



## Modelowanie i analiza dynamiczna protezy szkieletowej

MAREK KUCHTA, VIKTOR BALIKOV<sup>1</sup>, LEONID GODLEVSKY<sup>1</sup>,  
MARIAN GRYSZKIEWICZ<sup>2</sup>, MAREK SZULIM, ZBIGNIEW SOKOŁOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Systemów Elektronicznych,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

<sup>1</sup>Odessa State Medical University, 65026 Odessa, Valikhovskiy lane, 2

<sup>2</sup>EM-ES PRROGRAMY-KOMPUTERY, Warszawa

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono analizę porównawczą zachowań mechanicznych protezy szkieletowej w oparciu o badania symulacyjne modelu matematycznego i pomiary laboratoryjne wykonane na rzeczywistym modelu protezy.

Analizę doświadczalną protezy oparto głównie na ocenie wartości przesunięć liniowych siódła protezy pod wpływem symulowanych sił zgryzu przykładowych dynamicznie do wybranych węzłów modelu protezy.

Weryfikację numeryczną przeprowadzono, posilując się metodą elementów skończonych MES.

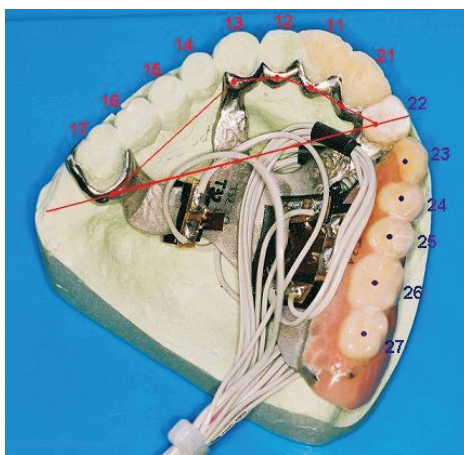
**Słowa kluczowe:** modelowanie numeryczne, biomechanika stomatologiczna, kinematyka protez

**Symbole UKD:** 519.6, 519.7

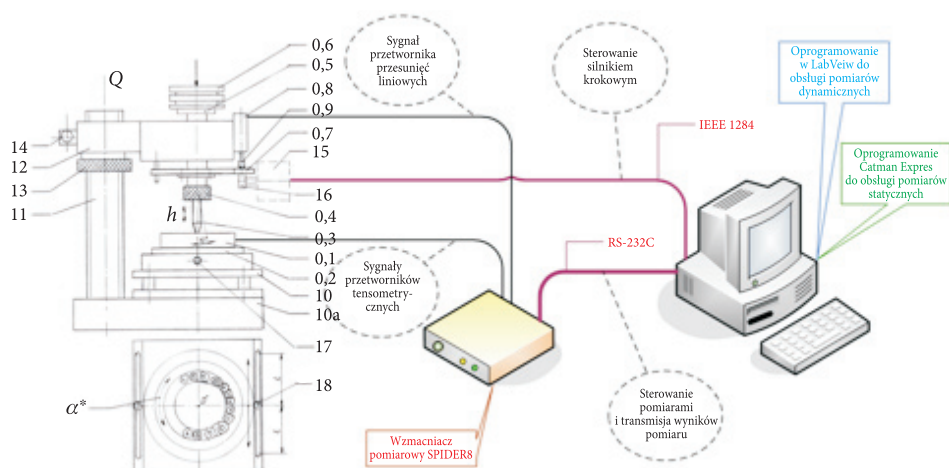
### 1. Wprowadzenie

Przedmiotem opracowania jest analiza numeryczna skrzydłowej protezy szkieletowej pod wpływem obciążenia dynamicznego. Poddana analizie proteza doświadczalna (rys. 1) jest repliką klinicznego uzupełnienia protetycznego, które zostało wykonane i zastosowane z powodzeniem u cierpiącego na brak sześciu zębów pacjenta [1].

Dla potrzeb analizy badawczej, mającej na celu określenie i zmierzenie zachowania się modelu protezy pod wpływem obciążenia dynamicznego, wykonano specjalistyczne stanowisko pomiarowe (rys. 2) [2].



Rys. 1. Doświadczalna proteza zębowa z wyróżnionymi punktami (23-27) przykładowych obciążeń



Rys. 2. Schemat stanowiska pomiarowego

## 2. Pomiar dynamiczny — założenia podstawowe

Pod pojęciem analizy dynamicznej, sprowadzonej do potrzeb niniejszego opracowania, rozumiemy rozwiązanie równania opisującego układ będący w stanie ruchu, którego zmienność (przyspieszenia, opóźnienia) powoduje powstawanie i, co za tym idzie, konieczność uwzględniania w obliczeniach, sił bezwładności.

Rozpatrujemy ruch harmoniczny (drgający) względem równowagi statycznej, osiągniętej w wyniku statycznego działania mas obciążających układ. Stan maksymalnego obciążenia konstrukcji jest wynikiem łącznego, statycznego działania

niezmieniających się obciążeń, siły wymuszającej oraz maksymalnych (amplitud) sił bezwładności poszczególnych mas.

I tak podczas pomiaru zależności siła-odkształcenie protezy uwzględniono zjawisko ruchu oscylacyjnego wokół położenia równowagi statycznej, przy czym zakres samej analizy świadomie ograniczono do opisu wielkości i rozkładu mas oraz opisu zewnętrznych sił czynnych (wzbudzeń) jako zależnych od miejsca i czasu.

### 3. Opis występującego obciążenia dynamicznego

W celu jednoznacznego określenia obciążenia dynamicznego niezbędne jest poznanie jego sposobu przyłożenia, kierunku działania i zmienności w czasie.

Położenie i współpracę punktów masowych określamy zwykle przy pomocy dynamicznych stopni swobody. Ich liczba jest początkowo równa liczbie lokalnych (statycznych) stopni swobody, z biegiem prac dyskretyzacyjnych (uproszczeniowych) ulega znacznemu ograniczeniu.

Ruch oscylacyjny względem położenia obojętnego wystąpi wówczas, gdy wychylenia od tegoż położenia są ograniczone i okresowe

$$q(t) = q(t + n \cdot T), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Zapis (1) jest przedstawieniem ruchu okresowego w okresie  $T$ . Powtarzający się fragment czynności zawarty w tym okresie nazywany jest cyklem.

W prezentowanym układzie obserwujemy oddziaływanie na konstrukcję (protezę) zmiennej siły  $p(t)$  w czasie  $t$ . Siła ta wywołuje wymuszone zginanie protezy.

Efekty dynamicznego działania obciążenia (w porównaniu do obciążenia statycznego) są w konsekwencji jakościowo identyczne, a zatem są w obliczeniach konstrukcji w pełni miarodajne. Wymagane jest jedynie określenie tzw. dynamicznego współczynnika obciążenia, zwanego po prostu *współczynnikiem dynamicznym* ( $DLF$ ). Współczynnik ten określa bezpośredni stosunek maksymalnych przemieszczeń wywołanych obciążeniem dynamicznym do przemieszczeń, jakie powstałyby pod wpływem obciążenia statycznego.

Korzystając z obowiązującego nadal warunku proporcjonalności przemieszczeń statycznych do wywołujących je obciążeń, możemy określić nieznanne obciążenie dynamiczne jako obciążenie zastępcze w postaci

$$P^* = DLF \cdot p_{\text{statyczne}} \quad (2)$$

Wartość współczynnika dynamicznego można określić analitycznie (choćby na podstawie najmniejszej wartości własnej) lub doświadczalnie — za pomocą pomiarów drgań rzeczywistych konstrukcji.

#### 4. Drgania harmoniczne — opis szczegółowy

Dla potrzeb niniejszych obliczeń, prowadzonych za pomocą metody elementów skończonych (MES), (tak jak w obliczeniach statycznych [3]), wybrane punkty węzłowe konstrukcji obciążane są („harmonizowane”) przy pomocy sił wzbudzących, obliczonych w oparciu o pulsację  $\Omega$ , mianowicie:

$$p(t) = p_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Z ciągłego, zmiennego ruchu wybieramy „czasowy” przyrost (krok) przemieszczenia:

$$\delta_p(t) = d_p \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (4)$$

Obowiązuje tu również stosowany w statyce zapis rozwiązania macierzowego MES w postaci:

$$\mathbf{K} \delta = p, \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{K}$  — macierz sztywności;  
 $d$  — niewiadome przemieszczenia;  
 $p$  — obciążenia.

Co więcej, łatwo się on rozszerza na omawiane zagadnienie dynamiki, poprzez wprowadzenie do węzłów układu masowych sił bezwładności  $\mathbf{M} \delta''$ , przez co uzyskujemy rozszerzony układ w postaci:

$$\mathbf{K} \delta(t) + \mathbf{M} \delta''(t) = p(t), \quad (6)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$  — macierz mas;  
 $\delta''(t)$  — druga pochodna przemieszczenia względem czasu.

W powyższym zapisie, znanym zresztą pod postacią równania ruchu, świadomie pomijamy składnik odpowiadający za tłumienie.

Po podstawieniu równań (3) i (4) do równania ruchu (6) otrzymamy równanie algebraiczne

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) d_p = p_0, \quad (7)$$

którego rozwiązanie ( $d_p$ ) daje amplitudę wymuszenia.

Pełną wartość amplitudy wymuszenia określa zależność

$$\delta(t) = \delta_h(t) + \delta_p(t), \quad (8)$$

gdzie:  $\delta_h(t)$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\mathbf{K} \delta(t) + \mathbf{M} \delta''(t) = \{0\} \quad (9)$$

znanego bardziej pod postacią drgań swobodnych (własnych).

Należy zauważyć, że dokładna wartość rozwiązania, uzyskana ze wzoru (8), jest rzadko w praktyce wymagana, gdyż towarzyszące wymuszeniom harmonicznym drgania własne z powodu sił tłumiących bardzo szybko zanikają. Dalsze rozważania koncentrują się na określeniu wartości wg zależności (4).

Jeżeli mamy wyznaczone siły węzłowe dla różnych pulsacji  $\Omega_i$ ,

$$p_i = P_i \cdot \sin \Omega_i \cdot t, \quad (10)$$

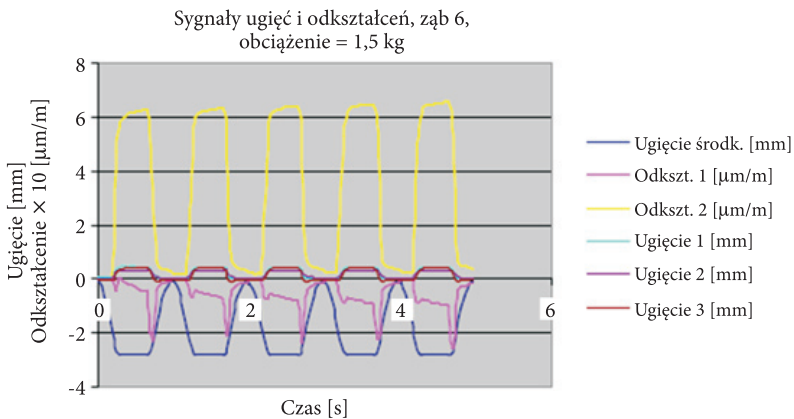
możemy otrzymać częściowe rozwiązanie równania ruchu (6) przez superpozycję, to znaczy wyżej opisane postępowanie prowadzimy oddzielnie dla pulsacji wzbudzającej  $\Omega_i$ , a otrzymane rezultaty sumujemy. Podobnie możemy postąpić, gdy nie wszystkie wzbudzenia występują z takim samym przesunięciem fazowym, np.

$$p_i = P_i \cdot (\sin \Omega_i \cdot t + \alpha_i). \quad (11)$$

## 5. Wyniki analizy numerycznej protezy

W oparciu o przedstawione ustalenia dokonano analizy porównawczej protezy.

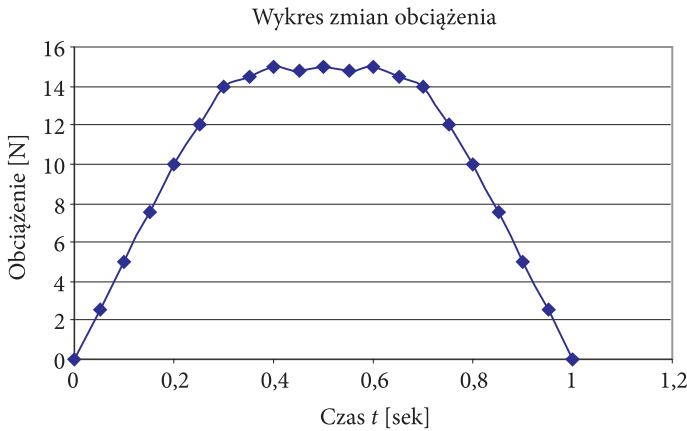
Z obszernego spektrum wyników pomiarów, poprowadzonych dla różnych obciążeń, przyjęto do porównań rezultaty pracy protezy pod obciążeniem 15 N. Jest to wartość dająca w protezie największe z pomierzonych ugięcia. Jest ono



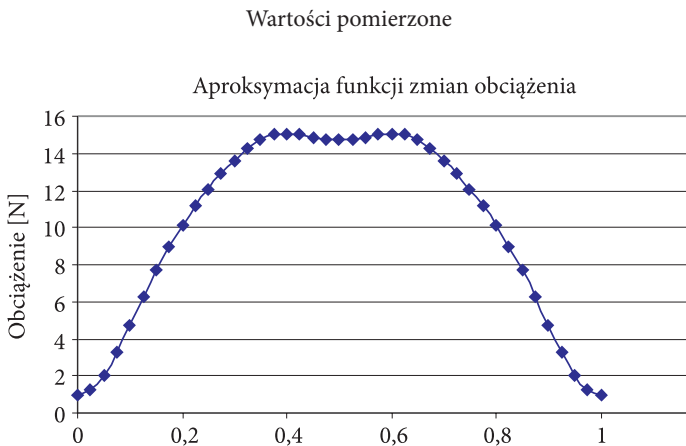
Rys. 3. Wyniki pomiarów pracy protezy pod zmiennym obciążeniem 15 N

wartościowo zbliżone do ekstremalnych warunków „eksploatacyjnych” protezy. Ponadto wartość tego obciążenia, powiększona o współczynnik dynamiczny, wskaże ewentualne odstępstwa od pracy liniowej.

Cykliczny wykres zmian obciążenia podczas pracy protezy pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Zmienność obciążenia wywołująca efekty pokazane na rysunku 3.



Rys. 5. Wyniki aproksymacji obciążenia przy pomocy 4 współczynników  $A(i)$

Analiza numeryczna protezy dokonana została przy pomocy Metody Elementów Skończonych [4]. Schemat dyskretyzacji (podział na elementy skończone) pokazano na rysunku 6.

TABELA 1

Początkowe wartości współczynników szeregu Fouriera funkcji wymuszenia

Szeregi Fouriera — przybliżona analiza harmoniczna

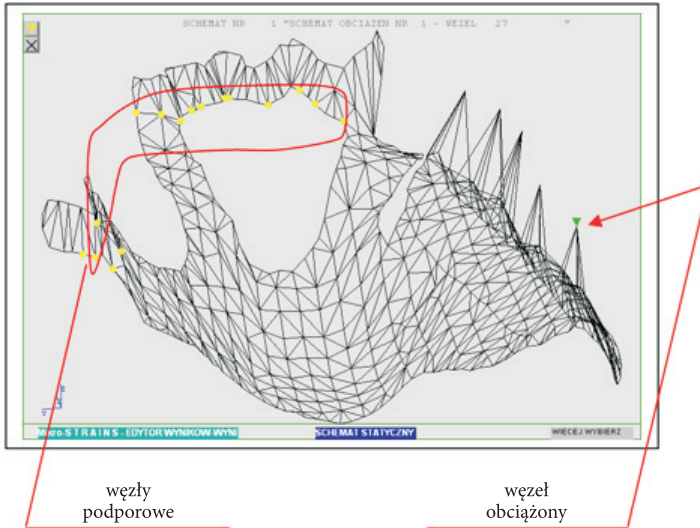
Szereg-COS

Długość okresu : 1

Liczba odcinków : 20

Współrzędne punktów zadanych

Punkt	X	Y	Współczynniki szeregu Fouriera		
			I	A(I)	B(I)
0	0,000	0,000	0	10,280	0,000
1	0,050	2,500	1	-6,528	0,000
2	0,100	5,000	2	-2,108	0,000
3	0,150	7,500	3	-0,349	0,000
4	0,200	10,000	4	-0,343	0,000
5	0,250	12,000	5	-0,300	0,000
6	0,300	14,000	6	-0,162	0,000
7	0,350	14,500	7	-0,120	0,000
8	0,400	15,000	8	-0,187	0,000
9	0,450	14,800	9	-0,203	0,000
10	0,500	15,000	10	0,020	0,000
Obliczone wartości funkcji					
Punkt	X	Y			
0	0,000	0,000			
1	0,100	5,000			
2	0,200	10,000			
3	0,300	14,000			
4	0,400	15,000			
5	0,500	15,000			
6	0,600	15,000			
7	0,700	14,000			
8	0,800	10,000			
9	0,900	5,000			
10	1,000	0,000			



Rys. 6. Siatka podziału MES — zaznaczono węzły podporowe oraz węzeł obciążony

Materiałem, z którego wykonana została proteza modelowa, jest wironit extra-hart — stop do odlewania elementów prac kombinowanych (certyfikat 82593, CE 0044 ISO 6871-1).

Potrzebne do analizy numerycznej charakterystyki wytrzymałościowej to:

- moduł sprężystości podłużnej —  $E = 170\,000\text{ N/mm}^2$ ,
- współczynnik Poissona —  $\nu = 0,3$ ,
- gęstość materiału —  $\gamma = 8,2\text{ g/cm}^3$ .

W pracy określono również częstotliwości własne analizowanej protezy. Wyniki zamieszczono w tabeli 2.

Częstotliwości własne protezy

TABELA 2

Opis drgań własnych				
Nr	Częstość [rad/s]	Kołowa [Hz]	Częstość $f, n$ [okr./min]	Okres [sek]
1	32,853	5,229	313,721	1,91E-01
2	35,646	5,673	340,393	1,76E-01
3	45,566	7,252	435,123	1,38E-01
4	48,393	7,702	462,116	1,30E-01
5	50,734	8,074	484,47	1,24E-01

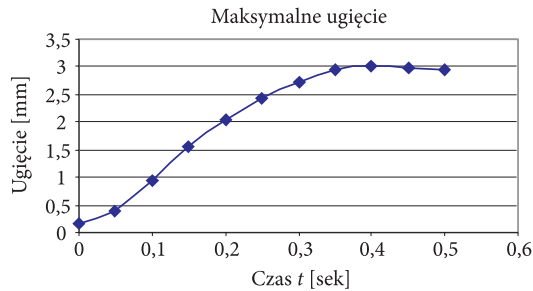


Model protezy jest układem „wysoko strojonym”, co gwarantuje, że w obszarze założonych drgań harmonicznym nie ma możliwości natrafienia na którąkolwiek z częstotliwości własnych. Potwierdziła to również dalsza analiza.

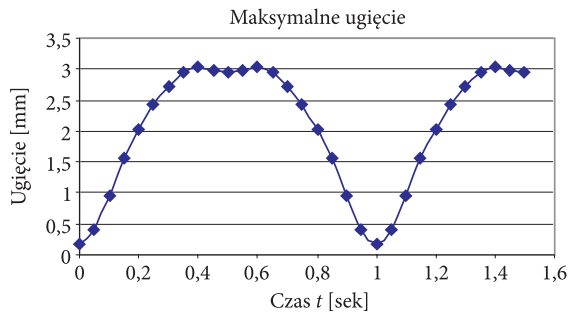
Analizę numeryczną przemieszczeń przeprowadzono z zamieszczonym wyżej szczegółowym opisem metody.

Obciążenie usytuowano w węźle 27 (rys. 6) dającym największe ugięcie protezy. Porównania wyników ograniczono do maksymalnych ugięć protezy.

Zmienność maksymalnej wartości ugięcia w okresie połowy okresu (jeden cykl) oraz w okresie  $1,5 T$  pokazano na rysunkach 7 i 8.

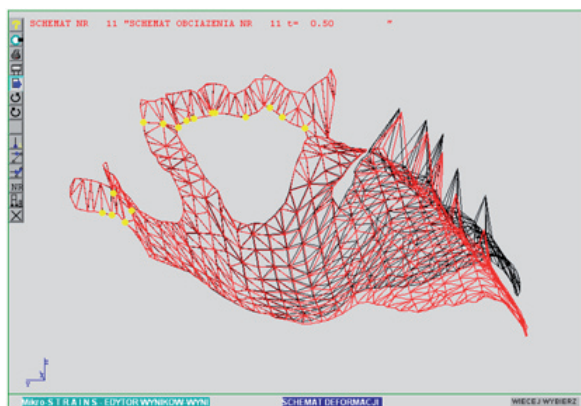


Rys. 7. Przebieg maksymalnego ugięcia w czasie  $0 \div 0,5$  sek.



Rys. 8. Przebieg maksymalnego ugięcia w czasie  $0 \div 1,5$  sek.

Deformacje protezy w czasie jej największego wyężenia dla  $t = 0,5$  sek., przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 9. Schemat deformacji protezy — czas  $t = 0,5$  sek.

## 6. Analiza otrzymanych rezultatów

Przedstawiona analiza potwierdza wizualną ocenę pracy protezy jako układu wysoko strojonego. Duża sztywność przy małych wymiarach geometrycznych ustawia pierwszą częstotliwość rezonansową na dość wysokim poziomie, niemożliwym do osiągnięcia podczas normalnej eksploatacji protezy, w jej naturalnym otoczeniu.

Oznacza to tym samym, że:

- amplitudy drgań wymuszonych w tak odległym obszarze od rezonansu nie będą zależały w istotny sposób od tłumienia,
- amplitudy drgań o częstotliwościach eksploatacyjnych, a więc znacząco mniejszych od pierwszej częstotliwości rezonansowej, są bardzo bliskie przemieszczeniom statycznym wywołanym stałą siłą  $P = 15$  N.

Ze względu na założoną liniowość pracy rozpatrywanego układu protezy możemy z powodzeniem stosować zasadę superpozycji, obliczając drgania wymuszone oddzielnie dla poszczególnych składowych harmonicznych, sumując następnie wyniki obliczeń.

Dla każdej składowej harmonicznej uzyskujemy inną macierz sztywności dynamicznej, co pozwala dokładnie ustalić przebieg oraz maksymalne wielkości przemieszczeń i sił wewnętrznych układu protezy.

Artykuł wpłynął do redakcji 3.11.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w listopadzie 2009 r.

## LITERATURA

- [1] W. MICHALSKI, M. KUCHTA, K. FOKOW, *Tensometryczne pomiary doświadczalne zachowań mechanicznych dla symulacji numerycznej skrzydłowej protezy zębowej*, Materiały Konferencyjne VII Sympozjum Modelowanie i Pomiary w Medycynie, Krynica, 2005, 197-203.

- [2] M. KUCHTA, K. KWIATOS, K. FOKOW, *Zestaw pomiarowy do badań diagnostycznych protez zębowych*, Diagnostyka, 3, 39, 2006, 187-193.
- [3] M. KUCHTA, A. CHWALEBA, M. GRYSZKIEWICZ, *Eksperymentalna weryfikacja modelowania ugięć szkieletowej protezy zębowej o rozdzielonej kinematyce*, X Szkoła komputerowego wspomaganie projektowania, wytwarzania i eksploatacji, materiały konferencyjne, Jurata 2006, 91-97.
- [4] M. GRYSZKIEWICZ, *System Analizy Konstrukcji Inżynierskich MIKRO-STRAINS. Podręcznik użytkownika*, Warszawa, 2004.
- [5] C. MEYER, A. C. SCORDELIS, *Computer Program for Prismatic Folded Plates with Plate and Beam Elements*, University of California, Berkeley, 1970.
- [6] K. H. LAERMAN (red.), *Hybrid techniques in experimental solid mechanics*, Springer, Wien, 2000.
- [7] T. W. P. KORIOOTH, T. W. WALDRON, A. VERSLUIS, J. K. SCHULTE, *Forces and moments generated at the dental incisors during forceful biting in humans*, J. of Biomech., 1997.
- [8] O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [9] M. BAGGE, *A model of bone adaptation as an optimization process*, J. Biomech., 2000.
- [10] G. MIŁEWSKI, *Wytrzymałościowe aspekty interakcji biomechanicznej tkanka twarda – implant w stomatologii*, Mechanika nr 89, Politechnika Krakowska, Kraków, 2002.
- [11] T. W. P. KORIOOTH, T. W. WALDRON, A. VERSLUIS, J. K. SCHULTE, *Forces and moments generated at the dental incisors during forceful biting in humans*, J. of Biomech., 1997.
- [12] Program obliczeniowy Robot 17.5 z kluczem zabezpieczającym 3510, certyfikat legalności nr 116/07/2004/AL., RoboBAT.

M. KUCHTA, V. BALIKOV, L. GODLEVSKY, M. GRYSZKIEWICZ,  
M. SZULIM, Z. SOKOŁOWSKI

### Modelling and dynamic analysis of a skeleton's prosthesis

**Abstract.** In the research, a comparative analysis was presented. It concerned behaviour of mechanical skeleton's prosthesis based on simulating mathematical model and laboratory measurements carried out on a realistic prosthesis' model.

Experimental analysis of the prosthesis is based mainly on the evaluation of values of linear movements of prosthesis' saddle triggered by simulated forces that were put dynamically to selected prosthesis' model's nodes.

Numerical verification was carried on the basis of finite elements method (MES).

**Keywords:** numerical modelling, dental biomechanics, kinematics of dentures

**Universal Decimal Classification:** 519.6, 519.7

