3600}h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots
 \end{aligned} \quad (27)$$

Z powyższego rozwinięcia wynika, że maska KKM prawidłowo odtwarza zjawiska regularne opisywane operatorem Laplace'a (brak kreacji, naprzemienna zmiana znaku przed kolejnymi pochodnymi parzystego rzędu). Jednak w obszarach dużych nieregularności raczej nie powinna być wykorzystywana — zbyt silne rozmywanie nieregularności i bardzo mała zgodność z funkcją spektralną różniczkowego operatora Laplace'a — porównaj rysunki 21 i 22 na przykład z rysunkiem 11.

Tadeusiewicz i Korohoda w [13] przedstawiają maskę (nazywaną dalej maską TK)

$$Lap_{-10}_{[13]} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -8 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

której prawidłowa postać została przedstawiona w [5]. Jak widzimy, jest to pełna maska krawędziowego filtru Laplace'a piątego stopnia, o bardzo specyficznej budowie. Warto zaznaczyć, że charakteryzuje się ona najmniejszym wskaźnikiem wartości elementu centralnego maski do sumy bezwzględnych wartości wszystkich jej elementów

$$a_{33} / \sum_{i,j} |a_{ij}| \tag{29}$$

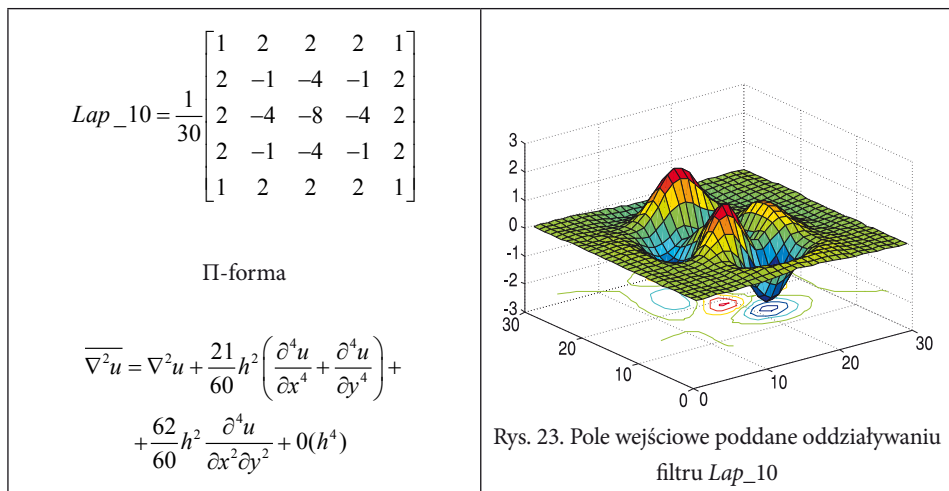
spośród dotychczas omawianych masek. Wskaźnik ten jest równy $8/56$.

Podstawowe własności maski (28) zamieszczamy w tabeli 5, w tym jej poprawną postać gwarantującą zgodność filtru z różnicową aproksymacją operatora Laplace'a. Maskę tę została skonstruowana na podstawie schematu różnicowego aproksymującego operator Laplace'a oraz jego Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego (patrz (34)):

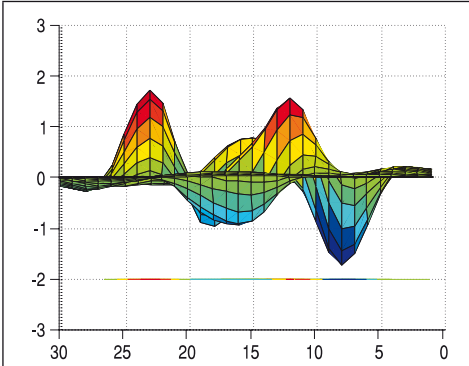
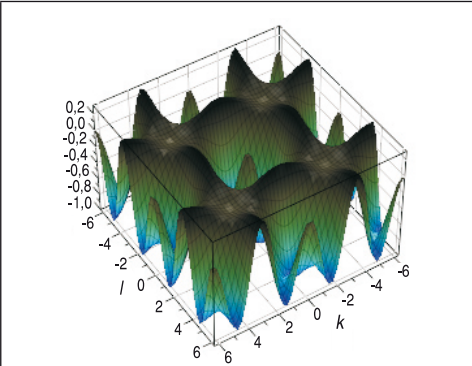
$$Lap_{-10} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -8 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 u + 0(h^2). \tag{30}$$

TABELA 5

Maska Lap_{-10} , Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego oraz operator wzmocnienia



cd. tabeli 5

Rys. 24. Przekrój poprzeczny pola z rysunku 23.
Amplituda $(-1,73 \div 1,72)$ Rys. 25. Przebieg funkcji operatora wzmocnienia
 $f_{10}(k, l)$

$$f_{10}(k, l) = f_{10}^i(k, l) + f_{10}^s(k, l)$$

gdzie:

$$f_{10}^i(k, l) = \frac{-32(\sin^2 hk + \sin^2 hl) + 16\sin^2 hk \sin^2 hl + 32\left(\sin^2 \frac{hk}{2} \sin^2 hl + \sin^2 hk \sin^2 \frac{hl}{2}\right)}{30}$$

$$f_{10}^s(k, l) = \frac{8\left(\sin^2 \frac{hk}{2} + \sin^2 \frac{hl}{2}\right) - 16\sin^2 \frac{hk}{2} \sin^2 \frac{hl}{2}}{30}$$

Analizując dane przedstawione w tabeli 5, dochodzimy do wniosku, że maska *Lap_10* charakteryzuje się najsilniejszymi własnościami dyssypacyjnymi. Jest to wyraźnie widoczne, zwłaszcza na rysunku 24. Amplituda zaburzeń filtrowanego pola początkowego jest o ponad 17% mniejsza niż w przypadku wcześniej omawianych filtrów.

Współczynniki stojące w Π -formie pierwszego przybliżenia różniczkowego

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{84}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{248}{240} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 0(h^4) \quad (31)$$

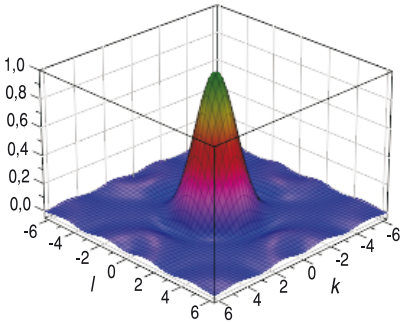
przy głównych wyrazach przyjmują w masce *Lap_10* największe wartości: $84/240$ i $248/240$. Kolejne wyrazy tego rozwinięcia również poprzedzone są współczynnikami o wartościach znacząco większych niż w pozostałych maskach filtrów piątego stopnia, np.

$$-\frac{68}{1440}h^4\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) - \frac{412}{1440}h^4\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}\right). \quad (32)$$

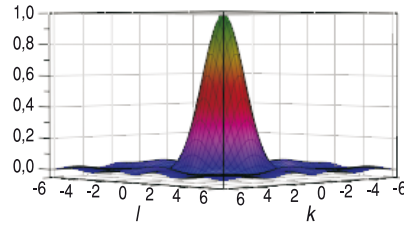
Zauważamy to też w rozwinięciu funkcji spektralnej operatora wzmocnienia $f_{10}(k, l)$ w szereg Taylora (tab. 8).

Wskaźnik dobroci maski Lap_10 w punkcie $k = l = \pi/2$ przyjmuje wartość $D_{10} = f_{10}(k, l)/f_L(k, l) = 0,08$, a w punkcie $k = l = \pi$ wartość $D_{10} = 0,0$ (rys. 26 i 27).

W grupie masek, które dotychczas były poddane tak szczegółowej analizie, są to wartości zdecydowanie najmniejsze. Wynika z tego, że maska TK może być stosowana w przetwarzaniu zdjęć cyfrowych tylko w szczególnych przypadkach. Wrócimy do jej analizy w dalszej części artykułu.



Rys. 26. Graficzna ilustracja relacji $f_{10}(k, l)/f_L(k, l)$



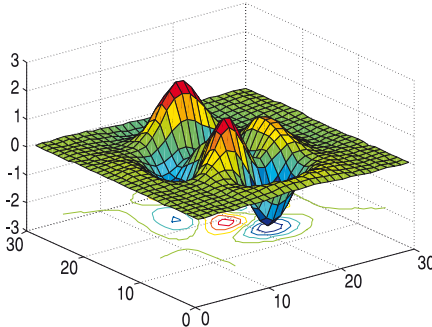
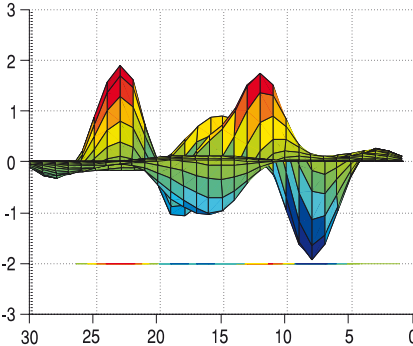
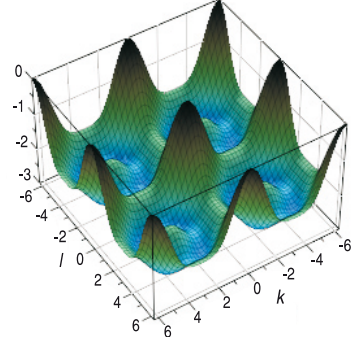
Rys. 27. Przebieg $f_{10}(k, l)/f_L(k, l)$

W [2] Burger i Burge przedstawiają maskę znaną w literaturze pod potoczną nazwą *maska Mexican hat*. Ma ona poniższą postać:

$$Lap_11_{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

TABELA 6

Maska Lap_{11} , Π -forma pierwszego przybliżenia różniczkowego oraz operator wzmocnienia

$Lap_{11} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Π-forma</p> $\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{5h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4)$	 <p>Rys. 28. Pole wejściowe poddane oddziaływaniu filtru Lap_{11}</p>
 <p>Rys. 29. Przekrój poprzeczny pola z rysunku 28. Amplituda $(-1,93 \div 1,91)$</p>	 <p>Rys. 30. Przebieg funkcji operatora wzmocnienia $f_{11}(k, l)$</p>
$f_{11}(k, l) = \frac{-16 \sin^2 \frac{kh}{2} - 16 \sin^2 \frac{lh}{2} + 16 \sin^2 \frac{kh}{2} \sin^2 \frac{lh}{2} - 4 \sin^2 kh - 4 \sin^2 lh}{8}$	

Po szczegółowej analizie, głównie na podstawie schematu różnicowego prowadzącego do (33) oraz Π -formy pierwszego przybliżenia różniczkowego maski (33):

$$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{50}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{30}{240} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{34}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \left(34\right) - \frac{15}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{h^6}{1152} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \dots$$

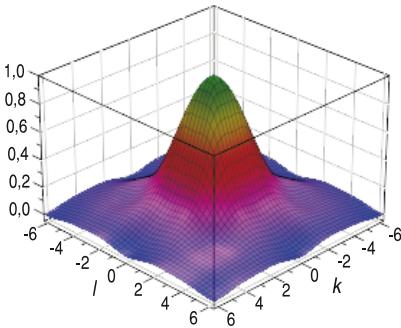
przedstawiamy jej poprawną konstrukcję:

$$Lap_11 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 u + O(h^2). \quad (35)$$

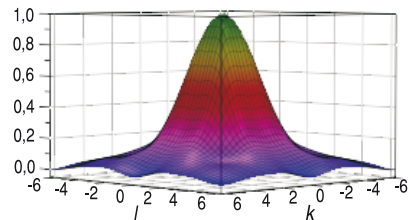
Maska ta charakteryzuje się dyssypacją na „średnim” poziomie (patrz np. opisy rysunków 5, 24 i 29). W Π -formie pierwszego przybliżenia różniczkowego maski Lap_11 nie występują wyrazy odpowiedzialne za kreację, a współczynniki przy kolejnych pochodnych (czystych i mieszanych) nie osiągają wartości większych niż w poprzednich rozwinięciach. Są nawet zauważalnie mniejsze (porównaj (34) z wyprowadzonymi tu Π -formami innych masek Laplace'a piątego stopnia oraz Π -formami masek Laplace'a trzeciego stopnia omówionymi w [5, 6]).

Wskaźnik dobroci maski Lap_11 w punkcie $k = l = \pi/2$ przyjmuje wartość $D_{11} = f_{11}(k, l)/f_L(k, l) = 0,51$, a w punkcie $k = l = \pi$ wartość $D_{11} = 0,10$ (rysunki 31 i 32).

Jest to kolejna maska, obok maski KKM (Lap_6) i TK (Lap_10), której najważniejsza charakterystyka — funkcja spektralna — cechuje się wysoką zgodnością z funkcją spektralną operatora różniczkowego tylko w wąskim zakresie małych wartości liczb falowych (patrz również rysunki poniżej).



Rys. 31. Graficzna ilustracja relacji $f_{11}(k, l)/f_L(k, l)$

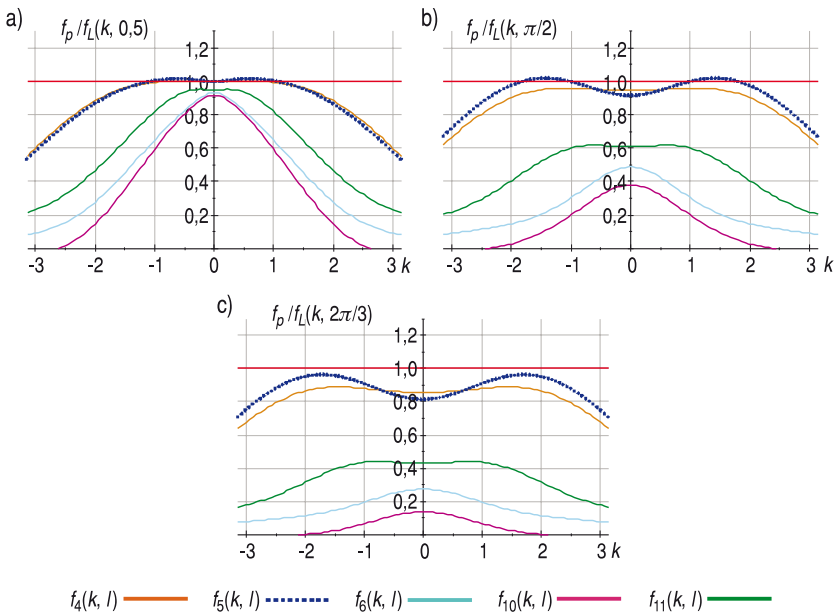


Rys. 32. Przebieg $f_{11}(k, l)/f_L(k, l)$

4. Podsumowanie

Biorąc pod uwagę oddziaływanie analizowanych filtrów z polem testowym wygenerowanym za pomocą skryptu *peaks.m* (rys. 4, 12, 18, 23, 28), dochodzimy do wniosku, że omawiane filtry mogą być wykorzystywane w przetwarzaniu obrazów

cyfrowych po wcześniejszej ocenie regularności fotografowanych pól. Nawet własność niewielkiej kreacji filtra Lap_5 (rys. 15) może w pewnych przypadkach stanowić jego zaletę. Wnioski te potwierdzają wyniki badań opisanych w [5, 6] oraz przebiegi relacji $f_p(k, l)/f_L(k, l)$ zamieszczone na rysunku 33.

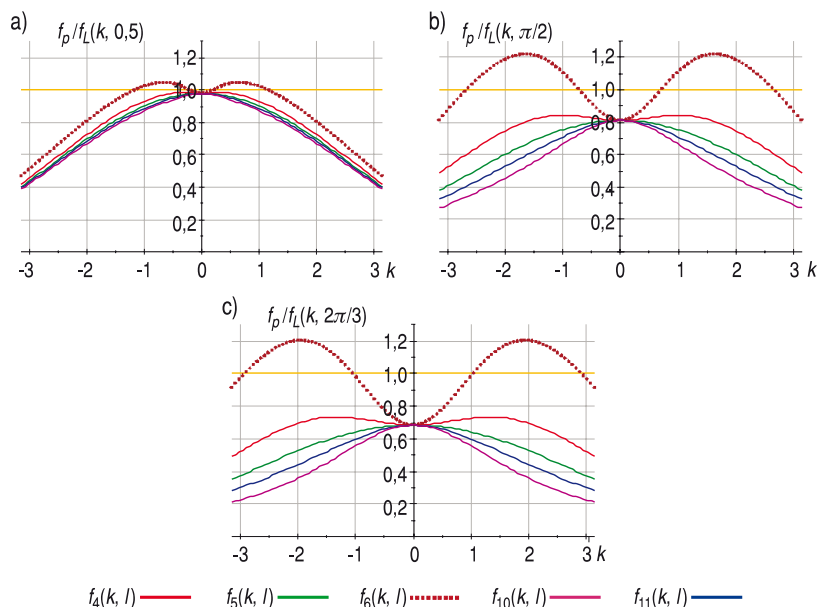


Rys. 33. Przebiegi relacji $f_p(k, l)/f_L(k, l)$ dla $l = 0,5$, $l = \pi/2$ i $l = 2\pi/3$. Poszczególne kolory dotyczą funkcji: $f_4(k, l)$, $f_5(k, l)$, $f_6(k, l)$, $f_{10}(k, l)$, $f_{11}(k, l)$

Na rysunku 33 zobrazowano przebiegi funkcji widmowych zależnych tylko od jednej zmiennej (liczby falowej k) dla wybranych wartości drugiej liczby falowej: $l = 0,5$ (rys. 33a), $l = \pi/2$ (rys. 33b) i $l = 2\pi/3$ (rys. 33c). W obszarach regularnych (małe wartości liczby falowej k , a $l = 0,5$) wybór maski filtra Laplace'a nie stanowi istotnego problemu. Wszystkie opisane w tym punkcie charakteryzują się podobnymi własnościami. W wąskim przedziale liczby falowej k wszystkie relacje $f_p(k, l)/f_L(k, l) > 0,90$. Ze wzrostem wartości tych liczb (obszary mniej regularne ze względu na wielkość liczby k , a $l = \pi/2$ i większe) wybór maski wymaga wcześniejszej analizy. Maski *Maxican hat*, KKM i TK — pomimo że są maskami piątego stopnia — wykazują wyraźnie większe własności dyssypacyjne od masek filtrów stopnia trzeciego (porównaj rysunki 34).

Poniżej (rys. 34) przytaczamy za [6] analogiczne przebiegi funkcji spektralnych masek liniowych filtrów Laplace'a trzeciego stopnia.

W celu dokładniejszej analizy rysunków 33 i 34 porównamy współczynniki wyrazów drugiego rzędu występujących w Π -formach pierwszych przybliżeń

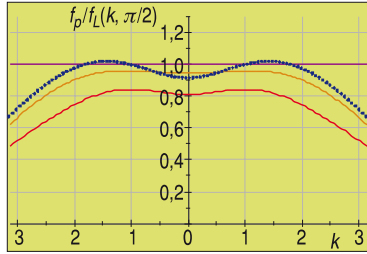


Rys. 34. Przebiegi relacji $f_p(k, l)/f_L(k, l)$ dla $l = 0,5$, $l = \pi/2$ i $l = 2\pi/3$. Poszczególne kolory dotyczą funkcji: $f_1(k, l)$ $f_2(k, l)$ $f_3(k, l)$ $f_7(k, l)$ $f_8(k, l)$

różniczkowych masek filtrów Laplace'a trzeciego i piątego stopnia. Wszystkie przytoczone poniżej (tab. 7) Π -formy mają własności dyssypacyjne. Współczynniki w masce Lap_6 przy wymienionych wyrazach są ponad trzy razy większe od współczynników w maskach filtrów Laplace'a trzeciego stopnia: $(68/240)/(1/12) = 3,4$. Natomiast w masce Lap_10 ponad cztery razy: $(84/240)/(1/12) = 4,2$. Tłumaczy to silniejsze własności dyssypacyjne masek KKM i TK — patrz rysunek 33. Wskaźnik ten w przypadku maski *Mexican hat* jest równy $(50/240)/(1/12) = 2,5$, a maski filtru Laplace'a piątego stopnia Lap_5 tylko 0,25. Te istotne różnice są uzasadnieniem graficznej interpretacji relacji $f_p(k, l)/f_L(k, l)$ — rysunki 33.

Nie mamy wątpliwości, że maska Lap_3 nie powinna być wykorzystywana w przetwarzaniu zdjęć cyfrowych (rys. 34b i c), a schemat różnicowy, od którego pochodzi — do dyskretnej aproksymacji operatora Laplace'a.

Na rysunku 35 zilustrowano przebiegi funkcji spektralnych $f_1(k, l)/f_L(k, l)$, $f_4(k, l)/f_L(k, l)$ i $f_5(k, l)/f_L(k, l)$ dla $l = \pi/2$ w funkcji liczby falowej k (dwie maski piątego stopnia i jedna trzeciego stopnia). Krzywa niebieska odpowiada relacji $f_5(k, l)/f_L(k, l)$, krzywa pomarańczowa — $f_4(k, l)/f_L(k, l)$, a krzywa czerwona — $f_1(k, l)/f_L(k, l)$.



Rys. 35. Przebiegi relacji $f_1(k, l)/f_l(k, l)$, $f_4(k, l)/f_l(k, l)$ i $f_5(k, l)/f_l(k, l)$ dla $l = \pi/2$

TABELA 7

II-formy wybranych masek filtrów Laplace’a (kolorem czerwonym zaznaczono wyrazy odpowiedzialne za kreację)

II-formy pierwszego przybliżenia różniczkowego masek filtrów Laplace’a trzeciego stopnia	
Lap_1	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^6}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \dots$
Lap_2	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^6}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^4}{72} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{h^6}{864} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \dots$
Lap_3	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^6}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) - \frac{h^6}{288} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \dots$
Lap_7	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^6}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^4}{36} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{h^6}{432} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \dots$
Lap_8	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^6}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^4}{48} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{h^6}{576} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \dots$
II-formy pierwszego przybliżenia różniczkowego masek filtrów Laplace’a piątego stopnia	
Lap_4	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{1}{90} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) - \frac{1}{1008} h^8 (k^8 + l^8) + 0(h^4)$

Lap_5	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{5}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{11}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) - \frac{30}{240} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} +$ $- \frac{15}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) - \frac{1}{1152} h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots$
Lap_6	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{68}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{52}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} +$ $- \frac{408}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{289}{3600} h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots$
Lap_10	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{84}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{68}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{248}{240} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} +$ $- \frac{412}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{319}{4320} h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots$
Lap_11	$\overline{\nabla^2 u} = \nabla^2 u + \frac{50}{240} h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{34}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{30}{240} h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} +$ $- \frac{15}{1440} h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{1}{1152} h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots$

Poniżej przedstawiamy zestawienie postaci widmowych operatorów masek konwolucyjnych liniowych filtrów Laplace'a trzeciego i piątego stopnia w rozwinięciu w szereg Taylora.

TABELA 8

Szeregi Taylora widmowych operatorów konwolucji (kolorem czerwonym zaznaczono wyrazy odpowiedzialne za kreację)

	$f(k, l) = -h^2(k^2 + l^2) \text{ — operator różniczkowy Laplace'a}$
	Maski filtrów trzeciego stopnia
Lap_1	$f_1(k, l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) + \dots$
Lap_2	$f_2(k, l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) +$ $+ \frac{2}{12} h^4 k^2 l^2 - \frac{10}{720} h^6 (k^4 l^2 + k^2 l^4) + \frac{h^8}{864} k^4 l^4 + \dots$

Lap_3	$f_3(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) +$ $- \frac{6}{12}h^4k^2l^2 + \frac{30}{720}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) - \frac{h^8}{288}k^4l^4 + \dots$
Lap_7	$f_7(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) +$ $+ \frac{4}{12}h^4k^2l^2 - \frac{20}{720}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{h^8}{432}k^4l^4 + \dots$
Lap_8	$f_8(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^4}{12}(k^4 + l^4) - \frac{h^6}{360}(k^6 + l^6) + \frac{h^8}{20160}(k^8 + l^8) +$ $+ \frac{3}{12}h^4k^2l^2 - \frac{15}{720}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{h^8}{576}k^4l^4 + \dots$
Maski filtrów piątego stopnia	
Lap_4	$f_4(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{h^6}{90}(k^6 + l^6) - \frac{h^8}{1008}(k^8 + l^8) + \dots$
Lap_5	$f_5(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{5}{240}h^4(k^4 + l^4) + \frac{11}{1440}h^6(k^6 + l^6) -$ $+ \frac{30}{240}h^4k^2l^2 - \frac{15}{1440}(k^4l^2 + k^2l^4) - \frac{h^8}{1152}k^4l^4 + \dots$
Lap_6	$f_6(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{68}{240}h^4(k^4 + l^4) - \frac{52}{1440}h^6(k^6 + l^6) + h^4k^2l^2 +$ $- \frac{408}{1440}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{289}{3600}h^8k^4l^4 + \dots$
Lap_10	$f_{10}(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{84}{240}h^4(k^4 + l^4) - \frac{68}{1440}h^6(k^6 + l^6) + \frac{248}{240}h^4k^2l^2 +$ $- \frac{412}{1440}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{319}{4320}h^8k^4l^4 + \dots$
Lap_11	$f_{11}(k,l) = -h^2(k^2 + l^2) + \frac{50}{240}h^4(k^4 + l^4) - \frac{34}{1440}h^6(k^6 + l^6) + \frac{30}{240}h^4k^2l^2 +$ $- \frac{15}{1440}h^6(k^4l^2 + k^2l^4) + \frac{h^8}{1152}k^4l^4 + \dots$

LITERATURA

- [1] M. BORAWSKI, *Obróbka wstępna obrazów*, [w:] *Metody Nawigacji Porównawczej*, pod red. A. Statecznego, Gdańskie Towarzystwo Naukowe, Gdynia, 2004.
- [2] W. BURGER, M.J. BURGE, *Digital Image Processing. An Algorithmic Introduction Using Java*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
- [3] A. ISERLES, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, University Press, Cambridge, 2009.
- [4] B. JÄHNE, *Digital Image Processing*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [5] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, J. JASIŃSKI, K. KROSZCZYŃSKI, S. PIETREK, *Maski wybranych krańcowych filtrów Laplace'a w przetwarzaniu danych cyfrowych*, Biul. WAT, 61, 1, 2012.
- [6] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, S. PIETREK, J. JASIŃSKI, K. KROSZCZYŃSKI, *Spektralne własności filtrów Laplace'a trzeciego stopnia w przetwarzaniu danych cyfrowych*, Biul. WAT, 61, 1, 2012.
- [7] K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, K. KROSZCZYŃSKI, S. PIETREK, J. JASIŃSKI, *Maski filtrów gradientowych w fotointerpretacji danych teledetekcyjnych*, Biul. WAT (złożony do druku).
- [8] P. KUPIDURA, P. KOZA, J. MARCINIAK, *Morfologia matematyczna w teledetekcji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2010.
- [9] S. MALLAT, *A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way*, Academic Press, Amsterdam, 2009.
- [10] I. PITAS, *Processing Algorithms and Application*, John Wiley & Sons, 2000.
- [11] D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1977.
- [12] J.C. STRIKWERDA, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [13] R. TADEUSIEWICZ, P. KOROHODA, *Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów*, Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków, 1997. Monografia dostępna również pod adresem internetowym: <http://winntbg.bg.agh.edu.pl/skrypty2/0098/>.

K. KRAWCZYK, I. WINNICKI, K. KROSZCZYŃSKI,
S. PIETREK, J. JASIŃSKI

Spectral properties of fifth order Laplace filters used for digital data processing

Abstract. Paper [5] begins a series of presentations of the results of research concerning matrices of convolution Laplace filters used for digital processing of images. Paper [6] discusses spectral properties of third order filters. This paper presents spectral properties of fifth order Laplace filters.

Using matrices, induced by differential schemes approximating the Laplace operator, the authors derived the Π -forms of the first differential approximation of the schemes, determined the spectral functions of the $f_p(k, l)$ amplification operators (where p is the matrix number explained in the paper body), presented graphical interpretation of these functions as well as the relation between the spectral function of the $f_p(k, l)$ differential operator and the $f_L(k, l)$ differential operator, i.e. the $f_p(k, l)/f_L(k, l)$ relation.

Spectral transfer operator (amplification operator), often called also transfer function, is a function characterizing properties of differential schemes approximating differential operators. Since they are relations derived in both spaces (continuous and discrete), comparing them facilitates assessment of the applied approximation method. Therefore, the transfer operator presents spectral properties of matrices of linear convolution filters as functions of k and l wave numbers. The values of $f_p(k, l)$ and $f_L(k, l)$ are indirectly generated by the lengths of the disturbances occurring during analyses of the

digital fields. This issue is described in detail in [6], where a method of deriving the $f_p(k, l)$ spectral functions is also presented in a concrete example. More details are available in [2, 4, 9, 10].

The course studies of the $f_p(k, l)$ functions will be used for presenting properties of the specific Laplace filters. The comparison will be conducted over a test field created in Matlab[®] by means of the peaks.m script. Legitimacy of this approach is justified by research results discussed in [5] and [6].

This paper's aim is mainly enhancing and systematizing the knowledge concerning fifth order Laplace filters and explaining those of their spectral properties which provide most information about the filters features in areas of large irregularities, i.e. significant differences in brightness of nearby points of digital images. Additionally, distinct differences in spectral functions courses related with various fifth order matrices will be shown. They were not so essential in case of third order matrices [6].

Paper [6] introduces the concept of the matrix goodness indicator (expressed as an absolute number) having the value of $D_p = f_p(k, l)/f_L(k, l)$ in a corner point of the domain, e.g. in (π, π) point. It will also be referred to in this paper.

Keywords: matrices of fifth order linear Laplace filters, spectral operator of amplification, differential methods, differential approximation form