



Zdolność sieci procesorów typu sześcián 4-wymiarowy do lokalizacji dwóch niezdatnych procesorów metodą porównawczą

ZBIGNIEW ZIELIŃSKI, ŁUKASZ STRZELECKI, ROMAN KULESZA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, z.zielinski@ita.wat.edu.pl, r.kulesza@ita.wat.edu.pl

Streszczenie. W artykule opisano model formalny struktury logicznej sieci procesorów typu sześcián 4-wymiarowy oraz właściwości diagnozowania sieci metodą porównawczą MM^f . Określono wpływ stopnia degradacji sieci na zmianę jej 2-diagnozowalności, jak również na zmianę jej zdolności do lokalizacji dwóch niezdatnych procesorów. Posługując się zbiorem węzłów wewnątrznie stabilnych struktury cyklicznej o p procesorach ($p \geq 6$), określono warunek konieczny i wystarczający, aby struktura ta nie była strukturą 2-diagnozowalną i wyznaczono zbiór takich struktur. Określono częstość zdarzenia, że diagnozowanie metodą porównawczą MM^f cyklicznej sieci typu sześcián 4-wymiarowy o p procesorach, która nie jest siecią 2-diagnozowalną, nie zapewni zlokalizowania dwóch niezdatnych procesorów sieci.

Słowa kluczowe: informatyka, diagnostyka systemowa, model porównawczy, struktura logiczna sieci, sieci procesorowe typu sześcián

1. Wprowadzenie

Artykuł niniejszy jest kontynuacją artykułu [26].

W sieciach procesorowych o łagodnej degradacji nie dokonuje się naprawy (ani wymiany) procesora, który uległ trwałemu uszkodzeniu, lecz eliminuje się go z sieci (blokuje się dostęp do niego), a nowa (zdegradowana) sieć kontynuuje funkcjonowanie pod warunkiem, że spełnia określone wymagania. Sieci takie są wynikiem rozwoju technologii wytwarzania procesorów przy użyciu układów scalonych o bardzo dużej skali integracji, należą do klasy sieci jednorodnych (homogenicznych) i znajdują (głównie) zastosowanie w systemach czasu rzeczywistego.

Analizujemy przypadek, gdy struktura logiczna sieci pierwotnej (niezdegradowanej) jest typu sześcianu 4-wymiarowego, a strukturą logiczną sieci zdegradowanej — taka najbardziej liczna (w sensie liczby procesorów) spójna struktura cykliczna o, co najmniej, sześciu procesorach.

Przyjmuje się, że komunikacja między procesorami jest bezbłędna, a każdy procesor może być zdalny bądź niezdalny.

Stopniem degradacji sieci nazywamy różnicę między liczbą procesorów sieci pierwotnej a liczbą procesorów sieci zdegradowanej.

Celem artykułu jest zbadanie, jak często dla określonego stopnia degradacji sieci może wystąpić przypadek, gdy diagnozowanie sieci metodą porównawczą MM^* [2, 4, 6, 16, 18, 19] nie zapewnia lokalizacji dwu niezdatnych procesorów.

Artykuł składa się z czterech części oraz podsumowania. W części drugiej opisano model formalny struktury logicznej sieci procesorów typu sześcianu 4-wymiarowego oraz właściwości diagnozowania sieci metodą MM^* . W części trzeciej określono wpływ stopnia degradacji sieci na zmianę jej 2-diagnozowalności, a w części czwartej — na zmianę jej zdolności do lokalizacji dwu niezdatnych procesorów. W podsumowaniu sformułowano wnioski wynikające z wyników przedstawionych w artykule.

2. Podstawowe określenia i własności

Niech H^δ oznacza graf zwykły, który jest sześcianem δ -wymiarowym ($\delta \geq 3$), a $\tilde{G}(H^\delta)$ oraz $\tilde{G}^C(H^\delta)$ odpowiednio, zbiór spójnych oraz zbiór spójnych cyklicznych (bez węzłów stopnia pierwszego) podgrafów grafu H^δ .

Graf H^δ jest grafem regularnym stopnia δ , to jest takim, że stopień $\mu(e) = |E(e)|$ ($E(e)$ — zbiór węzłów przyległych do węzła $e \in E$) każdego węzła grafu jest równy δ .

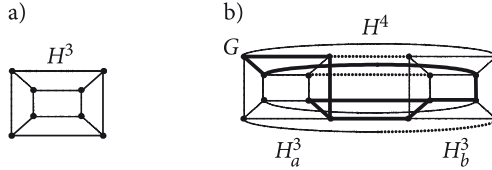
Strukturę logiczną $G \in \tilde{G}(H^4)$ ($G = \langle E, U \rangle$, E — zbiór procesorów sieci, U — zbiór dwukierunkowych linii transmisji danych sieci procesorów, typu sześcianu 4-wymiarowego, będziemy przedstawiać [14, 15] jako kompozycję podgrafów $\langle E \rangle_{H_a^3}$ i $\langle E \rangle_{H_b^3}$ grafu G w podsześcianach bliźniaczych H_a^3 i H_b^3 sześcianu H^4 (rys. 2.1).

Wektor $\langle \alpha_a(G), \alpha_b(G), \alpha(G) \rangle$ ($\alpha_a(G) \geq \alpha_b(G)$), gdzie

$$\alpha_x(G) = \left| E(\langle E(G) \rangle_{H_x^3}) \right| (x \in \{a, b\}) \text{ oraz}$$

$\alpha(G) = \left| \{u \in U(G) : (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_a^3}) \neq \emptyset) \wedge (E(u) \cap E(\langle E(G) \rangle_{H_b^3}) \neq \emptyset)\} \right|$
 $E(u)$ — zbiór węzłów incydentnych z krawędzią u wyznacza klasę kompozycji struktury $G \in \tilde{G}(H_a^3 \oplus H_b^3)$.

Dla przykładu struktura G (rys. 2.1) należąca do klasy kompozycji $\langle 5, 4, 3 \rangle$ jest strukturą 2-diagnozowalną metodą PMC [20] i nie jest strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^* [18, 19, 24, 26].



Rys. 2.1. a) sześcian H^3 ; b) sześcian H^4 i struktura $G \in \tilde{G}^C(H_a^3 \oplus H_b^3)$

Węzły grafu $G \in \tilde{G}(H^4)$ można opisać 4-wymiarowymi wektorami binarnymi w ten sposób, że odległość Hamminga między wektorami opisującymi (etykietującymi) węzły przyległe równa się jeden.

Znana jest [14, 26] metoda określenia liczby $\nu(G)$ sposobów przypisania etykiet węzłom grafu $G \in \tilde{G}(H_a^3 \oplus H_b^3)$.

Zakłada się, że linie transmisji danych sieci procesorów są zdatne, a procesory sieci mogą być zdatne lub niezdatne.

Mówimy, że struktura logiczna $G \in \tilde{G}^C(H^4)$ sieci procesorów jest t -diagnozowalna, jeżeli umożliwia rozróżnienie takich dowolnych zbiorów E' i E'' ($E' \subset E(G), E'' \subset E(G)$) niezdatnych procesorów, że $|E'| \leq t$ i $|E''| \leq t$.

Diagnozowanie sieci metodą MM^* polega na wnioskowaniu z wyników wszystkich możliwych dla struktury logicznej sieci G prób porównawczych, w każdej z nich uczestniczą trzy procesory. Jeden z nich $e^* \in E$, zwany komparatorem, zleca procesorom e' i e'' ($\{e', e''\} \subset E(e^*)$) jednakowe zadanie oraz sprawdza, czy wyniki wykonania tego zadania są identyczne. Zbiór $\{e', e''\}$ nazywamy parą porównawczą.

Niech ψ oznacza próbę porównawczą, $\Psi(G)$ — zbiór wszystkich możliwych (dla struktury G) prób porównawczych, $E(\psi)$ — zbiór procesorów uczestniczących w próbie ψ , a $K(\psi)$ oraz $P(\psi)$, odpowiednio, komparator próby ψ oraz jej parę porównawczą.

Niech E^1 oraz E^0 oznacza, odpowiednio, zbiór niezdatnych oraz zdatnych procesorów sieci, a $d(\psi, E^1)$ — wynik próby porównawczej ψ dla zbioru E^1 niezdatnych procesorów, przy czym $d(\psi, E^1) = 0$ oznacza, że wyniki uzyskane od obu porównywanych procesorów są identyczne, a $d(\psi, E^1) = 1$ — przeciwnie.

Przy diagnozowaniu metodą MM^* obowiązuje następująca reguła wnioskowania z wyniku próby porównawczej $\psi \in \Psi(G)$:

$$\begin{aligned}
& [(K(\psi) \in E^0) \wedge (P(\psi) \cap E^1 = \emptyset)] \Rightarrow [d(\psi, E^1) = 0]; \\
& [(K(\psi) \in E^0) \wedge (P(\psi) \cap E^1 \neq \emptyset)] \Rightarrow [d(\psi, E^1) = 1]; \\
& [(K(\psi) \in E^1) \Rightarrow [d(\psi, E^1) = x, x \in \{0, 1\}].
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Zbiory E' i E'' niezdatnych procesorów sieci są rozróżnialne przez próbę porównawczą ψ , jeżeli

$$\begin{aligned}
& [K(\psi) \in E \setminus \{E' \cup E''\}] \wedge [(P(\psi) \cap E' = \emptyset) \vee (P(\psi) \cap E'' = \emptyset)] \wedge \\
& \wedge [((P(\psi) \cap E' = \emptyset) \Rightarrow (P(\psi) \cap E'' \neq \emptyset)) \vee \\
& \vee ((P(\psi) \cap E' \neq \emptyset) \Rightarrow (P(\psi) \cap E'' = \emptyset))].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sieć procesorów o strukturze logicznej G jest siecią t -diagnozowalną metodą MM^* , jeżeli każda para takich zbiorów E' i E'' niezdatnych procesorów, że $|E'| \leq t$ i $|E''| \leq t$ jest rozróżnialna za pomocą jakiejś próby porównawczej $\psi \in \Psi(G)$.

Wiadomo [21], że warunkiem koniecznym, aby sieć procesorów o strukturze logicznej G była siecią t -diagnozowalną metodą MM^* , jest, aby

$$(|E| \geq 2t + 1) \wedge (\mu(e) \geq t \ (e \in E)). \tag{2.3}$$

Niech $\check{G}_p(\check{H}^4)$ oraz $\check{G}_p^C(\check{H}^4)$ oznacza, odpowiednio, zbiór spójnych oraz zbiór spójnych cyklicznych, etykietowanych struktur roboczych sieci o pierwotnej strukturze logicznej typu H^4 zawierających p ($6 \leq p \leq 16$) procesorów.

Zauważmy, że $(p \geq 14) \Rightarrow (\check{G}_p^C(\check{H}^4) = \check{G}_p(\check{H}^4))$.

Oznaczmy $\gamma_{\check{H}^4}^C(p) = |\check{G}_p^C(\check{H}^4) \setminus \check{G}_p(\check{H}^4)|^{-1}$ ($4 \leq p \leq 16$).

W pracy [15] określono (między innymi) liczby $|\check{G}_p(\check{H}^4)|$ oraz $|\check{G}_p^C(\check{H}^4)|$ ($p \in \{4, \dots, 8\}$) (tab. 2.1), a tym samym uzyskano funkcję $\gamma_{\check{H}^4}^C(p)$.

TABELA 2.1

	8	7	6	5	4
$ \check{G}_p(\check{H}^4) $	4896	3464	1568	736	280
$ \check{G}_p^C(\check{H}^4) $	664	112	128	0	24
$\gamma_{\check{H}^4}^C(p)$	0,136	0,032	0,082	0	0,086

3. Wpływ stopnia degradacji sieci na zmianę jej 2-diagnozowalności

Niech $\check{G}_p^{M_2^*}(\check{H}^4)$ oznacza zbiór etykietowanych struktur logicznych sieci o p procesorach, które są 2-diagnozowalne metodą MM^* , a $\check{G}_p^{CM_2^*}(H^4)$ ($p \geq 6$) — zbiór nieetykietowanych, cyklicznych struktur, które nie są 2-diagnozowalne tą metodą.

Oznaczmy $\gamma_{H^4}^{M_2^*}(p) = |\check{G}_p^{M_2^*}(\check{H}^4) \parallel \check{G}_p^C(\check{H}^4)|^{-1}$ ($6 \leq p \leq 16$).
Zauważmy, że

$$\gamma_{H^4}^{M_2^*}(p) = 1 - \left| \check{G}_p^C(\check{H}^4) \right|^{-1} \sum_{G \in \check{G}_p^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)} \nu(G), \tag{3.1}$$

bowiem $[G \in \check{G}_p^{CM_2^*}(H^4)] \Rightarrow [\nu(G) = \sum_{G' \in \check{G}_p^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)} \nu(G')]$.

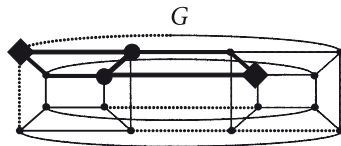
Wyznamy zbiory $\check{G}_p^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ ($p \geq 6$) i liczby $\nu(G)$ ($G \in \check{G}_p^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$).

Z zależności 2.2 wynika, bezpośrednio, następujący lemat.

Lemat 3.1. Sieć procesorów o strukturze logicznej $G \in \check{G}^C(H^4)$ ($|E(G)| \geq 6$) nie jest siecią 2-diagnozowalną za pomocą zbioru prób porównawczych $\Psi(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} & \exists_{E' \subset E^1(G): |E'| \leq 2} \exists_{E'' \subset E^1(G): |E''| \leq 2} : [\forall_{e \in \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\}} \forall_{\psi \in \Psi(G): K(\psi) = e} : \\ & : (P(\psi) \cap E' \neq \emptyset) \wedge (P(\psi) \cap E'' \neq \emptyset) \wedge \\ & \wedge (P(\psi) \cap \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\} = \emptyset)]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dla przykładu (rys. 3.1) struktura $G \in \check{G}_6^C(H_a^3 \oplus H_b^3)$ nie jest strukturą 2-diagnozowalną za pomocą zbioru prób porównawczych $\Psi(G)$, bowiem dla zbiorów E' i E'' (oznaczonych przez \bullet i \blacklozenge) niezdatnych procesorów spełniona jest zależność (3.2).



Rys. 3.1. Struktura $G \in \check{G}_6^C(H_a^3 \oplus H_b^3)$ nie jest strukturą 2-diagnozowalną za pomocą zbioru prób porównawczych $\Psi(G)$ (dla zbiorów E' i E'' (oznaczonych przez \bullet i \blacklozenge) niezdatnych procesorów spełniona jest zależność (3.2))

Lemat 3.2. Jeżeli spełniona jest zależność (3.2), to

$$\begin{aligned} & [\{e \in \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\} : \mu(e) = 4\} = \emptyset] \wedge \\ & \wedge [\{e' \in \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\} : \mu(e') = 3\} \leq 1]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dowód. Maksymalna liczba prób o tym samym komparatorze $e \in \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\}$, dla których spełniona jest zależność (3.2), równa się 3 i ma miejsce wtedy, gdy

$$(|E'| = |E''| = 2) \wedge (|E' \cap E''| = 1) \wedge (E(e) = \{E' \cup E''\}).$$

Jeżeli $\mu(e) = 4$, to $|\{\psi \in \Psi(G) : K(\psi) = e\}| = \binom{4}{2} > 3$, a więc istnieje taka próba $\psi' \in \Psi(G)$, że $K(\psi') = e$, dla której zależność (3.2) nie jest spełniona.

Gdyby natomiast $|\{e \in \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\} : \mu(e) = 3\}| > 1$ i zależność (3.2) była spełniona, to musiałyby istnieć takie węzły e^* i e^{**} ($\{e^*, e^{**}\} \subset \{E(G) \setminus \{E' \cup E''\}\}$, $\mu(e^*) = \mu(e^{**}) = 3$), że $E(e^*) = E(e^{**})$, co przeczy własności grafu G , bowiem $\forall_{\{e', e''\} \subset E(G); \mu(e') = \mu(e'') = 3} : E(e') \neq E(e'')$.

Niech $\dot{E}(G) (\dot{E}(G) \subset E(G), G \in \check{G}^C(H^4))$ oznacza taki zbiór wewnętrznie stabilny grafu G (podgraf $\langle \dot{E}(G) \rangle_G$ jest grafem pustym, to jest $U(\langle \dot{E}(G) \rangle_G) = \emptyset$), że zbiór $E(G) \setminus \dot{E}(G) (|E(G) \setminus \dot{E}(G)| \geq |\dot{E}(G)|)$ jest również zbiorem wewnętrznie stabilnym grafu G .

Z własności struktury $G \in \check{G}^C(H^4)$, lematu 3.2 oraz definicji zbioru wewnętrznie stabilnego $\dot{E}(G)$ i próby porównawczej $\psi \in \Psi(G)$ wynikają natychmiast następujące własności [26].

Własność 3.1. Dla struktury $G \in \check{G}^C(H^4)$ istnieje, co najmniej, jeden zbiór $\dot{E}(G)$, bowiem $\forall_{e \in E(G)} : (e' \in E(e)) \Rightarrow (\{E(e') \setminus \{e\}\} \cap E(e)) = \emptyset$ oraz cykle zbioru $\check{G}^C(H^4)$ mają parzystą liczbę węzłów, przy czym $|\dot{E}(G)| \leq \lfloor 2^{-1} |E(G)| \rfloor$.

Własność 3.2. $\forall_{e \in E(G)} \exists_{\psi \in \Psi(G)} : K(\psi) = e$ gdyż $\forall_{e \in E(G)} : \mu(e) \geq 2$ oraz $\forall_{\psi \in \Psi(G); K(\psi) \in \dot{E}(G)} : P(\psi) \subset \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}$ i $\forall_{\psi' \in \Psi(G); K(\psi') \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}} : P(\psi') \subset \dot{E}(G)$.

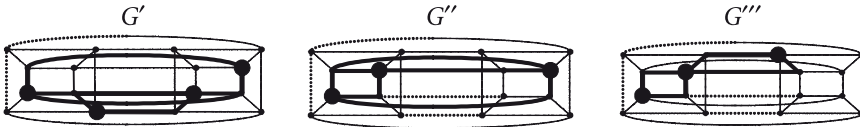
Własność 3.3. Jeżeli $G \in \check{G}_p^{CM_2^*}(H^4) (p \geq 6)$, to $|\dot{E}(G)| \in \{3, 4\}$.

Z lematu 3.2 oraz własności 3.1-3.3 wynika bezpośrednio następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. Struktura $G \in \check{G}^C(H^4) (|E(G)| \geq 6)$ nie jest strukturą 2-dianozowalną metodą MM^* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}
 & [|\dot{E}(G)| \in \{3, 4\}] \wedge [((|\dot{E}(G)| = 3) \Rightarrow (|\{e \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\} : \mu(e) = 3\}| \leq 1)) \vee \\
 & \vee ((|\dot{E}(G)| = 4) \Rightarrow (\{e \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\} : \mu(e) = 3\} = \emptyset))].
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Dla przykładu (rys. 3.2) struktura G' jest strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^* , a struktury G'' i G''' nie są strukturami 2-diagnozowalnymi metodą MM^* .



Rys. 3.2. Ilustracja twierdzenia 3.1: $G' \notin \check{G}_8^{CM_2^*}(H^4)$, a $\{G'', G'''\} \subset \check{G}_7^{CM_2^*}(H^4)$ (zaznaczono węzły zbiorów wewnątrznie stabilnych $\dot{E}(G')$, $\dot{E}(G'')$ i $\dot{E}(G''')$)

Zauważmy, że jeżeli $G \in \check{G}^{CM_2^*}(H^4) (|E(G)| \geq 6)$, to $\dot{E}(G) \subseteq \{E' \cup E''\}$ oraz $\{e \in E(G) : \mu(e) = 4\} \subseteq \dot{E}(G)$.

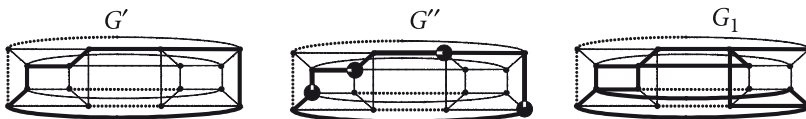
Własność 3.4. Jeżeli $G \in \check{G}^{CM_2^*}(H^4)$ i $|\dot{E}(G)| = 4$ to $\forall_{e \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}} : \mu(e) = 2$ bowiem, gdyby istniał taki węzeł $e' \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}$, że $\mu(e') > 2$, to istniałaby taka próba ψ , że $K(\psi) = e'$, dla której zależność (3.2), nie byłaby spełniona, gdyż $(|\dot{E}(G)| = 4) \Rightarrow (E' \cap E'' = \emptyset)$.

Własność 3.5. Cykl $G \in \check{G}^C(H^4) (|E(G)| \geq 6)$ należy do zbioru $\check{G}^{CM_2^*}(H^4)$.

Własność 3.6. Jeżeli struktura $G' \in \check{G}(H^4) (|E(G')| \geq 6)$ jest cyklem, to struktura $\langle E(G') \cup \{e^*\} \rangle_{H^4}$, gdzie e^* oznacza taki węzeł zbioru $E(H^4) \setminus \dot{E}(G')$, że $|E(e^*) \cap \dot{E}(G')| = 2$, również nie jest strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^* , bowiem $\forall_{\{e', e''\} \subset E(H^4) : \{E(e') \cap E(e'')\} \neq \emptyset} : |E(e') \cap E(e'')| = 2$.

Własność 3.7. Jeżeli struktura $G \in \check{G}^{CM_2^*}(H^4)$ jest strukturą najliczniejszą, w sensie liczby węzłów, to $(|\dot{E}(G)| = 4) \wedge (\forall_{e \in \dot{E}(G)} : \mu(e) = 4) \wedge (\forall_{e' \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}} : \mu(e') = 2)$.

Aby wyznaczyć dowolny obraz (reprezentację geometryczną) najliczniejszej struktury $G_1 \in \check{G}^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ (rys. 3.3), wystarczy wybrać najliczniejszy cykl $G' \in G(H_a^3 \oplus H_b^3)$, wybrać zbiór $\dot{E}(G')$ (tworząc graf oznaczony G'') oraz wyznaczyć, zgodnie z własnością (3.6), najliczniejszy nadgraf grafu G'' .



Rys. 3.3. Ilustracja sposobu wyznaczenia najliczniejszej struktury cyklicznej G_1 , która nie jest strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^*

Zauważmy, że wszystkie wygenerowane w powyższy sposób najliczniejsze struktury zbioru $\tilde{G}^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ są izomorficzne i należą do symetrycznej klasy kompozycji $\langle 6, 6, 4 \rangle$, a więc liczba takich etykietowanych struktur równa się 12.

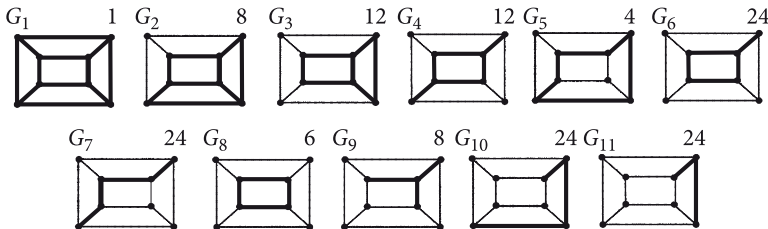
Własność 3.8.

Jeżeli $G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4)$ ($p \geq 6$) i graf $G' = \langle E(G) \setminus \{e'\} \rangle_G$ ($e' \in \{E(G) \setminus \dot{E}(G)\}$) jest spójnym grafem cyklicznym, to $G' \in \tilde{G}_{p-1}^{CM_2^*}(H^4)$, bowiem $\dot{E}(G') = \dot{E}(G)$.

Własność 3.9.

Jeżeli $G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4)$ ($p \geq 6$) i graf $G'' = \langle E(G) \setminus \{\{e''\} \cup E(e'')\} \rangle_G$ ($e'' \in \dot{E}(G)$) jest spójnym grafem cyklicznym, to $G'' \in \tilde{G}_{p-3}^{CM_2^*}(H^4)$, bowiem $\dot{E}(G'') = \{\dot{E}(G) \setminus \{e''\}\}$.

Aby wyznaczyć $|\tilde{G}_p^{CM_2^*}(\tilde{H}^4)|$ ($p \geq 6$), co jest naszym celem, wystarczy określić zbiór par $\langle G', \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle \rangle$ ($G' \in G(H_a^3)$), które indukują strukturę $G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(\tilde{H}^4)$ i zsumować liczbę struktur indukowanych przez takie pary $\langle G', \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle \rangle$, że $|E(G')| = \alpha_a$ i $\alpha_a + \alpha_b = p$.



Rys. 3.4. Grafy $G' \in \tilde{G}(H_a^3)$, które indukują struktury zbioru $\tilde{G}_p^C(H^4)$ ($p \geq 6$) (podano liczbę $\nu(G')$ sposobów przypisania etykiet węzłom grafu G')

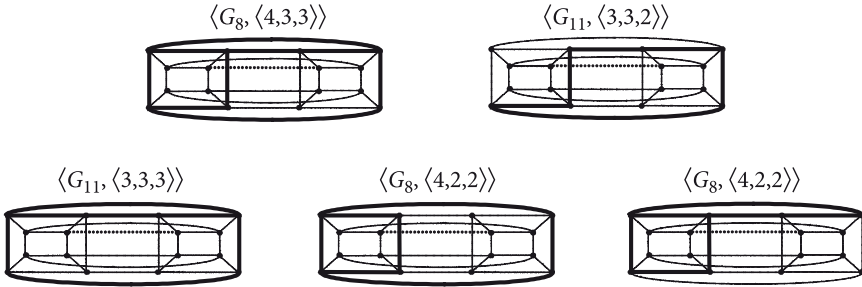
Wiadomo [14, 15], że strukturę $G \in \tilde{G}_p^C(H^4)$ mogą indukować tylko takie pary $\langle G', \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle \rangle$, że $G' \in \tilde{G}(H_a^3)$ (rys. 3.4).

Zauważmy, że (zgodnie z twierdzeniem 3.1) zbiór $\tilde{G}_p^{CM_2^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ ($p \geq 6$) jest indukowany przez pary zbioru $\mathfrak{S} = \{\langle G_4, \langle 6, 6, 4 \rangle \rangle, \langle G_2, \langle 7, 0, 0 \rangle \rangle, \langle G_8, \langle 4, 3, 3 \rangle \rangle\}$ oraz (zgodnie z własnościami 3.8 i 3.9) — takie pary $\langle G', \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle \rangle$, które odpowiadają spójnym, cyklicznym, rzędu, co najmniej, szóstego, podgrafom grafów indukowanych przez parę zbioru \mathfrak{S} .

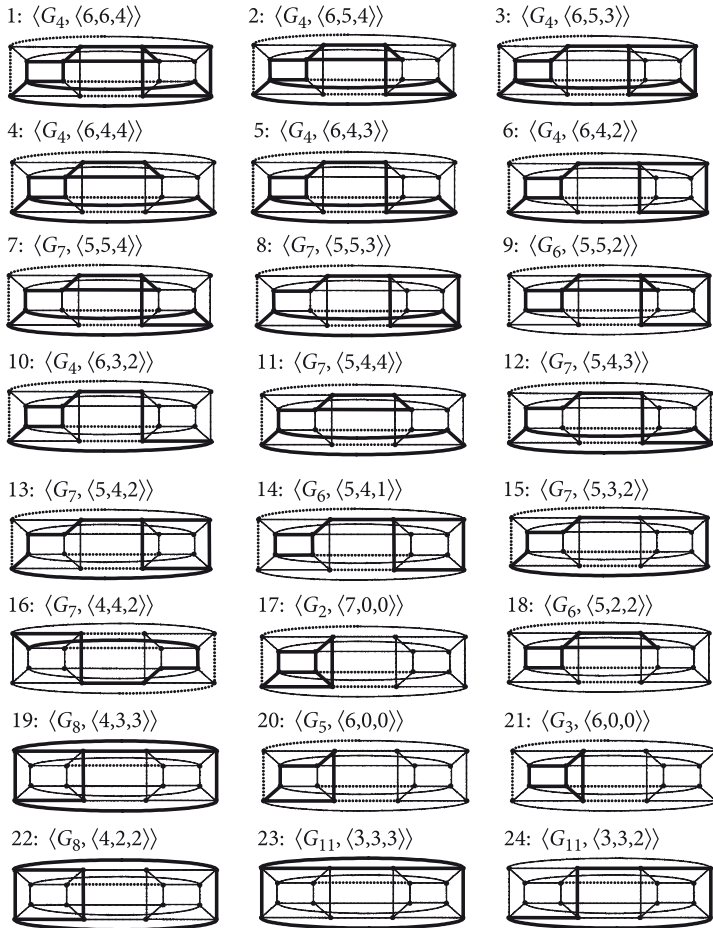
Mówimy, że pary $\langle G', s' \rangle$ i $\langle G'', s'' \rangle$ ($s = \langle \alpha_a, \alpha_b, \alpha \rangle$) są izomorficzne, jeżeli indukują (w zbiorze $\tilde{G}^C(H^4)$) struktury izomorficzne.

Łatwo zauważyć, że pary $\langle G', s' \rangle$ i $\langle G'', s'' \rangle$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $G' \doteq G''$ oraz $s' = s''$.

Dla przykładu (rys. 3.5) para $\langle G_8, \langle 4, 3, 3 \rangle \rangle$ indukuje (zgodnie z własnością 3.8) cztery pary $\langle G', s' \rangle$, wśród których są dwie izomorficzne.



Rys. 3.5. Para $\langle G_8, \langle 4,3,3 \rangle \rangle$ indukuje (zgodnie z własnością 3.8) cztery pary $\langle G', \zeta' \rangle$, wśród których są dwie izomorficzne



Rys. 3.6. Zbiór par $\langle G', \zeta \rangle (G' \in \tilde{G}(H_a^3))$, które indukują struktury zbioru $\tilde{G}_p^{CM_2}(H_a^3 \oplus H_b^3) (p \geq 6)$

Wyznaczając (zgodnie z własnościami 3.8 i 3.9) takie pary $\langle G', s \rangle$, które odpowiadają spójnym, cyklicznym, rzędu co najmniej szóstego, podgrafom grafów indukowanych przez pary zbioru \mathfrak{S} , otrzymujemy zbiór (rys. 3.6) par $\langle G', s \rangle$ ($G' \in \tilde{G}(H_a^3)$), które indukują struktury zbioru $\tilde{G}_p^{CM^*}(\tilde{H}^4)$ ($p \geq 6$), a zgodnie z metodą zaproponowaną w pracy [14, 15] wyznaczamy liczbę $\nu(G|\langle G', s \rangle)$ struktur $G \in \tilde{G}_p^{CM^*}(\tilde{H}^4)$ indukowanych przez parę $\langle G', s \rangle$.

Znając zbiór par $\langle G', s \rangle$ ($G' \in \tilde{G}(H_a^3)$), (rys. 3.6), które indukują struktury zbioru $\tilde{G}_p^{CM^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ oraz liczbę $\nu(G|\langle G', s \rangle)$ struktur $G \in \tilde{G}_p^{CM^*}(\tilde{H}^4)$ indukowanych przez parę $\langle G', s \rangle$, zgodnie z zależnością (3.1), wyznaczamy częstość zdarzenia $\gamma_{H^4}^{CM^*}(p)$, że cykliczna struktura logiczna sieci o p procesorach roboczych będzie strukturą 2-diagnozowalną metodą prób porównawczych MM^* (tab. 3.1).

TABELA 3.1

	8	7	6
$ \tilde{G}_p^{CM^*}(\tilde{H}^4) $	72	112	128
$ \tilde{G}_p^C(\tilde{H}^4) $	664	112	128
$\gamma_{H^4}^{CM^*}(p)$	0,892	0	0

4. Zdolność sieci do lokalizowania dwóch niezdatnych procesorów

Niech $N(G')$ oznacza zbiór takich par E' i E'' niezdatnych procesorów sieci $G' \in \tilde{G}^{CM^*}(H^4)$, że $(1 \leq |E'| \leq 2, 1 \leq |E''| \leq 2), (|E'| = 1) \Rightarrow (|E''| = 2)$, a $\bar{N}(G')$ — podzbiór tych par zbioru $N(G')$, które nie są rozróżnialne (spełniają zależność (3.2)) za pomocą zbioru prób porównawczych $\Psi(G')$.

Interesuje nas funkcja

$$\gamma_{H^4}^{CM^*}(p) = |N(p)|^{-1} \left| \tilde{G}_p^{CM^*}(\tilde{H}^4) \right|^{-1} \sum_{G' \in \tilde{G}_p^{CM^*}(H^4)} |\bar{N}(G')| \nu(G'), \tag{4.1}$$

gdzie $|N(p)| = 2^{-1} C_2^p (C_2^p - 1) + p C_2^p, (p = |E(G')|)$.

Funkcja $\gamma_{H^4}^{CM^*}(p)$ charakteryzuje niezdolność struktury, która nie jest strukturą 2-diagnozowalną do zlokalizowania dwóch niezdatnych procesorów.

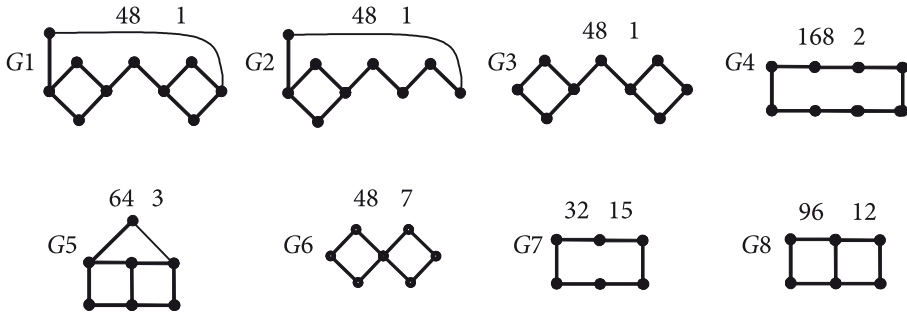
Przedstawiając struktury zbioru $\tilde{G}_p^{CM^*}(H_a^3 \oplus H_b^3)$ (rys. 3.6) w dogodnej (do analizowania) postaci automorficznej i redukując struktury izomorficzne, wyzna-

czamy struktury $G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4)$ (rys. 4.1), przy czym liczba $\nu(G)$ jest sumą takich liczb struktur zredukowanych.

Liczba $|\bar{N}(G)|(G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4))$ wynika z wnikliwości diagnozowania [12, 13] struktury G , ale można ją wyznaczyć prościej — korzystając z zależności (3.2) i twierdzenia 3.1.

Dla przykładu $|\bar{N}(G_9)| = 3$ (rys. 4.1) bowiem zależność (3.2) jest spełniona tylko dla takiej pary (E', E'') niezdatnych procesorów, że

$$[(\mu(e) = 3) \wedge (\forall_{e' \in E(e)} : \mu(e') = 3)] \Rightarrow [(e \in \{E \setminus \{E' \cup E''\}\}) \wedge (\exists!_{e'' \in E(e)} : e'' \in \{E' \cap E''\}) \wedge (\forall_{e''' \in \{E(e) \setminus \{e''\}\}} : e''' \in \{E' \cup E''\})], a |\{e^* \in \{E(G_{10}) \setminus \{e\}\} : (\mu(e^*) = 3)\}| = 3.$$



Rys. 4.1. Obrazy struktur logicznych $G \in \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4)$ ($p \geq 6$) (podano wartości $\nu(G)$ i $|\bar{N}(G)|$)

Po obliczeniach (wykorzystując zależności 3.1 oraz 4.1) wyznaczono częstość zdarzenia, że w diagnozowanej metodą porównawczą cyklicznej sieci typu sześcianu 4-wymiarowego o ($p \geq 6$) procesorach, wystąpią nierozróżnialne zbiory węzłów E' i E'' — wartość funkcji $\gamma_{H^4}^{CM_2^*}(p)$.

	8	7	6
$ \tilde{G}_p^{CM_2^*}(H^4) $	1	2	2
$\gamma_{H^4}^{CM_2^*}(p)$	0,0033	0,0089	0,0327

4. Podsumowanie

W artykule wykazano, że nie każda struktura logiczna $G \in \tilde{G}_p^C(H^4)$ sieci o p procesorach ($p \geq 6$), która jest spójnym i cyklicznym podgrafem sześcianu 4-wymiarowego, jest strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^* .

Posługując się zbiorem węzłów wewnątrznie stabilnych struktury $G \in \tilde{G}_p^C(H^4)$ ($p \geq 6$) określono warunek konieczny i wystarczający, aby struktura ta nie była strukturą 2-diagnozowalną (twierdzenie 3.1) i wyznaczono zbiór takich struktur (rys. 3.6). Pozwoliło to na wyznaczenie częstości zdarzenia, że struktura $G \in \tilde{G}_p^C(H^4)$ będzie strukturą 2-diagnozowalną metodą MM^* (tab. 3.1).

Określono częstość zdarzenia, że diagnozowanie metodą porównawczą MM^* cyklicznej sieci typu H^4 o p procesorach ($p \geq 6$), która nie jest siecią 2-diagnozowalną, nie zapewni zlokalizowania dwóch niezdatnych procesorów sieci. Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że generowane cykliczne spójne struktury w procesie degradacji sieci typu H^4 , które nie są 2-diagnozowalne metodą MM^* , a liczebność zbioru ich węzłów jest nie mniejsza niż 8, zapewniają identyfikację dwóch niezdatnych procesorów na poziomie nie mniejszym niż 0,9967.

Znajomość zdolności sieci zdegradowanej do identyfikacji dwóch niezdatnych procesorów jest przydatna przy ustalaniu najkorzystniejszej (w określonym sensie) strategii eksploataowania sieci.

Artykuł wpłynął do redakcji 25.03.2011 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2011 r.

LITERATURA

- [1] A. CARUSO, S. CHESSA, P. MAESTRINI, P. SANTI, *Diagnosability of Regular Systems*, J. Algorithms, 1, 1, 2002, 1-12.
- [2] C. P. CHANG, P. L. LAI, J. J. M. TAN, L. H. HSU, *Diagnosability of t -Connected Networks and Product Networks under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 2004, 1582-1590.
- [3] G. Y. CHANG, G. H. CHEN, G. J. CHANG, *(t, k)-Diagnosis for Matching Composition Networks*, IEEE Trans. Comput., 55, 1, 2006, 88-92.
- [4] G. Y. CHANG, G. H. CHEN, G. J. CHANG, *(t, k)-Diagnosis for Matching Composition Networks under the MM^* Model*, IEEE Trans. Comput., 56, 1, 2007, 73-79.
- [5] S. L. HAKIMI, A. T. AMIN, *Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems*. IEEE Trans. Comput., 23, 1, 1974, 86-88.
- [6] S. H. HSIEH, Y. S. CHEN, *Strongly Diagnosable Product Networks Under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 57, 6, 2008, 721-732.
- [7] R. KULESZA, A. K. WACH, *The Determination of a 2-optimal Digraphs Set for a One-Step Diagnosis of System*, 9th IMECO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, September 1999, Wrocław, Poland, 153-158.
- [8] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, J. CHUDZIKIEWICZ, *Reconfiguration of the Ring Structure in a Hypercube Computer Network with Faulty Links*, 9th IMEKO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, 22-24 September 1999, Wrocław, Poland, 159-164.
- [9] R. KULESZA, *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, 222.
- [10] R. KULESZA, *Metoda przeliczania 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, WAT, Warszawa, 16, 2001, 19-34.

- [11] R. KULESZA, *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, WAT, Warszawa, 20, 2004, 3-21.
- [12] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Wnikliwość diagnozowania sieci procesorów metodą porównawczą*, Systemy czasu rzeczywistego. Postępy badań i zastosowania, Warszawa, WKŁ, 2009, 199-210.
- [13] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Diagnosis resolution of processors' network using the comparison method*, Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), 9, 2010, 157-162.
- [14] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *The life period of the hypercube processors' network diagnosed with the use of the comparison method*, Monographs On System Dependability — Technical Approach To Dependability, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2010, 65-78.
- [15] R. KULESZA, Z. ZIELIŃSKI, *Metoda generowania struktur logicznych sieci procesorów o łagodnej degradacji typu 4-wymiarowego sześcianu*, Biul. WAT, 60, 4, 2011.
- [16] P. L. LAI, J. J. M. TAN, C. H. TSAI, L. H. HSU, *The Diagnosability of the Matching Composition Network under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 53, 8, 2004.
- [17] P. L. LAI, J. J. M. TAN, C. P. CHANG, L. H. HSU, *Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems*, IEEE Trans. Comput., 54, 2, 2005, 165-175.
- [18] J. MAENG, M. MALEK, *A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems*, Digest Int'l Symp.FTC, 1981, 173-175.
- [19] M. MALEK, *A Comparison Connection Assignment for Diagnosis of Multiprocessor Systems*, Proc. Seventh Int'l Symp. Computer Architecture, 1980, 31-35.
- [20] F. P. PREPARATA, G. METZE, R. T. CHIEN, *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput., 6, 1967.
- [21] A. SENGUPTA, A. T. DAHURA, *On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach*, IEEE Trans. Comput., 41, 11, 1992, 1386-1396.
- [22] A. K. SOMANI, O. PELEG, *On Diagnosability of Large Fault Sets in Regular Topology-Based Computer Systems*, IEEE Trans. Comput., 45, 8, 1996, 892-903.
- [23] D. WANG, *Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes under the Comparison Diagnosis Model*, IEEE Trans. Comput., 48, 12, 1999, 1369-1374.
- [24] X. YANG, Y. Y. TANG, *Efficient Fault Identification of Diagnosable Systems under the Comparison Model*, IEEE Trans. Comput., 56, 12, 2007, 1612-1618.
- [25] Z. ZIELIŃSKI, *Algorytm wyznaczania wzorca alternatywnych stanów niezdatności systemu diagnozowanego metodą opiniowania diagnostycznego*, Biul. WAT, 4, 2008, 219-232.
- [26] Z. ZIELIŃSKI, Ł. STRZELECKI, R. KULESZA, *Diagnosability characterization of the 4-dimensional cube type soft degradable processors' network*, Monographs On System Dependability — Problems of Dependability and Modelling, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2011, 283-296.

Z. ZIELIŃSKI, Ł. STRZELECKI, R. KULESZA

Capability of 4-dimensional cube type degradable processors' network to identify two faulty processors

Abstract. The paper gives a formal model of a logical structure of the 4-dimensional cubic-type processor network. It describes the rules of diagnosing the network using the comparison method MM^* . The known conditions of the diagnosability of the network (for this method) for the general case perspective were given. In the article, the influence of the degree of degradation of the network on the changes of its 2-diagnosability for testing with the MM^* method was investigated. In the summary, the conclusions arising from the results presented in this article have been formulated.

Keywords: informatics, comparison diagnosis, network logical structure, hypercube network

