



## Metoda generowania struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji typu 4-wymiarowego sześcianu

ROMAN KULESZA, ZBIGNIEW ZIELIŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, r.kulesza@ita.wat.edu.pl, z.zielinski@ita.wat.edu.pl

**Streszczenie.** W artykule podano model formalny struktury logicznej sieci procesorów typu sześcian czterowymiarowy oraz zdefiniowano pojęcie klasy kompozycji struktury. Zaproponowano metodę komponowania struktur logicznych sieci o określonych właściwościach za pomocą działań na wprowadzonej skondensowanej postaci struktury. Określono własności takich działań oraz podano zbiór wzorców, które mogą indukować poszukiwane struktury. Wyznaczono liczebności zbiorów spójnych i spójnych cyklicznych struktur etykietowanych oraz spójnych cyklicznych struktur nieetykietowanych, a także etykietowanych drzew o  $p \in \{4, \dots, 9\}$  procesorach. W ogólnym zarysie przedstawiono sposób takiej reprezentacji geometrycznej struktury, który zawiera wszystkie procesory i linie transmisji danych oraz ma minimalną liczbę przecięć linii krawędziowych.

**Słowa kluczowe:** informatyka, diagnostyka systemowa, struktura logiczna sieci, sieci typu sześcianu, systemy z tolerancją błędów

### 1. Wprowadzenie

W sieciach procesorów o łagodnej degradacji nie dokonuje się naprawy (ani wymiany) procesora, który uległ uszkodzeniu, lecz eliminuje się go z sieci (blokuje się dostęp do niego), a nowa (zdegradowana) sieć kontynuuje funkcjonowanie pod warunkiem, że spełnia określone wymagania.

Sieć procesorów ma strukturę logiczną typu sześcian 4-wymiarowy, jeżeli jej topologię opisuje taki spójny graf zwykły  $H^4$ , którego węzły można opisać 4-wymiarowymi wektorami binarnymi (etykietami), w ten sposób, że odległość Hamminga między wektorami opisującymi węzły przyległe równa się jeden.

Zauważmy, że graf  $H^4$  nie jest grafem planarnym.

Sieci o łagodnej degradacji i strukturze logicznej typu sześciian 4-wymiarowy są wynikiem rozwoju technologii wytwarzania procesorów przy użyciu układów scalonych o bardzo dużej skali integracji, należą do klasy sieci jednorodnych (homogenicznych), a więc, między innymi, o jednakowym prawdopodobieństwie uszkodzenia się dowolnego procesora. Sieci takie znajdują (głównie) zastosowanie w systemach czasu rzeczywistego, od których wymaga się dużej wiarygodności wyniku przetwarzania danych przez cały okres życia sieci, co osiąga się przez zastosowanie techniki diagnozowania systemowego na bieżąco.

Do zalet takich sieci należy stosunkowo długi okres życia, przy oczywiście monotonicznie malejącym potencjale obliczeniowym sieci.

Projektowanie oraz użytkowanie omawianych sieci rodzi wiele problemów analitycznych [1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 25] wynikających, między innymi, z potrzeby efektywnego wykorzystania wszystkich procesorów sieci, ustalenia zasad wybierania zdegradowanej (po uszkodzeniu się procesora) struktury logicznej sieci lub zakończenia jej życia, wybierania sposobu diagnozowania systemowego sieci zdegradowanej oraz dogodnej dla nadzorca sieci reprezentacji geometrycznej struktury logicznej sieci.

Do rozwiązania powyższych problemów niezbędna jest znajomość liczebności zbiorów możliwych zdegradowanych struktur logicznych sieci o określonych właściwościach oraz ich dogodna reprezentacja geometryczna.

Zasadniczym celem artykułu jest przedstawienie takiej metody komponowania struktur logicznych sieci typu sześciian 4-wymiarowy o określonych właściwościach z podgrafów sześciianu 3-wymiarowego o oznaczonym podzbiorze węzłów, która pozwoli określić liczebność zbioru tych struktur.

Celem jest wyznaczenie, za pomocą tej metody, liczebności zbiorów spójnych i spójnych cyklicznych (bez węzłów stopnia pierwszego) struktur etykietowanych oraz spójnych cyklicznych struktur nieetykietowanych, a także etykietowanych drzew o co najmniej czterech procesorach (tab. 3.1).

Artykuł składa się z czterech części oraz podsumowania. W części drugiej podano model formalny struktury logicznej sieci procesorów typu sześciianu 4-wymiarowego oraz zdefiniowano pojęcie klasy kompozycji struktury. W części trzeciej zaproponowano metodę komponowania struktur logicznych sieci o określonych właściwościach za pomocą działań na zaproponowanej skondensowanej postaci struktury. Określono własności takich działań oraz podano zbiór wzorców (rys. 3.5), które mogą indukować poszukiwane struktury. Wyznaczono liczebności zbiorów spójnych i spójnych cyklicznych struktur etykietowanych oraz spójnych cyklicznych struktur nieetykietowanych, a także etykietowanych drzew o  $p \in \{4, \dots, 9\}$  procesorach (tab. 3.1). W części czwartej przedstawiono (w ogólnym zarysie) sposób takiej reprezentacji geometrycznej struktury, który zawiera wszystkie procesory i linie transmisji danych oraz ma minimalną liczbę przecięć linii krawędziowych, co posiada znaczenie dla potrzeb zarządzania siecią.

W podsumowaniu sformułowano wnioski wynikające z wyników przedstawionych w artykule.

## 2. Podstawowe określenia i właściwości

Strukturę logiczną sieci procesorów nazywamy strukturą typu sześcianu  $\delta$ -wymiarowego ( $\delta \geq 3$ ), jeżeli opisuje ją taki spójny graf zwykły  $H^\delta = \langle E, U \rangle$  ( $E$  — zbiór procesorów,  $U$  — zbiór dwukierunkowych linii transmisji danych między procesorami), którego węzły można opisać  $\delta$ -wymiarowymi wektorami binarnymi (etykietami) w ten sposób, że odległość Hamminga między wektorami opisującymi węzły przyległe równa się jeden [14]. Graf  $H^\delta$  nazywa się sześcianem  $\delta$ -wymiarowym.

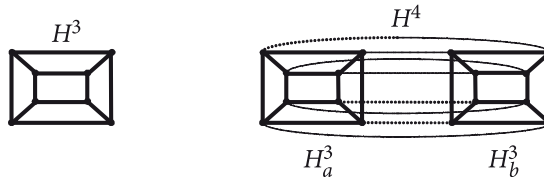
Niech  $\tilde{H}^\delta$  oznacza graf  $H^\delta$  o opisanych (etykietowanych) węzłach, a  $\tilde{G}_p(H^\delta)$  oraz  $\tilde{G}_p(\tilde{H}^\delta)$ , odpowiednio, zbiór spójnych nieetykietowanych oraz etykietowanych podgrafów grafu  $H^\delta$  rzędu  $p$ .

Zauważmy, że do wybrania najkorzystniejszego w określonym sensie sposobu diagnozowania sieci zdegradowanej wystarcza znajomość struktury  $G \in \tilde{G}(H^4)$ , natomiast do probabilistycznej oceny właściwości sieci (na przykład jej żywotności), konieczna jest znajomość liczby  $\nu(G)$  możliwych sposobów przypisania etykiet węzłom struktury  $G$ .

Graf  $H^\delta$  jest grafem regularnym stopnia  $\delta$ , to jest takim, że stopień  $\mu(e) = |E(e)|$  ( $E(e)$  — zbiór węzłów przyległych do węzła każdego węzła grafu) jest równy  $\delta$ .

Graf  $H^\delta$  ( $\delta > 3$ ) nie jest grafem planarnym, a więc graf  $H^4$  wygodnie jest przedstawiać [14] w postaci kompozycji pary planarnych grafów bliźniaczych  $H_a^3$  i  $H_b^3$  (rys. 2.1), przy czym:

$$E(H^4) = E(H_a^3) \cup E(H_b^3) \text{ oraz } U(H^4) = U(H_a^3) \cup U(H_b^3) \cup U^* (|U^*| = 2^3).$$



Rys. 2.1. Sześciany  $H^3$  oraz  $H^4 = H_a^3 \oplus H_b^3$

Strukturę  $G \in \tilde{G}(H^4)$  będziemy traktować jako kompozycję podgrafów  $\langle E(G) \rangle_{H_a^3}$  i  $\langle E(G) \rangle_{H_b^3}$  grafu  $G$  w podsześcianach bliźniaczych  $H_a^3$  i  $H_b^3$  sześcianu  $H^4$  (rys. 2.2).

Wektor  $\langle \alpha_a(G), \alpha_b(G), \alpha(G) \rangle, (\alpha_a(G) \geq \alpha_b(G))$ ,

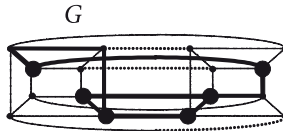
gdzie  $\alpha_x(G) = \left| E(\langle E(G) \rangle_{H_x^3}) \right|, (x \in \{a, b\})$

oraz

$\alpha(G) = \left| \{u \in U(G) : (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_a^3}) \neq \emptyset) \wedge (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3}) \neq \emptyset)\} \right|$ ,

$(E(u) —$  zbiór węzłów incydentnych z krawędzią  $u$ ) wyznacza klasę kompozycji struktury  $G \in \tilde{G}(H^4)$ .

Jeżeli węzły  $e' \in E(\langle E(G) \rangle_{H_a^3})$  i  $e'' \in E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3})$  są bliźniacze ( $E(e') \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3}) \neq \emptyset$ ), to mówimy, że są one śladami grafu  $G \in \tilde{G}(H^4)$  odpowiednio w podsześcianie  $H_a^3$  i  $H_b^3$ . Dla przykładu struktura (rys. 2.2) należy do klasy kompozycji  $\langle 5, 4, 3 \rangle$ .



Rys. 2.2. Struktura  $G \in \tilde{G}^C(H^4)$  należy do klasy kompozycji  $\langle 5, 4, 3 \rangle$  (zaznaczono ślady struktury)

### 3. Metoda komponowania struktur logicznych sieci

Zasadniczym problemem [11] warunkującym efektywne komponowanie struktur o określonych właściwościach jest sposób wybrania kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa tych struktur ułatwiający, między innymi, wykrywanie struktur podobnych.

Niech  $B(E)$ , gdzie  $E \subseteq E(H_x^3), x \in (a, b)$ , oznacza zbiór węzłów bliźniaczych zbioru  $E$ .

Jako kanoniczny reprezentant struktury  $G' \in \tilde{G}(H^4)$  wybierzemy taki podgraf  $K(G')$  grafu  $H_a^3$ , który jest sumą grafów  $\langle E(G') \rangle_{H_a^3}$  i  $\langle B(E(\langle E(G') \rangle_{H_b^3})) \rangle_{H_a^3}$  o wyróżnionych węzłach bliźniaczych grafu  $G'$  i tych krawędziach, które nie są krawędziami grafu  $\langle E(G') \rangle_{H_a^3}$ , a więc

$$K(G') = \langle \langle E(G') \rangle_{H_a^3} \cup \langle B(E(\langle E(G') \rangle_{H_b^3})) \rangle_{H_a^3}, \{B(E(G')) \cap E(H_a^3)\}, \{B(U(\langle E(G') \rangle_{H_b^3})) \setminus U(\langle E(G') \rangle_{H_a^3})\} \rangle.$$

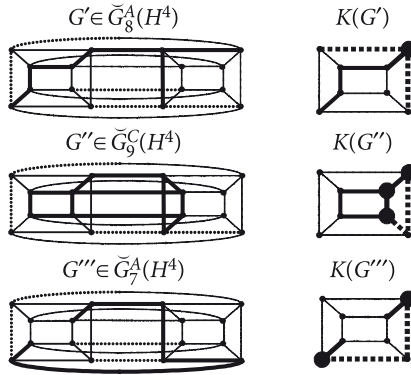
Graf  $K(G')$  nazywamy skondensowanym obrazem grafu  $G' \in \tilde{G}(H^4)$ . Węzły zbioru  $\{B(E(G')) \cap E(H_a^3)\}$  oznaczamy przez ich wytłuszczenie, a krawędzie zbioru  $\{B(U(\langle E(G') \rangle_{H_b^3})) \setminus U(\langle E(G') \rangle_{H_a^3})\}$  przedstawiamy w postaci linii kropkowanych.

Zauważmy, że graf  $K(G')$  jest grafem spójnym, chociaż graf  $\langle E(G') \rangle_{H_a^3}$  nie musi być grafem spójnym, oraz jest grafem płaskim, a graf  $G'$  nie musi być grafem planarnym.

Niech  $\tilde{G}_p^A(H^4)$  oraz  $\tilde{G}_p^C(H^4)$  oraz oznaczają odpowiednio zbiory acyklicznych oraz cyklicznych nieetykietowanych struktur o  $p$  procesorach.

Dla przykładu (rys. 3.1) grafy  $K(G')$ ,  $K(G'')$  i  $K(G''')$  są skondensowanymi obrazami struktur  $G'$ ,  $G''$  i  $G'''$ , przedstawionych w postaci podgrafów grafu  $H_a^3 \oplus H_b^3$ .

Syntezę struktur, zarówno zbioru  $\tilde{G}(H^4)$  jak i zbioru  $\tilde{G}(\tilde{H}^4)$  o określonych właściwościach, możemy przeprowadzać za pomocą działań algebraicznych na takich podgrafach grafu  $H_a^3$  o oznaczonych podzbiórach węzłów i krawędzi, które są skondensowanymi obrazami tych struktur.



Rys. 3.1. Przykłady skondensowanych obrazów struktur  $G'$ ,  $G''$  i  $G'''$

Niech  $\langle G; \dot{E} \rangle$  oznacza graf  $G \in G(H_a^3)$  o oznaczonym zbiorze  $\dot{E} \subseteq E(G)$  węzłów, a  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$  ( $E^* \subseteq \{E(H_a^3) \setminus E(G)\}$ ,  $|E^*| \leq |E(G)| - |\dot{E}|$ ) — spójny podgraf grafu  $H_a^3$ , który jest rozszerzeniem grafu  $\langle G; \dot{E} \rangle$  o zbiór węzłów  $E^*$  oraz o zbiór krawędzi  $\dot{U}$ ,

$$\dot{U} = \{u \in \{U(H_a^3) \setminus U(G)\} : (E(u) \subseteq E^*) \vee ((E(u) \cap E^* \neq \emptyset) \wedge (E(u) \cap \dot{E} \neq \emptyset))\}.$$

Węzły zbioru  $\dot{E}$  oznaczamy przez ich wyłuszczenie, a krawędzie zbioru  $\dot{U}$  przedstawiamy w postaci linii kropkowych.

**Lemat 3.1.** Graf  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$  ( $\dot{E} = \{B(E(G')) \cap E(H_a^3)\}$ ) jest skondensowanym obrazem takiej struktury  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$ , że  $p = |E(G)| + |\dot{E}| + |E^*|$ , bowiem z założenia jest grafem spójnym oraz  $\{U(\langle B(E(\langle E(G') \rangle_{H_a^3})) \rangle_{H_a^3}) \setminus U(G)\} = \dot{U}$ .

Określimy podstawowe właściwości grafu  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$  oraz zależności między jego właściwościami a właściwościami struktury  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$ , której jest

skondensowanym obrazem. Pozwoli to określać między innymi liczebności zbiorów  $\tilde{G}_p(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^c(\tilde{H}^4)$  i  $\tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 4$ ) za pomocą działań na grafach  $G(\langle\langle G; \dot{E} \rangle, E^* \rangle)$ .

**Własność 3.1.** Jeżeli grafy  $G(\langle\langle G, \dot{E}' \rangle, E_1^* \rangle)$  i  $G(\langle\langle G, \dot{E}'' \rangle, E_2^* \rangle)$  ( $|E'| = |E''|, |E_1^*| = |E_2^*|$ ) są izomorficzne, to struktury  $G'$  i  $G''$  ( $\{G', G''\} \subset \tilde{G}(H^4)$ ), które są ich obrazami skondensowanymi, są również izomorficzne.

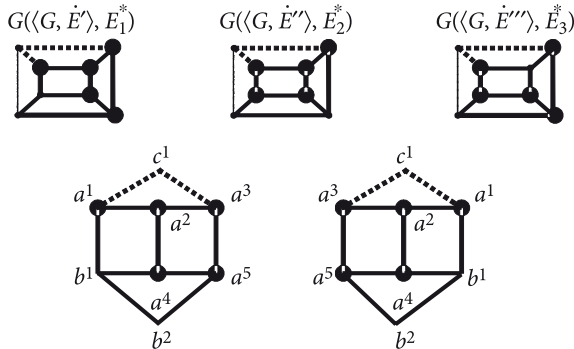
Graf  $G(\langle\langle G, \dot{E} \rangle, E^* \rangle)$  ma trzy rodzaje węzłów: węzły zbioru  $\dot{E}$ , węzły zbioru  $\{E(G) \setminus \dot{E}\}$  oraz węzły zbioru  $E^*$ .

Grafy  $G(\langle\langle G, \dot{E}' \rangle, E_1^* \rangle)$  i  $G(\langle\langle G, \dot{E}'' \rangle, E_2^* \rangle)$  ( $|E'| = |E''|, |E_1^*| = |E_2^*|$ ) są izomorficzne, jeżeli dla oznaczenia węzła rozróżniającego ich rodzaj istnieje permutacja, przekształcająca jeden graf w drugi, oraz nie są izomorficzne, jeżeli jeden z nich ma cechę, której nie ma drugi.

Zauważmy, że stwierdzanie (lub wykluczanie) izomorfizmu grafów  $G(\langle\langle G, \dot{E}' \rangle, E_1^* \rangle)$  i  $G(\langle\langle G, \dot{E}'' \rangle, E_2^* \rangle)$  może być wykonane przy dogodnych do tego celu ich postaciach automorficznych.

Dla przykładu (rys. 3.2) grafy  $G(\langle\langle G, \dot{E}' \rangle, E_1^* \rangle)$  i  $G(\langle\langle G, \dot{E}'' \rangle, E_2^* \rangle)$  są izomorficzne, bowiem permutacja  $(a^2)(a^4)(b^2)(c^1)(a^1, a^3)(a^5, b^1)$  przekształca jeden graf w drugi, natomiast graf  $G(\langle\langle G, \dot{E}''' \rangle, E_3^* \rangle)$  nie jest izomorficzny (z poprzednimi grafami), bowiem każda jego krawędź jest incydentna ze zbiorem  $\dot{E}'''$ , a cechy tej nie mają poprzednie grafy.

Oznaczmy przez  $S(G')$  zbiór składowych spójności grafu  $G'$ .



Rys. 3.2. Grafy  $G(\langle\langle G, \dot{E}' \rangle, E_1^* \rangle)$  i  $G(\langle\langle G, \dot{E}'' \rangle, E_2^* \rangle)$  są izomorficzne, a graf  $G(\langle\langle G, \dot{E}''' \rangle, E_3^* \rangle)$  nie jest z nimi izomorficzny

**Lemat 3.2.** Jeżeli graf  $G(\langle\langle G; \dot{E} \rangle, E^* \rangle)$  jest skondensowanym obrazem struktury cyklicznej  $G' \in \tilde{G}_p^c(H^4)$ , to  $\forall_{e \in \{E(G(\langle\langle G; \dot{E} \rangle, E^* \rangle) \setminus \dot{E})\}} : \mu(e) \geq 2$  to oraz

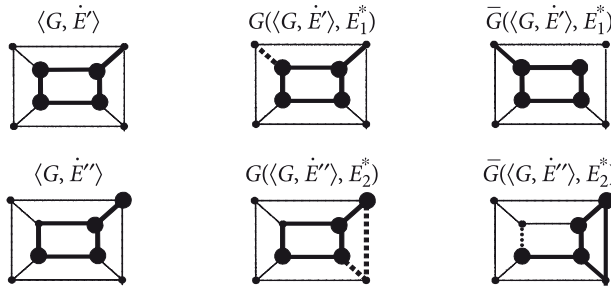
$$[\exists_{e' \in \dot{E}} : \{E(e') \cap \dot{E}\} = \emptyset] \Rightarrow [ \exists_{e'' \in \{\dot{E} \setminus e'\}} \exists_{s \in S(\langle\langle \{e \in E(u); u \in \dot{U}\} \rangle_{G(\langle\langle G; \dot{E} \rangle, E^* \rangle)})} : \{e', e''\} \subset E(s)]$$

bowiem w przeciwnym razie istniałby taki węzeł  $e^* \in E(\langle\langle G(G') \rangle_{H_p^4})$ , że  $\mu(e^*, G') = 1$  lub  $\mu(B(e^*), G') = 1$ , co przeczy założeniu, że struktura  $G'$  jest strukturą cykliczną.

Oznaczmy  $\bar{G}(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*) = \langle \{ \{ E(G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)) \} \setminus \{ E(G) \setminus \dot{E} \} \} \rangle_{G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)}$ .

**Lemat 3.3.** Jeżeli graf oznaczony  $\langle G; \dot{E} \rangle$  indukuje w ustalonej klasie kompozycji taką strukturę  $G' \in \tilde{G}_p(H^4) (p \geq 6)$ , że  $\langle E(G') \rangle_{H_a^3} \doteq \langle E(G') \rangle_{H_b^3}$ , to istnieje taki skondensowany obraz  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*) (p = |E(G)| + |\dot{E}| + |E^*|)$  struktury  $G'$ , że  $\bar{G}(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*) \doteq \langle G; \dot{E} \rangle$ , bowiem  $\langle B(E(\bar{G}(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*))) \rangle_{H_b^3} = \langle E(G') \rangle_{H_b^3}$ .

Dla przykładu (rys. 3.3) graf oznaczony  $\langle G; \dot{E}' \rangle (G \in G(H_a^3))$  indukuje w klasie kompozycji  $\langle 5, 5, 4 \rangle$  skondensowany obraz  $G(\langle G; \dot{E}' \rangle, E_1^*)$  struktury  $G' \in \tilde{G}_{10}^A(H^4)$ , przy czym  $\bar{G}(\langle G; \dot{E}' \rangle, E_1^*) \doteq \langle G; \dot{E}' \rangle$ . Analogicznie graf oznaczony  $\langle G; \dot{E}'' \rangle$  indukuje w tej samej klasie kompozycji skondensowany obraz  $G(\langle G; \dot{E}'' \rangle, E_2^*)$  struktury  $G'' \in \tilde{G}_{10}^C(H^4)$ , przy czym  $\bar{G}(\langle G; \dot{E}'' \rangle, E_2^*) \doteq \langle G; \dot{E}'' \rangle$ .



Rys. 3.3. Ilustracja sposobu sprawdzania, czy grafy  $\bar{G}(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$  i  $\langle G; \dot{E} \rangle$  są izomorficzne

Niech  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$  oznacza zbiór skondensowanych obrazów struktur zbioru  $\tilde{G}(H^4)$ , który indukuje graf  $\langle G; \dot{E} \rangle$  o oznaczonych węzłach w klasie kompozycji  $s = \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle$ . Obrazy grafów zbioru  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$  wynikają z obrazu grafu  $\langle G; \dot{E} \rangle$  i wartości  $s$ . Dla przykładu (rys. 3.4):  $|G(\langle G; \dot{E}' \rangle, \langle 5, 3, 1 \rangle)| = 2$ ,  $|G(\langle G; \dot{E}'' \rangle, \langle 5, 3, 1 \rangle)| = 0$ .



Rys. 3.4. Ilustracja indukowania skondensowanych obrazów struktur zbioru  $\tilde{G}(H^4)$  przez graf oznaczony  $\langle G; \dot{E} \rangle (G \in \tilde{G}(H_a^3))$  w klasie kompozycji  $\langle 5, 3, 1 \rangle$

Niech  $\hat{G}(H_a^3)$  oznacza zbiór takich podgrafów grafu  $H_a^3$ , dla których istnieje taki zbiór  $\dot{E} \subseteq E(G) (G \in \hat{G}(H_a^3))$  i taka kompozycja  $s \in \Psi_6$  ( $\Psi_6$  — zbiór takich kompozycji  $s = \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle$ , że  $\alpha_a + \alpha_b \geq 6$ ), że  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, s) \neq \emptyset$ , a  $\bar{G}(H_a^3)$  oraz  $\hat{G}(H_a^3)$ , odpowiednio — zbiór spójnych oraz niespójnych podgrafów grafu  $H_a^3$ . Zbiór  $\hat{G}(H_a^3)$  nazywamy zbiorem wzorców, które mogą indukować struktury zbioru  $\tilde{G}_p(H^4) (p \geq 6)$ .

Następująca własność nie wymaga dowodu.

**Własność 3.2.**  $[(G \in \tilde{G}(H_a^3)) \wedge (|E(G)| \geq 3)] \Rightarrow [G \in \hat{G}(H_a^3)].$

Zauważmy, że jeżeli graf  $\langle G; \dot{E} \rangle (G \in \tilde{G}(H_a^3))$  indukuje graf  $G' \in \tilde{G}(H^4)$  w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a = \alpha_b$ , to istnieje taki graf  $G'' \in \tilde{G}(H^4)$ , indukowany przez graf  $\langle \langle E(G') \rangle_{H_b^3}; B(\dot{E}(G)) \rangle$  w tej samej klasie kompozycji, że grafy  $G'$  i  $G''$  są izomorficzne.

Do zbioru wzorców  $\hat{G}(H_a^3)$  zaliczymy tylko te grafy zbioru  $\hat{G}(H_a^3)$ , które mogą indukować struktury zbioru  $\tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 6$ ) w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a > \alpha_b$ .

**Twierdzenie 3.1.** Jeżeli graf  $G \in \hat{G}(H_a^3)$  indukuje strukturę  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 6$ ) w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a > \alpha_b$ , to  $|E(G)| \in \{4, 5\}$  i  $|S(G)| = 2$ .

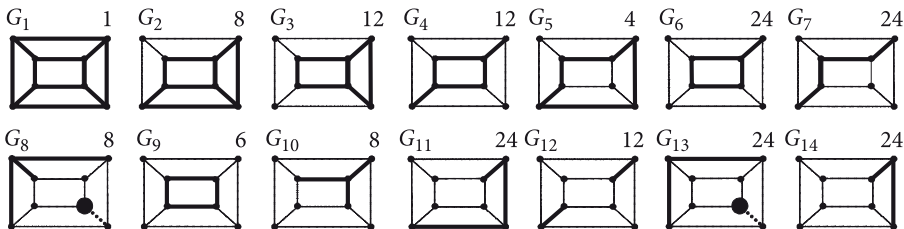
*Dowód.* Jeżeli graf  $G \in \hat{G}(H_a^3)$  może indukować strukturę  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 6$ ), to istnieje graf  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$ , który jest skondensowaną postacią struktury  $G'$ . Zauważmy, że

$$[G \in \hat{G}(H_a^3)] \Rightarrow [((|E(G)| \leq 5) \wedge (|S(G)| \leq 4)) \wedge ((|S(G)| > 2) \Rightarrow (|E(G)| = |S(G)|))].$$

Graf  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, E^*)$  jest grafem spójnym, a więc  $|\dot{E}| \geq |S(G)|$  i  $|E^*| \geq 1$ , natomiast z warunku  $\alpha_a > \alpha_b$  wynika, że  $|E(G)| > |\dot{E}| + |E^*|$ , a więc  $|E(G)| > |S(G)| + 1$ . Tak więc, wykazany został warunek konieczny.

Istnieją trzy grafy ( $G_8, G_{12}$  i  $G_{13}$ , rys. 3.5), które spełniają warunek konieczny. Dla każdego z nich istnieje taki zbiór  $\dot{E} \subset E(G)$  ( $|\dot{E}| = 2$ ) i taki węzeł  $e^* \in \{E(H_a^3) \setminus E(G)\}$ , że  $(\forall_{s \in S(G)} : \{E(s) \cap \dot{E}\} \neq \emptyset) \wedge (|\{E(e^*) \cap \dot{E}\}| = 2)$ , a więc graf  $G(\langle G; \dot{E} \rangle, \{e^*\})$  jest grafem spójnym oraz  $|E(G)| > |\dot{E}| + |E^*|$ . Tak więc, każdy z tych grafów może indukować strukturę  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 6$ ) w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a > \alpha_b$ .

Zbiór wzorców  $\hat{G}(H_a^3)$ , które mogą indukować struktury  $G' \in \tilde{G}_p(H^4)$ , ( $p \geq 6$ ) oraz liczebność  $\nu(G)$ , ( $G \in \hat{G}(H_a^3)$ ), grupy węzłowej (zbioru przekształceń automorficznych) grafu  $G$  przedstawiono na rysunku 3.5 (sposób określenia liczby  $\nu(G)$  można znaleźć w [9, 14].



Rys. 3.5. Zbiór  $\hat{G}(H_a^3)$  wzorców, które mogą indukować struktury  $\tilde{G}_p(H^4)$  ( $p \geq 6$ ) (podano liczebność grupy węzłowej grafu  $G \in \hat{G}(H_a^3)$ )



Niech  $\eta^{\&}(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$  ( $\& \in \{A, C\}$ ) oraz  $\eta_I^{\&}(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$  oznaczają odpowiednio liczbę takich grafów  $G' \in \tilde{G}^{\&}(H_a^3 \oplus H_b^3)$  indukowanych przez  $\langle G; \dot{E} \rangle$  ( $G \in \hat{G}(H_a^3)$ ) w klasie kompozycji, że grafy  $\bar{K}(G')$  i  $\langle G; \dot{E} \rangle$  nie są oraz są izomorficzne.

Zauważmy, że jeżeli  $\bar{K}(G') \doteq \langle G; \dot{E} \rangle$ , to struktura  $G'$  jest indukowana w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a = \alpha_b$ , natomiast jeżeli struktura  $G'$  jest indukowana w takiej klasie kompozycji, że  $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$ , to  $\bar{K}(G') \doteq \langle G; \dot{E} \rangle$ .

Zauważmy, że  $[\exists_{e \in \dot{E}} \exists_{e' \in \dot{E}} : e \in E(e')] \Rightarrow [(e, e') \in U(K(G'))]$ , bowiem  $(B(e), B(e')) \in U(G')$  oraz  $[\exists_{e' \in \dot{E}} : E(e') \cap \dot{E} = \emptyset] \Rightarrow [\mu(B(e'), G') = 1]$ . Tak więc, ze skondensowanego obrazu  $K(G')$  struktury  $G' \in \tilde{G}(H^4)$  wynika bezpośrednio, czy struktura  $G'$  jest strukturą cykliczną, czy też acykliczną, to jest

$$[(\forall_{e \in E(K(G'))} : \mu(e) > 1) \wedge (\forall_{e' \in \dot{E}} : E(e') \cap \dot{E} \neq \emptyset) \Rightarrow [G' \in \tilde{G}^C(H^4)] \text{ oraz}$$

$$[(\exists_{e \in E(K(G'))} : \mu(e) = 1) \vee (\exists_{e' \in \dot{E}} : E(e') \cap \dot{E} = \emptyset)] \Rightarrow [G' \in \tilde{G}^A(H^4)].$$

Zapis  $[\eta^A(\langle G; \dot{E} \rangle, s) \eta_I^A(\langle G; \dot{E} \rangle, s)] [\eta^C(\langle G; \dot{E} \rangle, s) \eta_I^C(\langle G; \dot{E} \rangle, s)]$  nazywamy charakterystyką indukcyjną wzorca oznaczonego  $\langle G; \dot{E} \rangle$  w klasie kompozycji  $s$ .

Zauważmy, że liczba sposobów przypisania etykiet węzłom grafu  $G'$  równa się  $2\nu(G)$  lub  $\nu(G)$  zależnie od tego odpowiednio, czy grafy  $\bar{K}(G')$  i  $\langle G; \dot{E} \rangle$  nie są, czy też są izomorficzne.

Tak więc liczbę etykietowanych oraz nietykietowanych struktur indukowanych przez wzorec  $G \in \hat{G}(H_a^3)$  w klasie kompozycji  $s$  określają (odpowiednio) zależności:

$$|\tilde{G}^{\&}(G, s, \tilde{H}^4)| = \nu(G) \sum_{\dot{E}' \in E_\alpha(G)} (2\eta^{\&}(\langle G; \dot{E}' \rangle, s) + \eta_I^{\&}(\langle G; \dot{E}' \rangle, s)), \quad (3.1)$$

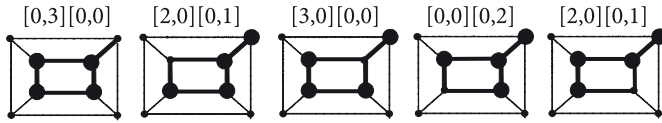
$$|\tilde{G}^{\&}(G, s, H^4)| = |\bar{\bar{G}}^{\&}(\langle G; \dot{E} \rangle, s)|, \quad (3.2)$$

gdzie  $E_\alpha(G) = \{E' \subseteq E(G) : |E'| = \alpha\}$ , a  $\bar{\bar{G}}^{\&}(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$  oznacza zredukowany (bez grafów izomorficznych) zbiór  $G^{\&}(\langle G; \dot{E} \rangle, s)$ .

Przykładowo (rys. 3.6) dla każdego grafu  $\langle G_6; \dot{E}' \rangle$  ( $G_6 \in \hat{G}(H_a^3)$ ,  $\dot{E}' \in E_4(G_6)$ ) określono charakterystykę indukcyjną w klasie kompozycji  $s = \langle 5, 5, 4 \rangle$ , o czym można upewnić się, przedstawiając obrazy grafów zbiorów  $G^{\&}(\langle G_6; \dot{E} \rangle, s)$ . Z zależności (3.1) otrzymujemy  $|\tilde{G}_{10}^A(G_6, s, \tilde{H}^4)| = \nu(G_6)[2 \cdot 7 + 3] = 408$  oraz  $|\tilde{G}_{10}^C(G_6, s, \tilde{H}^4)| = \nu(G_6)[4] = 96$ .

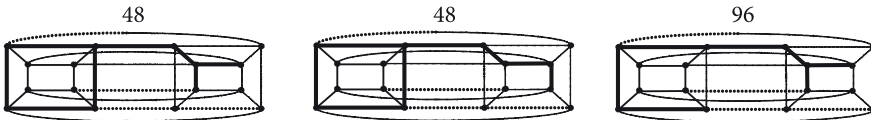
Można upewnić się, że:  $|G^A(\langle G_6; \dot{E} \rangle, s)| = 10$ ;  $|\bar{\bar{G}}^A(\langle G_6; \dot{E} \rangle, s)| = 6$ ;  $|G^C(\langle G_6; \dot{E} \rangle, s)| = 4$  oraz  $|\bar{\bar{G}}^C(\langle G_6; \dot{E} \rangle, s)| = 2$ , a więc  $|\tilde{G}^A(G, s, H^4)| = 6$  oraz  $|\tilde{G}^C(G, s, H^4)| = 2$ .

Mówimy, że wzorce  $G'$  i  $G''$  ( $\{G', G''\} \subset \hat{G}(H_a^3)$ ,  $|E(G')| = |E(G'')|$ ),  $G'$  i  $G''$  nie są izomorficzne są sprzężone, jeżeli istnieje taka struktura  $G \in \tilde{G}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ , że jej ślady w  $H_a^3$  i  $H_b^3$  są tymi wzorcami.



Rys. 3.6. Charakterystyki indukcyjne wzorca  $G_6$  (rys. 3.5) w klasie kompozycji  $\langle 5, 5, 4 \rangle$

Zauważmy, że istnieją tylko trzy pary wzorców sprzężonych, a mianowicie:  $(G_9, G_{10})$ ;  $(G_9, G_{11})$  i  $(G_{11}, G_{10})$  (rys. 3.5, rys. 3.7), przy czym struktura, dla której one istnieją, jest strukturą acykliczną rzędu ósmego, a więc liczebność zbioru  $\tilde{G}_8^A(\tilde{H}^4)$  jest równa wartości uzyskanej z zależności (3.1) pomniejszonej o 192.



Rys. 3.7. Struktury zbioru  $\tilde{G}(H_a^3 \oplus H_b^3)$  których ślady w  $H_a^3$  i  $H_b^3$  są wzorcami sprzężonymi (podano liczbę sposobów przypisania etykiet węzłom struktury)

Niech  $\tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4)$  oznacza zbiór spójnych podgrafów grafu  $H^4$ , które są drzewami o  $p$  węzłach ( $p \geq 6$ ).

Zauważmy, że skondensowana postać  $K(G')$  struktury  $G' \in \tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4)$  jest drzewem, a więc struktury zbioru  $\tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4)$  mogą indukować tylko takie pary  $\langle G, \hat{E} \rangle$ , że graf  $G \in \hat{G}(H_a^3)$  nie ma cyklu i zbiór  $\hat{E}$  jest zbiorem wewnątrznie stabilnym oraz tylko w takich klasach kompozycji, że rozszerzenia (grafu  $G$ ) nie indukują cyklu.

Po obliczeniach wykonanych dla wzorców (rys. 3.5) i możliwych klas kompozycji  $s \in \Psi_6$  wyznaczono liczebności zbiorów  $\tilde{G}_p(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^C(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^C(H^4)$ ,  $\tilde{G}_p^A(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^A(H^4)$ ,  $\tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4)$  i  $\tilde{G}_p^D(H^4)$  dla procesorów (tab. 3.1).

TABELA 3.1

$p$	9	8	7	6	5	4
$ \tilde{G}_p(\tilde{H}^4) $	7744	4896	3464	1568	736	280
$ \tilde{G}_p(H^4) $	37	31	16	9	4	3
$ \tilde{G}_p^C(\tilde{H}^4) $	1392	664	112	128	0	24
$ \tilde{G}_p^C(H^4) $	8	6	2	2	0	1
$ \tilde{G}_p^A(\tilde{H}^4) $	6352	4232	3352	1440	736	256

cd. tabeli 3.1

$ \tilde{G}_p^A(H^4) $	29	25	14	7	4	2
$ \tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4) $	240	632	1384	720	544	256
$ \tilde{G}_p^D(H^4) $	2	4	5	3	3	2

#### 4. Reprezentacja geometryczna struktur logicznych sieci

Przedstawianie struktury  $G' \in \tilde{G}(H^4)$  w postaci podgrafu grafu  $H_a^3 \oplus H_b^3$  oraz w postaci skondensowanej  $K(G')$  okazało się efektywnym narzędziem do określenia liczebności zbiorów  $\tilde{G}_p(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^C(\tilde{H}^4)$ ,  $\tilde{G}_p^C(H^4)$  i  $\tilde{G}_p^D(\tilde{H}^4)$ , ( $p \geq 6$ ), nie jest jednak reprezentacją geometryczną dogodną do realizowania zadań wynikających z potrzeb zarządzania siecią, na przykład do wyznaczania nowej struktury diagnozowania sieci po jej degradacji.

Obraz struktury  $G'$  w postaci podgrafu grafu  $H_a^3 \oplus H_b^3$  w wielu przypadkach (szczególnie dla znacznej liczby procesorów) nie jest grafem płaskim, a obraz skondensowany nie przedstawia (bezpośrednio) wszystkich procesorów i linii transmisji danych sieci.

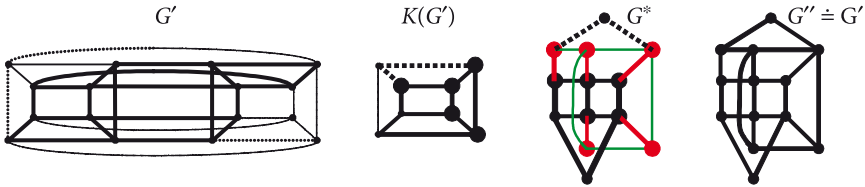
Interesuje nas taka reprezentacja geometryczna struktury  $G' \in \tilde{G}(H^4)$ , która zawiera wszystkie procesory i linie transmisji danych oraz ma minimalną liczbę  $\gamma(G')$  przecięć linii krawędziowych.

Jest więc to szczególnie, stosunkowo łatwy przypadek problemu, znanego w teorii grafów planarnych oraz w wielu zastosowaniach (na przykład w projektowaniu wielowarstwowych płytek drukowanych).

Każde takie rozszerzenie  $G''$  dowolnej postaci automorficznej grafu  $\langle G; \dot{E} \rangle$ , indukującego strukturę  $G'$  o zbiór węzłów  $\{E(G') \setminus E(G)\}$ , które zachowuje relacje przyległości między węzłami (w grafie  $G'$ ), że  $\gamma(G'')$  ma wartość minimalną, jest poszukiwanym rozwiązaniem.

Dla przykładu (rys. 4.1) grafy  $G'$ ,  $K(G')$  i  $G''$  przedstawiają tę samą (z dokładnością do izomorfizmu) cykliczną strukturę logiczną sieci o trzynastu procesorach, przy czym  $\gamma(G') = 8$ , a  $\gamma(G'') = 3$ . Graf  $G'$  pokazuje sposób przekształcenia grafu  $K(G')$  do postaci  $G''$  (graf  $\langle G; \dot{E} \rangle$  przedstawiono w postaci automorficznej; kolorem czerwonym oznaczono węzły bliźniacze do węzłów zbioru  $\dot{E}$ ; węzły bliźniacze węzłów przyległych są również przyległe).

Zauważmy, że z obrazu grafu  $G'$  wynika (zależność 3.1), że istnieją 64 sposoby przypisania etykiet procesorom struktury, bowiem jest ona indukowana przez graf  $G_2 \in \hat{G}(H^3)$  (rys. 3.5) o określonym zbiorze  $\dot{E}$  węzłów oznaczonych w klasie kompozycji  $\langle 7, 6, 5 \rangle$ , natomiast z grafu  $G''$  trudno to wywnioskować.



Rys. 4.1. Ilustracja sposobu przekształcenia struktury  $G' \in \tilde{G}_{13}^C(H^4)$  do postaci  $G''$

## 5. Podsumowanie

Zaproponowana metoda komponowania struktur logicznych sieci o określonych właściwościach za pomocą działań na skondensowanej postaci struktury okazała się metodą efektywną.

Korzystając z tej metody, określono liczebności zbiorów spójnych struktur etykietowanych, spójnych cyklicznych struktur etykietowanych i nieetykietowanych oraz etykietowanych drzew, zawierających  $p \in \{4, \dots, 9\}$  procesorów (tab. 3.1).

Zaproponowana metoda komponowania struktur logicznych sieci umożliwia także wyznaczenie charakterystyki łagodnej degradacji sieci cyklicznej oraz rozkładu prawdopodobieństwa liczby uszkodzeń procesorów sieci, po której przestaje ona być siecią cykliczną. Analogiczne właściwości sieci dla przypadku, gdy kryterium zakończenia jej życia polegało na utraceniu przez sieć detekcji jednego procesora metodą  $MM^*$ , określono w pracy [14].

Okazało się, że liczba spójnych cyklicznych struktur nieetykietowanych, które są podstawą do projektowania struktur dwudiagnozowalnych, jest stosunkowo mała (tab. 3.1), a więc można (dla potrzeb zarządzania siecią) opracować ich katalog, przedstawiając je w dogodnej reprezentacji geometrycznej (pkt 4).

Uzyskane wyniki wskazują, że potrzebny jest komputerowy analizator struktur logicznych rozpatrywanej sieci jako narzędzie wspomagające zarządzanie eksploataowaniem tego typu siecią.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2011 jako projekt badawczy Nr O514051135.

Artykuł wpłynął do redakcji 29.03.2011 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2011 r.

### LITERATURA

- [1] A. CARUSO, S. CHESSA, P. MAESTRINI, P. SANTI, *Diagnosability of Regular Systems*, J. Algorithms, vol. 1, no. 1, 2002, 1-12.
- [2] C. P. CHANG, P. L. LAI, J. J. M. TAN, L. H. HSU, *Diagnosability of  $t$ -Connected Networks and Product Networks under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 2004, 1582-1590.
- [3] G. Y. CHANG, G. H. CHEN, G. J. CHANG, *( $t, k$ )-Diagnosis for Matching Composition Networks*, IEEE Trans. Comput., 55, 1, 2006, 88-92.

- [4] G. Y. CHANG, G. H. CHEN, G. J. CHANG, *(t, k)-Diagnosis for Matching Composition Networks under the MM\* Model*, IEEE Trans. Comput., 56, 1, 2007, 73-79.
- [5] S. L. HAKIMI, A. T. AMIN, *Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput., 23, 1, 1974, 86-88.
- [6] S. H. HSIEH, Y. S. CHEN, *Strongly Diagnosable Product Networks Under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 57, 6, 2008, 721-732.
- [7] R. KULESZA, A. K. WACH, *The Determination of a 2-optimal Digraphs Set for a One-Step Diagnosis of System*. 9th IMEKO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, September 1999, Wrocław, Poland, 153-158.
- [8] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, J. CHUDZIKIEWICZ, *Reconfiguration of the Ring Structure in a Hypercube Computer Network with Faulty Links*, 9th IMEKO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, 22-24 September 1999, Wrocław, Poland, 159-164.
- [9] R. KULESZA, *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, 222.
- [10] R. KULESZA, *Metoda przeliczania 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2001, 16, 19-34.
- [11] R. KULESZA, *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2004, 20, 3-21.
- [12] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Wnikliwość diagnozowania sieci procesorów metodą porównawczą*, Systemy czasu rzeczywistego, Postępy badań i zastosowania, Warszawa, WKŁ, 2009, 199-210.
- [13] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Diagnosis resolution of processors' network using the comparison method*, Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), 9, 2010, 157-162.
- [14] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *The life period of the hypercube processors' network diagnosed with the use of the comparison method*, Technical Approach To Dependability, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2010, 65-78.
- [15] P. L. LAI, J. J. M. TAN, C. H. TSAI, L. H. HSU, *The Diagnosability of the Matching Composition Network under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 8, 2004.
- [16] P. L. LAI, J. J. M. TAN, C. P. CHANG, L. H. HSU, *Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems*, IEEE Trans. Comput., 54, 2, Feb. 2005, 165-175.
- [17] J. MAENG, M. MALEK, *A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems*, Digest Int'l Symp. FTC, 1981, 173-175.
- [18] M. MALEK, *A Comparison Connection Assignment for Diagnosis of Multiprocessor Systems*, Proc. Seventh Int'l Symp. Computer Architecture, 1980, 31-35.
- [19] F. P. PREPARATA, G. METZE, R. T. CHIEN, *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput., 6, 1967.
- [20] A. SENGUPTA, A. T. DAHURA, *On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach*, IEEE Trans. Comput., 41, 11, Nov. 1992, 1386-1396.
- [21] A. K. SOMANI, O. PELEG, *On Diagnosability of Large Fault Sets in Regular Topology-Based Computer Systems*, IEEE Trans. Comput., 45, 8, 1996, 892-903.
- [22] D. WANG, *Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 48, 12, 1999, 1369-1374.
- [23] X. YANG, Y. Y. TANG, *Efficient Fault Identification of Diagnosable Systems under the Comparison Model*, IEEE Trans. Comput., 56, 12, 2007, 1612-1618.
- [24] Z. ZIELIŃSKI, *Algorytm wyznaczania wzorca alternatywnych stanów niezdatności systemu diagnozowanego metodą opiniowania diagnostycznego*, Biul. WAT, 4, 2008, 219-232.

- [25] Z. ZIELIŃSKI, Ł. STRZELECKI, R. KULESZA, *Diagnosability characterization of the 4-dimensional cube type soft degradable processors' network*, Monographs On System Dependability and Modelling, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2011, 283-296.

R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI

**A method of logical structures generation of 4-dimensional cube type processors' network with soft degradation**

**Abstract.** A formal model of the logical structure of a 4-dimensional cube-type processor network is presented, and the concept of a composition structure class is defined. The paper proposes a method for creating logical network structures with specific properties with the help of actions on the proposed condensed structure form. Properties of such actions were defined, and a set of patterns were provided which may induce the searched structures. The number of coherent sets and coherent cyclic labelled structures as well as coherent cyclic non-labelled structures, as well labelled and non-labelled trees with processors were determined. The article presents (in general terms) geometric representation of the structure, which contains all the processors and data transmission lines and has a minimal number of intersections of edge lines, which is important for network management.

**Keywords:** informatics, system level diagnosis, network logical structure, hypercube network, fault-tolerant systems