Biuletyn WAT
Vol. LX, Nr 4, 2011

Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych wieloosobowych gier kooperacyjnych w postaci analitycznej

ANDRZEJ AMELJAŃCZYK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2, aameljanczyk@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono definicję rozwiązań kompromisowych wieloosobowych gier kooperacyjnych oraz najważniejsze ich własności. Zdefiniowano znormalizowaną funkcję korzyści kooperacyjnych oraz klasę gier ortogonalnych. Przedstawiono analityczne formuły wyznaczania rozwiązań kompromisowych. Określono warunki, w których *nucleolus* gry zdefiniowany przez D. Schmeidlera [11] jest rozwiązaniem kompromisowym.
Słowa kluczowe: gra znormalizowana, gra ortogonalna, C-jądro gry, nucleolus, rozwiązanie kompromisowe

1. Wprowadzenie

Wśród wielu koncepcji rozwiązania wieloosobowej gry kooperacyjnej na szczególną uwagę zasługują te, które mają następujące własności:

— istnieją dla możliwie szerokiej klasy gier,
— są jedyne,
— należą do C-jądra gry, o ile nie jest ono puste.

Do takich koncepcji zalicza się między innymi *nucleolus* (tzw. rozwiązanie D. Schmeidlera [11]). Poniżej zostanie przedstawiona definicja rozwiązań kompromisowych gier kooperacyjnych, traktowanych jako szczególny przypadek zadania optymalizacji wielokryterialnej. Idea tego rozwiązania polega na wyznaczeniu w zbiorze gier z jednoelementowym C-jądrem gry najbliższej grze wyjściowej, a następnie jej rozwiązanie. Tak uzyskane rozwiązanie zawsze istnieje, jest jedyne oraz jest elementem C-jądra gry wyjściowej, o ile zbiór ten nie jest pusty.

W zbiorze gier N-osobowych na szczególną uwagę zasługuje podzbiór gier z jednoelementowym C-jądrem. Jedynie ten przypadek gier z punktu widzenia praktycznych właściwości nie budzi zastrzeżeń. Pozostałe przypadki wymagają stosowania szczególnych „działań negocjacyjnych" prowadzących do ustalenia ostatecznego rozwiązania.

Powodzenie negocjacyjne w ustaleniu końcowego rozwiązania w dużym stopniu zależy od logiki konstrukcji proponowanej definicji rozwiązania. Proponowane definicje rozwiązania powinny oczywiście spełniać postulaty tzw. „dobrego rozwiązania" czyli gwarantować istnienie rozwiązania, jego jednoznaczność oraz niepoprawialność w sensie C-jądra.

Idea przedstawionej w pracy koncepcji rozwiązania kompromisowego bazuje na klasie gier z jednoelementowym C-jądrem, zakładającej, że każda gra z jednoelementowym C-jądrem wyznacza „dobre" rozwiązanie wszystkich gier do niej podobnych w określonym sensie. Dotyczy to zarówno gier z pustym jak i niepustym C-jądrem. W konstrukcji metody wyznaczania zdefiniowanych rozwiązań wykorzystano własności rzutu ortogonalnego. Pozwoliło to na uzyskanie prostej postaci analitycznej zdefiniowanych rozwiązań.

2. Własności zbioru gier (0, 1)-znormalizowanych

Niech dana będzie gra $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$, gdzie $\boldsymbol{N} = \{1,\dots n,\dots, N\}$ — zbiór numerów graczy, a $v : 2^{\boldsymbol{N}} \to \boldsymbol{R}$ — funkcja charakterystyczna gry.

Rozważania poniższe będą dotyczyły gier, które są istotne oraz superaddytywne [6]. Ze względów głównie obliczeniowych zajmować się będziemy grami (0,1)-znormalizowanymi [10].

Superaddytywną grę $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ nazywamy grą (0,1)-znormalizowaną (w skrócie grą znormalizowaną), jeśli

1) $v(\{n\}) = 0, \quad n \in \boldsymbol{N}$,
2) $v(\boldsymbol{N}) = 1$.

Rozwiązaniem dopuszczalnym (0,1)-znormalizowanej gry jest wektor $x = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) \in R^{\boldsymbol{N}}$ spełniający warunki:

a) $\sum_{n \in \boldsymbol{N}} x_n = 1$,
b) $x_n \geq 0, \quad n \in \boldsymbol{N}$.

Liczba x_n oznacza wielkość znormalizowanej wypłaty gracza nr $n \in \boldsymbol{N}$, którą należy interpretować jako wartość (cenę) kooperacyjną gracza n, decydującą o jego „procentowym udziale" w podziale dodatkowego zysku wynikającego z faktu kooperacji.

Dwie gry $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ i $\Gamma' = (\boldsymbol{N}, v')$ nazywać będziemy równoważnymi, jeśli istnieje liczba $k > 0$ oraz liczby $\alpha_n,\ n \in \boldsymbol{N},$ takie, że

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{n \in S} \alpha_n, \quad S \subset \boldsymbol{N}.$$

Warunki te stanowią układ $2^N - 1$ równań z $N + 1$ niewiadomymi.

Każda gra istotna jest równoważna dokładnie jednej grze (0,1)-znormalizowanej. Gry równoważne są izomorficzne [10].

Niech x' rozwiązanie gry Γ'. Równoważnym rozwiązaniem gry Γ będzie $x = \dfrac{x' - \alpha}{k}$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_N) \in \boldsymbol{R}^N$.

Symbolem $N(\boldsymbol{N}) = \{S \subset \boldsymbol{N} \mid S \neq \boldsymbol{N}, \phi, \{n\}, n \in \boldsymbol{N}\}$ oznaczać będziemy zbiór koalicji nietrywialnych. Zbiór gier N-osobowych (0,1)-znormalizowanych oznaczać będziemy następująco:

$$V_{01}(N) = \left\{ v \in \boldsymbol{R}^{2^{\boldsymbol{N}} - N - 2} \,\middle|\, 0 \le v(S) \le 1, S \in N(\boldsymbol{N}) \right\}. \tag{2.1}$$

Symbolem $V_c(N)$ oznaczać będziemy zbiór gier z niepustym C-jądrem, zaś $V_\phi(N)$ — zbiór gier z pustym C-jądrem, $V_*(N)$ — oznaczać będzie zbiór gier z jednoelementowym C-jądrem

$$V_{01}(N) = V_c(N) \cup V_\phi(N). \tag{2.2}$$

Definicja 2.1

Funkcją korzyści kooperacyjnych w grze $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ nazywać będziemy funkcję $\gamma : 2^{\boldsymbol{N}} \to R,$ taką, że

$$\gamma(S) = v(S) - \sum_{n \in S} v(\{n\}), \quad S \subset \boldsymbol{N}. \tag{2.3}$$

Liczbę $\gamma(\boldsymbol{N})$ nazywać będziemy wartością kooperacyjną gry.

Definicja 2.2

Znormalizowaną funkcją korzyści kooperacyjnych nazywać będziemy funkcję

$$\delta : 2^{\boldsymbol{N}} \to \boldsymbol{R}, \text{ taką że } \delta(S) = \frac{\gamma(S)}{\gamma(\boldsymbol{N})}, \quad S \subset \boldsymbol{N}.$$

Funkcja ta odgrywa szczególną rolę w wyznaczaniu znormalizowanych gier równoważnych oraz tak zwanej „wartości kooperacyjnej” (ceny) graczy uczestniczących w konflikcie.

Twierdzenie 2.1

Niech $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$, N-osobowa gra kooperacyjna istotna i superaddytywna.

Funkcja $\delta(S)$ wyznacza znormalizowaną grę $\Gamma' = (\boldsymbol{N}, v')$ równoważną grze $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$, taką, że $v' = \delta$.

<u>Dowód:</u>

Gra $\Gamma' = (\boldsymbol{N}, \delta)$ jest grą (0,1)-znormalizowaną, gdyż $0 \le \delta(S) \le 1$, $S \subset \boldsymbol{N}$, co wynika z definicji 2.2.

Gra $\Gamma' = (\boldsymbol{N}, v')$ będzie grą równoważną grze $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ jeśli istnieje $k > 0$ oraz liczby α_n, $n \in \boldsymbol{N}$ takie, że dla każdego $S \subset \boldsymbol{N}$ zachodzić będzie:

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{n \in S} \alpha_n. \tag{2.4}$$

Ponieważ musi również zachodzić

1) $v'(\{n\}) = 0, \quad n \in \boldsymbol{N}$,
2) $v'(\boldsymbol{N}) = 1$.

Otrzymamy układ $N + 1$ równań:

1) $kv(\{n\}) + \alpha_n = 0, \quad n \in \boldsymbol{N}$,
2) $kv(\boldsymbol{N}) + \sum_{n \in \mathrm{N}} \alpha_n = 1$.

Stąd

$$k = \frac{1 - \sum_{n \in \boldsymbol{N}} \alpha_n}{v(\boldsymbol{N})}, \tag{2.5}$$

$$\alpha_n = -kv(\{n\}), \quad n \in \boldsymbol{N}, \tag{2.6}$$

czyli:

$$k = \frac{1}{v(\boldsymbol{N}) - \sum_{n \in \boldsymbol{N}} v(\{n\})} > 0, \tag{2.7}$$

bo gra Γ jest grą istotną.

Podstawiając (2.7) do (2.6), otrzymamy

$$\alpha_n = \frac{v(\{n\})}{\sum_{n \in \boldsymbol{N}} v(\{n\}) - v(\boldsymbol{N})}, \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{2.8}$$

Podstawiając (2.7 i (2.8) do (2.4) otrzymamy

$$v'(S)=\frac{v(S)}{v(\boldsymbol{N})-\sum_{n\in\boldsymbol{N}}v(\{n\})}-\frac{\sum_{n\in S}v(\{n\})}{v(\boldsymbol{N})-\sum_{n\in\boldsymbol{N}}v(\{n\})}=$$

$$=\frac{v(S)-\sum_{n\in S}v(\{n\})}{v(\boldsymbol{N})-\sum_{n\in\boldsymbol{N}}v(\{n\})}=\delta(S),\quad S\subset\boldsymbol{N}.$$

Mając dowolne rozwiązanie x' gry znormalizowanej, bardzo prosto wyznaczymy równoważne rozwiązanie gry wyjściowej $\Gamma=(\boldsymbol{N},v)$:

$$x_n=v(\{n\})+\gamma(\boldsymbol{N})x'_n,\quad n\in\boldsymbol{N}. \tag{2.9}$$

Formuła ta mówi, że wypłata gracza nr $n\in\boldsymbol{N}$ składa się z części stałej $v(\{n\})$ (taką kwotę gracz nr $n\in\boldsymbol{N}$ zapewnia sobie sam) oraz „dodatku kooperacyjnego", który jest proporcjonalny do „wartości (ceny)kooperacyjnej gracza" nr n (liczby x'_n) i wartości kooperacyjnej gry Γ, reprezentowanej liczbą $\gamma(N)$. Liczba x'_n określa „procentowy" udział gracza nr $n\in\boldsymbol{N}$ w podziale sumarycznego zysku z kooperacji określonego liczbą

$$\gamma(\boldsymbol{N})=v(\boldsymbol{N})-\sum_{n\in\boldsymbol{N}}v(\{n\}) \tag{2.10}$$

Wartości funkcji charakterystycznej gry znormalizowanej $\Gamma'=(\boldsymbol{N},v')$, równoważnej grze wyjściowej $\Gamma=(\boldsymbol{N},v)$ wynikają z wartości funkcji charakterystycznej v według następującej formuły:

$$v'(S)=\frac{v(S)-\sum_{n\in S}v(\{n\})}{v(\boldsymbol{N})-\sum_{n\in\boldsymbol{N}}v(\{n\})}=\delta(S),\quad S\subset\boldsymbol{N}. \tag{2.11}$$

Przykład 2.1
Wyznaczyć znormalizowaną grę $\Gamma'=(\boldsymbol{N},v')$ równoważną grze $\Gamma=(\boldsymbol{N},v)$

S	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$v(S)$	3	2	4	6	9	9	13

Można to zrobić bardzo prosto, korzystając z formuły (2.11) i dopisując do powyższej tabeli dwa kolejne wiersze jak niżej:

S	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\nu(S)$	3	2	4	6	9	9	13
$\gamma(S)$	0	0	0	1	2	3	4
$\delta(S)$	0	0	0	1/4	1/2	3/4	1

bez potrzeby rozwiązywania układu równań normalizacyjnych.

3. Rozwiązania kompromisowe wieloosobowych gier kooperacyjnych

Wieloosobową grę kooperacyjną można rozpatrywać jako typowe zadanie optymalizacji wielokryterialnej [1] o postaci:

$$(X, F, R),$$

gdzie: X — zbiór rozwiązań dopuszczalnych;
F — funkcja oceny $(F : X \to \boldsymbol{R}^N)$;
R — model preferencji decyzyjnych (np. w postaci relacji dominowania [12]).

W przypadku gry kooperacyjnej:

$$X = I(v) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^N \,\middle|\, \sum_{n \in N} x_n = V(\boldsymbol{N}),\ x_n \geq v(\{n\}),\ n \in \boldsymbol{N} \right\}. \tag{3.1}$$

Funkcją kryterium jest $F(x) = x$, zaś modelem preferencji może być relacja dominowania $\succ$ [10]. Zbiór $I(v)$ nazywamy zbiorem imputacji.

Zbiorem rozwiązań niezdominowanych będzie w tym przypadku zbiór C(v) (C-jądro gry).

Poniższa koncepcja rozwiązania gry polega na założeniu, że w zadaniu mamy tyle kryteriów cząstkowych oceny rozwiązań, ile jest możliwych koalicji nietrywialnych.

$$F : I(v) \to \boldsymbol{R}^{2^N - N - 2}, \tag{3.2}$$

$F(x) = (F_S(x),\ S \in N(\boldsymbol{N}))$ — funkcja kryterialna,

$$F_S(x) = \sum_{n \in S} x_n \to \max \text{ dla każdego } S \in N(\boldsymbol{N}).$$

Zbiorem ocen rozwiązań dopuszczalnych będzie obraz Y zbioru imputacji $I(v)$:

$$\mathrm{Y} = F\big(I(v)\big) = \left\{ y \in \boldsymbol{R}^{2^N - N - 2} \,\middle|\, y_S = \sum_{n \in S} x_n,\ S \in N(\boldsymbol{N}) \right\}. \tag{3.3}$$

Twierdzenie 3.1 [1]

Zbiór Y jest podzbiorem iloczynu zbioru gier znormalizowanych $V_{01}(N)$ i hiperpłaszczyzny P danej równaniem

$$\sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} y_S = A_N, \quad \text{gdzie} \quad A_N = \sum_{k=2}^{N-1} \left[\frac{(N-1)\ldots(N-k+1)}{(k-1)!} \right].$$

Co zapiszemy następująco: $\mathrm{Y} \subset V_{01}(N) \cap P$.

Dla gier trzyosobowych zachodzi:

$$\mathrm{Y} = V_{01}(3) \cap P = V_*(3). \tag{3.4}$$

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej przy tych założeniach możemy przedstawić jako

$$\big(I(v), F, \geq\big). \tag{3.5}$$

Zbiorem rozwiązań niezdominowanych tego zadania będzie zbiór $X_N^{\geq} = F^{-1}\big(\mathrm{Y}_N^{\geq}\big)$, gdzie $\{\mathrm{Y}_N^{\geq} = y \in \mathrm{Y} \,|$ nie istnieje $z \in \mathrm{Y} - \{y\}$, że $z \geq y\}$. Łatwo pokazać, że $\mathrm{Y}_N^{\geq} = \mathrm{Y}$, a więc

$$X_N^{\geq} = F^{-1}\big(\mathrm{Y}_N^{\geq}\big) = I(v). \tag{3.6}$$

W tej sytuacji rozsądną propozycją rozwiązania jest tak zwane rozwiązanie kompromisowe.

Klasyczny [3, 12] punkt idealny $\overset{*}{y}$ ma współrzędne:

$$\overset{*}{y}_S = \sum_{n \in S} x_n = v(\boldsymbol{N}) - \sum_{\boldsymbol{N}-S} v\big(\{n\}\big). \tag{3.7}$$

Rozwiązaniem kompromisowym w tym przypadku jest przeciwobraz elementu $\overset{o}{y} \in \mathrm{Y}$ leżącego najbliżej (w sensie odpowiedniej metryki) punktu $\overset{*}{y}$ [1, 3]. Z uwagi na specyficzne własności relacji dominowania $\succ$ [10], bardziej interesujące wyniki można uzyskać, przyjmując za punkt idealny (punkt odniesienia) [4] następujący element:

$$\overset{*}{\omega} = \big(v(S),\ S \in N(\boldsymbol{N})\big) \in V_{01}(N). \tag{3.8}$$

Przyjęcie powyższego punktu odniesienia oznacza w konsekwencji „dążenie do znalezienia takiego rozwiązania", którego obraz znajdowałby się najbliżej funkcji charakterystycznej gry wyjściowej. W tym sensie rozwiązaniem gry pierwotnej (wyjściowej) byłoby rozwiązanie najbliższej gry („najbardziej podobnej" w sensie metrycznym) ze zbioru gier z jednoelementowym C-jądrem.

Definicja 3.1

Rozwiązaniem kompromisowym wieloosobowej gry kooperacyjnej z parametrem $p \geq 1$ nazywać będziemy przeciwobraz $F^{-1}\left(y^p\right)$ punktu $y^p \in \mathrm{Y}$ takiego, że $\left\|\overset{*}{\omega} - y^p\right\|_p = \min_{y \in Y} \left\|\overset{*}{\omega} - y\right\|_p$, gdzie

$$\left\|\overset{*}{\omega} - y\right\|_p = \sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} \left(\left|\overset{*}{\omega}_s - y_s\right|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Łatwo pokazać, korzystając z wyników [3, 12], że rozwiązanie kompromisowe dla $1 < p < \infty$ ma następujące własności:

a) istnieje dla każdej istotnej gry superaddytywnej,
b) jest jedyne,
c) jest optymalne w sensie Pareto.

Dla $p = \infty$ otrzymamy zbiór rozwiązań kompromisowych X_∞ postaci: $X_\infty = F^{-1}\left(Y_\infty\right)$, gdzie

$$Y_\infty = \left\{ y^\infty \in Y \;\middle|\; \left\|\overset{*}{\omega} - y^\infty\right\|_\infty = \min_{y \in Y} \max_{S \in N(\mathrm{N})} \left(v(s) - y_s\right) \right\},$$

$$\text{gdzie} \quad y_s = \sum_{n \in S} x_n, \quad S \in N(\boldsymbol{N}).$$

Zatem rozwiązanie Schmeidlera [11] $N(v)$ spełnia warunek: $N(v) \subset X_\infty$.

4. Rozwiązania kompromisowe z parametrem $p = 2$

W przypadku $p = 2$, norma $\left\|\overset{*}{\omega} - y\right\|_p$ jest normą euklidesową. Zadanie wyznaczenia rozwiązania kompromisowego można zatem sprowadzić do zadania wyznaczenia rzutu ortogonalnego $\overset{*}{\omega}^{\perp}$ elementu $\overset{*}{\omega}$ na hiperpłaszczyznę $P \supset Y$.

Niech $\sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} y_S = A_N$ — równanie hiperpłaszczyzny P.

Współrzędne rzutu ortogonalnego

$\overset{*}{\omega}^{\perp} = \left(\overset{*}{\omega}_s^{\perp},\ \ s \in N(\boldsymbol{N}) \right)$ punktu $\overset{*}{\omega}$ określimy następująco:

$$\overset{*}{\omega}_S^{\perp} = \overset{*}{\omega}_S + t,\ \ S \in N(\boldsymbol{N}). \tag{4.1}$$

Parametr t otrzymamy z równania:

$$\sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} \overset{*}{\omega}_s^{\perp} - A_N = \sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} \overset{*}{\omega}_s + \left(2^N - N - 2\right)t - A_N = 0. \tag{4.2}$$

Stąd

$$t = \frac{A_N - \sum\limits_{S \in N(\boldsymbol{N})} v(S)}{a_N}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$a_N = 2^N - N - 2. \tag{4.4}$$

Twierdzenie 4.1

Rzut ortogonalny $\overset{*}{\omega}^{\perp}$ punktu $\overset{*}{\omega}$ koalicyjnie racjonalnego na hiperpłaszczyznę P posiada również własność koalicyjnej racjonalności.

<u>Dowód:</u>

O punkcie $\overset{*}{\omega}^{\perp}$ powiemy, że jest koalicyjnie racjonalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\overset{*}{\omega}_S^{\perp} \geq v(S),\ \ S \in N(\boldsymbol{N}).$$

Skoro $\overset{*}{\omega}^{\perp}$ jest rzutem ortogonalnym na P to

$\overset{*}{\omega}_S^{\perp} = \overset{*}{\omega}_S + t,\ \ S \in N(\boldsymbol{N}),$ a to oznacza, że

$$\overset{*}{\omega}_S + t \geq \overset{*}{\omega}_S,\ \ S \in N(\boldsymbol{N}),\ \text{gdyż } t \geq 0.$$

Wynika to z faktu, że $\sum\limits_{S \in N(\boldsymbol{N})} v(S) \leq A_N$ dla gier ze zbioru $V_C(N)$.

5. Rozwiązania trzyosobowych gier kooperacyjnych

Przedmiotem dalszych rozważań będą istotne, superaddytywne gry trzyosobowe oraz równoważne im gry znormalizowane.

Zbiór trzyosobowych gier znormalizowanych oznaczać będziemy następująco:

$$V_{01}(3) = \left\{ v \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq v(s) \leq 1,\ S \in N(\boldsymbol{N}) \right\}. \tag{5.1}$$

Można również używać następującego zapisu:

$$V_{01}(3)=\left\{y\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0\le y_n\le 1,\;\; n\in \boldsymbol{N}\right\}, \tag{5.2}$$

gdzie $y_n = v(\boldsymbol{N}-\{n\}),\;\; n\in \boldsymbol{N}=\{1,2,3\}$.
Zbiór gier z niepustym C-jądrem zapiszemy następująco:

$$V_C(3)=\left\{v\in V_{01}(3)\,\middle|\, \sum_{S\in N(\boldsymbol{N})} v(S)\le A_3\right\}. \tag{5.3}$$

Zbiór gier z pustym C-jądrem zapiszemy jako:

$$V_\phi(3)=\left\{v\in V_{01}(3)\,\middle|\, \sum_{S\in N(\boldsymbol{N})} v(S)> A_3\right\}. \tag{5.4}$$

Zbiór gier z C-jądrem jednoelementowym zapiszemy następująco:

$$V_*(3)=\left\{v\in V_{01}(3)\,\middle|\, \sum_{S\in N(\boldsymbol{N})} v(S)= A_3\right\}. \tag{5.5}$$

Szczególnymi charakterystykami sytuacji growych, mających wpływ na ostateczne rozwiązanie gry kooperacyjnej, danej w postaci funkcji charakterystycznej, są wskaźniki zdefiniowane poniżej:

Definicja 5.1
Wskaźnikiem trudności negocjacyjnych w grze $\Gamma=(\boldsymbol{N},v)$ nazywać będziemy liczbę

$$n(v)=\sum_{S\in N(\boldsymbol{N})} v(S)-A_N. \tag{5.6}$$

Dla gier trzyosobowych $n(v)\le 1$. Dla gier z jednoelementowym C-jądrem zgodnie z (5.5), wskaźnik trudności negocjacyjnych jest równy zero.

Definicja 5.2
Wskaźnikiem ortogonalności gry nazywać będziemy liczbę:

$$k(v)=1+{}^1\!/_3\, n(v). \tag{5.7}$$

Liczba ta jest pewną szczególną charakterystyką funkcji charakterystycznej gry (patrz twierdzenie 5.1).

Zadanie wyznaczenia rozwiązania kompromisowego polega na wyznaczeniu rozwiązania gry $\Gamma^p = \left(\mathrm{N}, y^p\right) \in V_*(3)$, która jest najbliższa grze wyjściowej $\Gamma = \left(\mathrm{N}, v\right)$ w sensie normy z parametrem $p \geq 1$.

Postać analityczną rozwiązań kompromisowych z parametrem $p = 2$ (odległość geometryczna) można wyznaczyć korzystając z własności rzutu ortogonalnego [2].

Dla gier trzyosobowych parametr rzutowania t zgodnie z (4.3) i (5.6) przyjmuje wartość

$$t = -\tfrac{1}{3} n(v). \tag{5.8}$$

Definicja 5.3

Grę $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ nazywać będziemy ortogonalną, jeśli rzut ortogonalny $v^{\perp}$ funkcji charakterystycznej v tej gry na płaszczyznę P należy do zbioru Y.

Twierdzenie 5.1

Jeśli funkcja charakterystyczna gry $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v) \in V_{01}(3)$ spełnia warunek

$$v(S) \leq k(v), \quad S \in N(\boldsymbol{N}), \tag{5.9}$$

to gra Γ jest grą ortogonalną.

<u>Dowód:</u>

Ażeby rzut ortogonalny $v^{\perp} \in P$ był elementem zbioru Y, wystarczy pokazać, że

1) $v^{\perp}(S) \geq 0, \quad S \in N(\boldsymbol{N})$,
2) $v^{\perp}(S) \leq 1, \quad S \in N(\boldsymbol{N})$.

Ad. 1)

$$v^{\perp}(S) = v(S) + t = \frac{3v(S) + 2 - \sum_{T \in N(\boldsymbol{N})} v(T)}{3} =$$

$$= \frac{2v(S) + 2 - \left(\sum_{T \in N(\boldsymbol{N})} v(T) - v(S)\right)}{3} \geq 0, \quad S \in N(\boldsymbol{N}),$$

ponieważ składnik $\left(\sum_{T \in N(\boldsymbol{N})} v(T) - v(S)\right) \leq 2$, zatem $v^{\perp}(S) \geq 0, \quad S \in N(\boldsymbol{N})$.

Ad. 2)

Należy pokazać, że $v^{\perp}(S) \leq 1, \quad S \in N(\boldsymbol{N})$.

Z uwagi na zapis (5.7) funkcja v spełnia warunek

$$v(S) \leq 1 + \tfrac{1}{3} n(v), \quad S \in N(\boldsymbol{N}). \tag{5.10}$$

Dodając t do obu stron powyższej nierówności otrzymamy:

$$v^{\perp}(S) \le 1 + \tfrac{1}{3} n(v) + t, \quad S \in N(\boldsymbol{N}),$$

a to oznacza, że

$$v^{\perp}(S) \le 1, \quad S \in N(\boldsymbol{N}), \tag{5.11}$$

gdyż zgodnie z (5.8) $t = -\tfrac{1}{3} n(v)$.

Twierdzenie 5.2

Każda gra z pustym C-jądrem jest grą ortogonalną.

Dowód:

Dla gier z pustym C-jądrem zachodzi warunek: $\sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} v(S) > 2$.

Stąd $n(v) = \sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} v(S) - 2 > 0$.

Tak więc warunek $v(S) \le k(v)$ jest spełniony dla każdego $S \in N(\boldsymbol{N})$.

Zbiór gier ortogonalnych oznaczać będziemy następująco:

$$V_{01}^{\perp}(3) = \left\{ v \in V_{01}(3) \middle| v(S) \le k(v), \ S \in N(\boldsymbol{N}) \right\}. \tag{5.12}$$

Wniosek 5.1

Każda gra z jednoelementowym C-jądrem jest ortogonalna.

Rozwiązaniem kompromisowym z parametrem p ortogonalnej gry $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ jest przeciwobraz $F^{-1}(y^p)$ elementu $y^p \in Y$ takiego, że

$$R_p^v(y^p) = \min_{y \in Y} R_p^v(y). \tag{5.13}$$

Postać funkcji odległości $R_p^v(x)$ określa następująca formuła:

$$R_p^v(y) = \|v - y\|_p = \left(\sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} \left(|v(S) - y_S| \right)^p \right)^{1/p}, y \in Y. \tag{5.14}$$

Analityczną postać rozwiązań kompromisowych dla $p = 2$ (w skrócie: rozwiązań kompromisowych) można łatwo wyznaczyć, korzystając z własności rzutu ortogonalnego [1, 3, 4].

Twierdzenie 5.3

Dla trzyosobowych gier ortogonalnych rozwiązaniem kompromisowym jest

$$x_n^p = k(v) - v(\boldsymbol{N} - \{n\}), \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{5.15}$$

Dowód:

Zgodnie z twierdzeniem o rzucie ortogonalnym rozwiązaniem zadania (5.13) dla $p = 2$ jest $y^p = v^\perp$. Zbiorem (jednoelementowym) rozwiązań kompromisowych jest zbiór imputacji, które spełniają następujący układ równań:

$$v^\perp(s) = \sum_{n \in S} x_n^p, \quad S \in N(\boldsymbol{N}),$$

czyli układ następujących równań:

$$v(s) + t = \sum_{n \in S} x_n^p, \quad S \in N(\boldsymbol{N}),$$

gdzie $t = -\tfrac{1}{3} n(v)$.

W konsekwencji otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
&v(2,3) - \tfrac{1}{3} n(v) = x_2^p + x_3^p, \\
&v(1,3) - \tfrac{1}{3} n(v) = x_1^p + x_3^p, \\
&v(1,2) - \tfrac{1}{3} n(v) = x_1^p + x_2^p, \\
&x_1^p + x_2^p + x_3^p = 1.
\end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy:

$$x_n^p = k(v) - v(\boldsymbol{N} - \{n\}), \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Dla pozostałych gier niespełniających warunków ortogonalności ($v^\perp \notin Y$) można również wyznaczyć rozwiązanie kompromisowe w postaci analitycznej korzystając z własności rzutu ortogonalnego [2]. Rozwiązanie takiej gry będzie przeciwobrazem najbliższego rzutu ortogonalnego $v^{\perp\perp}$ punktu $v^\perp$ na krawędzie zbioru *Y*.

Niech $l \in \{1,2,3\}$ oznacza numer warunku ortogonalności, który nie został spełniony

$$v(\boldsymbol{N} - \{l\}) \le k(v),$$

otrzymamy wtedy następujące rozwiązania:

dla $l = 1$,

$$x^1 = \left(0, \tfrac{1}{2}\left(1 + v(1,2) - v(1,3)\right), \tfrac{1}{2}\left(1 - v(1,2) + v(1,3)\right)\right), \tag{5.16}$$

dla $l = 2$,

$$x^2 = \left(\tfrac{1}{2}\left(1 + v(1,2) - v(2,3)\right), 0, \tfrac{1}{2}\left(1 - v(1,2) + v(2,3)\right)\right), \tag{5.17}$$

dla $l = 3$,

$$x^3 = \left(\tfrac{1}{2}\left(1 + v(1,3) - v(2,3)\right), \tfrac{1}{2}\left(1 - v(1,3) + v(2,3)\right), 0\right). \tag{5.18}$$

6. *Nucleolus* a rozwiązania kompromisowe gier kooperacyjnych

Nucleolus (N-jądro) gry kooperacyjnej wprowadzone przez D. Schmeidlera w pracy [11] jest przedmiotem bardzo wielu publikacji jako przykład dobrego rozwiązania wieloosobowej gry kooperacyjnej. *Nucleolus* istnieje dla każdej istotnej gry kooperacyjnej, jest rozwiązaniem jednoznacznym (jedynym) oraz koalicyjnie racjonalnym, o ile zbiór $C(v)$ jest niepusty. Rozwiązania kompromisowe z parametrem $1 < p < \infty$ również takie własności posiadają.

W przypadku normy z parametrem p = ∞, *nucleolus* $N(v)$ jest elementem zbioru rozwiązań kompromisowych X_∞^v, a bardzo często $N(v) = X_\infty^v$ (gdy $\overline{\overline{X}}{}_\infty^v = 1$).

W poprzednim punkcie pracy przedstawiony został sposób wyznaczania postaci analitycznej rozwiązań kompromisowych gier trzyosobowych.

W połączeniu z twierdzeniem (2.1) pozwalającym w prosty sposób wyznaczyć grę znormalizowaną równoważną dowolnej grze wyjściowej daje to możliwość bardzo łatwego i prostego wyznaczania rozwiązań gier kooperacyjnych.

Ułatwienie to dotyczy również *nucleolusa* $N(v)$ i rozwiązania Shapleya $\Phi(v)$.

Twierdzenie 6.1

Dla gier spełniających warunek

$$v(S) \leq 2k(v) - 1, \quad S \in N(\boldsymbol{N}). \tag{6.1}$$

rozwiązanie kompromisowe pokrywa się z *nucleolusem*.

<u>Dowód:</u>

Łatwo zauważyć, że gry spełniające (6.1) są grami ortogonalnymi. Rozwiązanie kompromisowe tych gier określa zależność (5.15), zgodną z postacią analityczną *nucleolusa* podaną w pracy [8].

Twierdzenie 6.2

Dla trzyosobowych gier kooperacyjnych z pustym C-jądrem *nucleolus* i rozwiązanie kompromisowe pokrywają się.

Gry z pustym C-jądrem na mocy twierdzenia 5.2 są grami ortogonalnymi.

Dowód zatem wynika bezpośrednio z porównania przedstawionej w powyższej pracy postaci analitycznej rozwiązania kompromisowego gier ortogonalnych z analityczną postacią *nucleolusa*, przedstawioną między innymi w pracy [8].

W pracy [8] podano również warunki dla zbioru gier, dla których *nucleolus* nie zmienia się i jest równy: $N(v) = \{(1/3,1/3,1/3)\}$. Są to następujące warunki:

$$v(S) \le \tfrac{1}{3} v(\boldsymbol{N}), \quad S \in N(\boldsymbol{N}). \tag{6.2}$$

Oznaczmy symbolem $V_{1/3}(3)$ zbiór gier znormalizowanych spełniających powyższy warunek:

$$V_{1/3}(3) = \left\{ v \in V_{01}(3) \middle| \; 0 \le v(S) \le \tfrac{1}{3}, \; S \in N(\boldsymbol{N}) \right\}. \tag{6.3}$$

Dla wszystkich gier $v \in V_{1/3}(3)$ niezależnie od wartości funkcji charakterystycznej (tym samym niezależnie od wartości (ceny) kooperacyjnej poszczególnych graczy), *nucleolus* $N(v)$ jest identyczny i ma postać: $\{(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\}$.

W zbiorze $V_{1/3}(3)$ istnieje jednak bardzo wiele gier różniących się „zdolnością kooperacyjną" poszczególnych graczy jak też „kształtem i wielkością" C-jądra. Propozycja Schmeidlera ich nie rozróżnia dając zawsze wszystkim graczom równą wypłatę (jednakową cenę). Trudno się zgodzić, iż taka „logika negocjacji" byłaby zaakceptowana przez wszystkich graczy za wyjątkiem oczywistego przypadku szczególnego, gdy

$$v(S) = a \le \tfrac{1}{3}, \; S \in N(\boldsymbol{N}). \tag{6.4}$$

Jest to istotna wada rozwiązania Schmeidlera. Takiej wady nie posiada rozwiązanie kompromisowe.

<u>Przykład (6.1)</u>

Rozpatrzmy dwie różne gry ze zbioru $V_{1/3}(3)$ (z różnymi funkcjami charakterystycznymi, spełniającymi warunek (6.2)) jak w tabeli:

S	1, 2	1, 3	2, 3
$v^1(s)$	0	0	1/3
$v^2(s)$	1/10	1/3	1/10

Zgodnie z wynikami przedstawionymi w pracy [8] gry te mają identyczne *nucleolusy*:

$$N(v^1) = N(v^2) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),$$

rozwiązania kompromisowe dla tych gier są natomiast różne:

$$x^1 = (\tfrac{1}{9}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{4}{9}), \; x^2 = (\tfrac{37}{90}, \tfrac{16}{90}, \tfrac{37}{90}).$$

Jak widać, metoda rozwiązań kompromisowych wyraźnie różnicuje pozycje poszczególnych graczy w zależności od ich „siły negocjacyjnej". Obie gry z powyższego przykładu istotnie się różnią specyfiką kooperacyjną (szczególnie rolą pierwszego gracza).

Poniżej przedstawiony zostanie kompleksowy przykład ilustrujący przedstawioną w pracy metodę wyznaczania rozwiązań gier trzyosobowych, wykorzystującą wprowadzone dodatkowe charakterystyki.

Przykład (6.2)

Wyznaczyć rozwiązanie kompromisowe, rozwiązanie Schmeidlera oraz rozwiązanie Shapleya dla gry o funkcji charakterystycznej danej w poniższej tabeli:

S	1	2	3	2, 3	1, 3	1, 2	1, 2, 3
$v(S)$	1	3	3	5	6	8	10

Etap 1

Wyznaczenie równoważnej gry znormalizowanej $\Gamma' = (\boldsymbol{N}, v')$ oraz jej charakterystyk:

S	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$v(S)$	1	3	3	5	6	8	10
$\gamma(S)$	0	0	0	1	2	2	3
$\delta(S)$	0	0	0	1/3	2/3	2/3	1

Charakterystyki dodatkowe:

$$n(v') = \sum_{S \in N(\boldsymbol{N})} v'(S) - 2 = -\tfrac{1}{3},$$

$$k(v') = 1 + \tfrac{1}{3} n(v') = \tfrac{8}{9},$$

$$s(v') = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6} n(v') = \tfrac{11}{18}.$$

Etap 2

Wyznaczenie rozwiązań gry znormalizowanej:

a) rozwiązanie kompromisowe (kompromisowa wartość graczy):

$$\overline{x}_n^p = k(v') - v'(\boldsymbol{N} - \{n\}), \quad n \in \boldsymbol{N},$$

$$\overline{x}_1^p = 8/9 - v'(2,3) = 2/9,$$

$$\overline{x}_2^p = 8/9 - v'(1,3) = 2/9,$$

$$\overline{x}_3^p = 8/9 - v'(1,2) = 5/9.$$

b) *nucleolus* $\left(N\left(v'\right)\right)$, zgodnie z [8] (wartość graczy wg Schmeidlera):

$$N\left(v'\right) = \left(2/9, 2/9, 5/9\right),$$

c) rozwiązanie Shapleya (wartość graczy wg Shapleya):

$$\Phi_n\left(v'\right) = s\left(v'\right) - 1/2\, v'\left(\boldsymbol{N} - \{n\}\right), \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymamy: $\Phi\left(v'\right) = \left(5/18, 5/18, 8/18\right), \quad n \in \boldsymbol{N}.$

Etap 3

Wyznaczenie rozwiązań gry wyjściowej:

$$x_n = v\left(\{n\}\right) + \gamma\left(\boldsymbol{N}\right) x'_n\ , \quad n \in \boldsymbol{N},$$

a) rozwiązanie kompromisowe

$$x^p = \left(1\tfrac{2}{3}, 3\tfrac{2}{3}, 4\tfrac{2}{3}\right) \in C\left(v\right),$$

b) rozwiązanie Schmeidlera

$$N\left(v\right) = \left(1\tfrac{2}{3}, 3\tfrac{2}{3}, 4\tfrac{2}{3}\right) \in C\left(v\right),$$

c) rozwiązanie Shapleya

$$\Phi\left(v\right) = \left(1\tfrac{5}{6}, 3\tfrac{5}{6}, 4\tfrac{2}{6}\right) \in C\left(v\right).$$

Rozwiązanie kompromisowe pokrywa się oczywiście z rozwiązaniem Schmeidlera na mocy twierdzenia 6.1.

7. Podsumowanie

W pracy przedstawiona została definicja kompromisowego rozwiązania wieloosobowej gry kooperacyjnej. Idea rozwiązania kompromisowego gry kooperacyjnej wywodzi się z analogicznego rozwiązania zadania optymalizacji wielokryterialnej. Z uwagi na specyfikę relacji dominowania [10] (relacja ta nie jest relacją porządku) klasyczny punkt idealny zadania optymalizacji wielokryterialnej [12] został zastąpiony punktem odniesienia (punktem wyznaczającym $\overset{*}{\omega} = v$). Geometryczną interpretacją zadania wyznaczania rozwiązania kompromisowego gry $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ jest zadanie wyznaczenia najbliższej gry $\Gamma^p = (\boldsymbol{N}, v^p)$ (w sensie normy z parametrem $p \geq 1$) ze zbioru gier z jednoelementowym C-jądrem i jej rozwiązanie.

Każda gra $\Gamma = (\boldsymbol{N}, v)$ z niepustym C-jądrem generuje łańcuch $\boldsymbol{L}(v)$ gier z niepustym C-jądrem taki, że

$$\boldsymbol{L}(v) = \left\{ \bar{v} \in V_C(3) \middle| \bar{v}(S) = v(S) + t, \text{ dla } S \in N(\boldsymbol{N}), t \leq t^v \right\},$$

gdzie $t^v = -\frac{1}{3} n(v)$.

Zachodzi przy tym

$$C(v+t) \subset C(v), \quad 0 \leq t \leq t^v. \tag{7.1}$$

Elementem minimalnym (najmniejszym) łańcucha $\boldsymbol{L}(v)$ jest

$$v_* = v + t^v = y^p \in V_*(3). \tag{7.2}$$

Oznacza to, że

$$C(y^p) \subset C(v) \text{ dla każdego } v \in \boldsymbol{L}(v). \tag{7.3}$$

Do wyznaczenia postaci analitycznej rozwiązań kompromisowych wykorzystano własności rzutu ortogonalnego funkcji charakterystycznej v na płaszczyznę zawierającą zbiór gier z jednoelementowym C-jądrem. Pokazano przypadki, w których rozwiązanie kompromisowe pokrywa się z *nucleolusem*.

W pracy przedstawiono również szereg dodatkowych charakterystyk gier kooperacyjnych pozwalających w prosty sposób wyznaczać równoważne gry (0,1)-znormalizowane i ich rozwiązania.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.03.2011 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w kwietniu 2011 r.

LITERATURA

[1] A. Ameljańczyk, *Własności zbioru superaddytywnych funkcji charakterystycznych gier w (0,1)-zredukowanej formie*, Biul. WAT, 2, 1977.

[2] A. Ameljańczyk, *Wektorowa optymalizacja w modelach decyzyjnych ze szczególnym uwzględnieniem modeli growych*, dodatek do Biul. WAT, 2, 1979.

[3] A. Ameljańczyk, *Multicriterial solution of N-person cooperative game and their properties*, Systems Science, 6, 1980.

[4] A. Ameljańczyk, *Goal programming method in multiperson cooperative games*, Foundations of Control Engineering, 8, 3-4, 1983.

[5] A. Ameljańczyk, *A simplified method for determinig equivalent games and their solutions*, Biuletyn Instytutu Systemów Informatycznych, 8, 2011.

[6] R. Aumann, S. Hart, *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Elsevier, 1, 2, 3, 2006.

[7] A. K. Dixit, B. J. Nalebuff, *Sztuka strategii*, MT Biznes, 2009.

[8] M. Leng, M. Parlar, *Analytic Solution for the Nucleolus of a Three-Player Cooperative Game*, Naval Research Logistics, 57, 2010.

[9] M. Maschler, B. Peleg, L. Shapley, *Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solutions concepts*, Mathematics of Operations Research, 4, 1979.

[10] G. Owen, *Teoria gier*, PWN, 1975.

[11] D. Schmeidler, *The nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 17, 1969.

[12] P. L. Yu, G. Leitmann, *Compromise solutions domination structures and Salukwadze's solution*, Journal of Optimization Theory and Applications, 13, 3, 1974.

A. AMELJAŃCZYK

Determination of analytic compromise solutions of multiperson cooperative games

Summary. The definition of the compromise solutions of multiperson cooperative games and their most important properties were introduced in the work. The normalised function of cooperative profit and the class of orthogonal games were defined. The analytic formulae of determining compromise solutions were introduced. There were determined the conditions in which the nucleolus of the game, defined by D. Schmeidler [11], is a compromise solution.

Keywords: game normalised, orthogonal game, C-core of a game, nucleolus, compromise solution