



## Stateczność cienkościennych powłok cylindrycznych poddanych uderzeniu płytą sztywną

DANUTA MIEDZIŃSKA, JERZY JACHIMOWICZ,  
PAWEŁ DZIEWULSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechaniczny,  
Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono wyniki dynamicznych analiz numerycznych procesu wyboczenia cienkościennej powłoki cylindrycznej poddanej obciążeniom uderzenia nieskończonej sztywną płytą, której nadano różne wartości energii kinetycznej. Pokazano wpływ tej energii na proces deformacji powłoki oraz na wartości sił krytycznych, przy których konstrukcja traci stateczność. Przedstawiono ogólne równania metody elementów skończonych używanych do obliczeń procesów dynamicznych.

**Słowa kluczowe:** utrata stateczności, powłoki cylindryczne, wyboczenie, energia kinetyczna

**Symbole UKD:** 624.074.4.046

### 1. Wstęp

Dopuszczalne obciążenia użytkowe stosowanych współcześnie konstrukcji cienkościennych są z reguły zdeterminowane ich statecznością. Wśród konstrukcji cienkościennych najbardziej rozpowszechnione są powłoki, których powierzchnie podstawowe są rozwijalne. Tłumaczy się to przede wszystkim łatwością ich wykonania z blach uformowanych w płaskie arkusze.

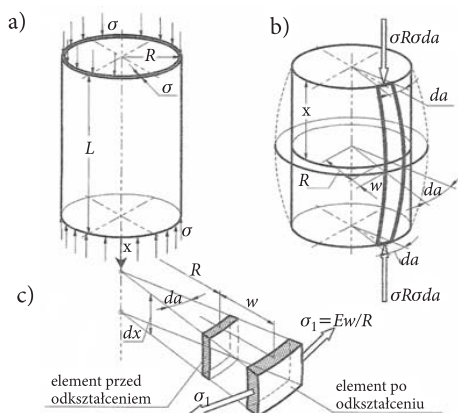
Wśród powłok rozwijalnych najczęściej występują w technice powłoki walcowe i stożkowe. Pracują one w rozmaitych warunkach obciążenia, spośród których tylko trzy, jeśli nie bierze się pod uwagę stateczności równań materiałowych, mogą spowodować strukturalną utratę stateczności: obciążenie ciśnieniem zewnętrznym, ściskanie podłużne i skręcanie. Cienkościennie powłoki o takim kształcie stosuje się między innymi na tzw. elementy „crashowe”, tzn. poddawane obciążeniom uderzeniowym.

Takie elementy mogą występować w samochodach osobowych jako części podpierające układ zderzaka w celu pochłonięcia energii. Spotykane są także w śmigłowcach jako podpory fotela zmniejszające obciążenia pilota w czasie tzw. rozbicia. W strukturach wykorzystywane jako części kadłubów lotniczych czy rakiet.

Zależnie od intensywności obciążenia, jego długotrwałości i względnej grubości powłoki, stan odkształcenia po wyboczeniu może być sprężysty i wtedy nie stanowi bezpośredniego zagrożenia wytrzymałości konstrukcji. Z tego punktu widzenia bardziej niebezpieczny jest przypadek wyboczenia plastycznego [1].

## 2. Dane i założenia

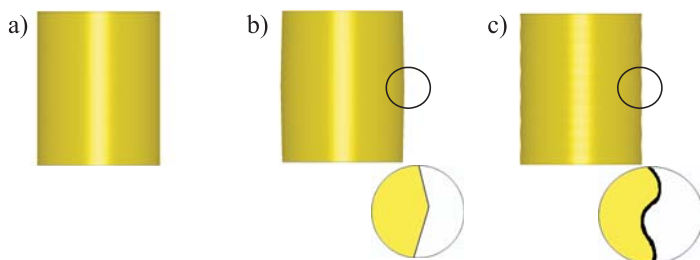
Poniżej zostaną przedstawione analizy numeryczne walca cienkościennego o wymiarach: wysokość  $L = 50$  mm, promień (do powierzchni środkowej)  $R = 20$  mm, grubość ścianki  $\delta = 1$  mm (rys. 1).



Rys. 1. Osiowo symetryczne wyboczenie ściskanej powłoki [3]

Jest on wykonany ze stali o parametrach: gęstość  $\rho = 7,8 \text{ kg/mm}^3$ , moduł Younga  $E = 210 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ , granica plastyczności  $R_e = 0,33 \text{ GPa}$ .

Do obliczeń użyto trzech modeli geometrii: idealnej (bez imperfekcji), z imperfekcją obwodową (środkowy równoleżnik został powiększony o 0,5 mm po promieniu i powstała w ten sposób krzywa boczna została obrócona wokół osi  $z$ ), z imperfekcją sinusoidalną (krawędź boczna została narysowana jako sinusoida o amplitudzie 0,2 mm i obrócona wokół osi  $z$ ) (rys. 2). Walec jest ustawiony na nieruchomej płycie o współczynniku tarcia 0,2. Uderzenie jest realizowane płytą nieskończenie sztywną o masie 5 kg o prędkości początkowej kolejno 5, 10, 15 i 20 m/s. W procesie uderzenia początkowa energia kinetyczna płyty jest zamieniana na energię kinetyczną analizowanej próbki.



Rys. 2. Walec: a) idealny (bez imperfekcji); b) z imperfekcją obwodową (0,5 mm); c) z imperfekcją sinusoidalną (0,2 mm) — w powiększeniu oddano charakter imperfekcji w przesadzie

### 3. Cel badania

Celem poniższego opracowania jest analiza wpływu prędkości płyty uderzającej i jej energii kinetycznej na energochłonność konstrukcji oraz na wartości sił krytycznych.

### 4. Krytyczne parametry dynamiczne

Podstawowym celem, do którego dąży teoria dynamicznej stateczności konstrukcji jest określenie krytycznych parametrów dynamicznych (*KPD*). Mowa tu o takich wielkościach, jak ciśnienie krytyczne, działające na zewnątrz powłoki, krytyczna siła ściskająca pręt lub powłokę o znanej geometrii lub krytyczna długość (pręta, powłoki) przy znanym obciążeniu itd.

Obecnie nie można mówić o istnieniu jednego kryterium dynamicznej stateczności konstrukcji, a więc i *KPD* nie może być określone w sposób jednoznaczny dla wszelkich typów konstrukcji i różnych przypadków obciążenia.

W zależności od geometrii konstrukcji (pręt, powłoka, płyta itd.), jej rodzaju (idealna lub rzeczywista), a także od kierunku obciążenia (podłużny, poprzeczny, skrętny), czyli ogólnie mówiąc zależnie od tego, jak zostanie sformułowany problem początkowo — brzegowy, postuluje się różne kryteria osiągnięcia stanu krytycznego i otrzymuje odpowiednio różne *KPD*.



Rys. 3. Proces ściskania rurki o długości początkowej 35 mm [3]

W artykule przyjęto kryterium pierwszej fali wybojeniowej — pierwszy „pik” na krzywej zależności siły od czasu, w którym następuje przeskok [2, 4, 5]. Na rysunku 3 przedstawiono eksperyment ściskania stalowej rurki o długości początkowej 35 mm. Można tu zaobserwować charakterystyczne fale wybojeniowe.

## 5. Ogólne równania metody elementów skończonych dla procesów dynamicznych

W metodach obliczeniowych typu *explicite*, takich jak metoda różnic centralnych, ujęcie zagadnień nieliniowości jest bezpośrednie i niewymagane są tutaj iteracje. Globalny układ dyskretyzowanych równań ruchu rozwiązywanych w każdym kroku czasowym ma postać [9]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{R}_n, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczeń węzłowych,  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas,  $\mathbf{K}$  — macierzą sztywności nieliniowo zależną od deformacji (ponieważ używana jest tu geometrycznie nieliniowa procedura, odpowiednia do obliczania dużych deformacji), a  $\mathbf{R}$  jest wektorem sił węzłowych (czynnych).

Stosując metodę różnic centralnych, otrzymujemy:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_n + 1/2 \Delta t_{n+1}^2 \ddot{\mathbf{u}}_n, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + 1/2 \Delta t_{n+1} (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{u}}_n), \quad (3)$$

$$\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{u}_n = \sum_i \mathbf{F}_n^{(i)} = \sum_i \int_{V^{(i)}} \mathbf{B}_n^T \hat{\mathbf{S}}_n dV, \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{B}_n^T$  jest macierzą odkształceń–przemieszczeń w kroku  $n$ -tym,  $V^{(i)}$  jest objętością  $i$ -tego elementu, a  $\mathbf{F}$  to wektor sił reakcji.

## 6. Modele obliczeniowe i realizacja obliczeń

Do budowy modelu zastosowano siatkę 24206 (98 elementów na wysokości i 247 na obwodzie badanej próbki) elementów skończonych typu powłokowego Shell (Quad 4 [7]). Płyty realizujące uderzenie opisano jako elementy sztywne Rigid. Pomiedzy współpracującymi elementami zdefiniowano kontakt dwustronny typu master-slave. Na powierzchniach kontaktu uwzględniono tarcie wg. modelu Amontonsa-Coulomba o współczynniku  $\mu = 0,2$ .

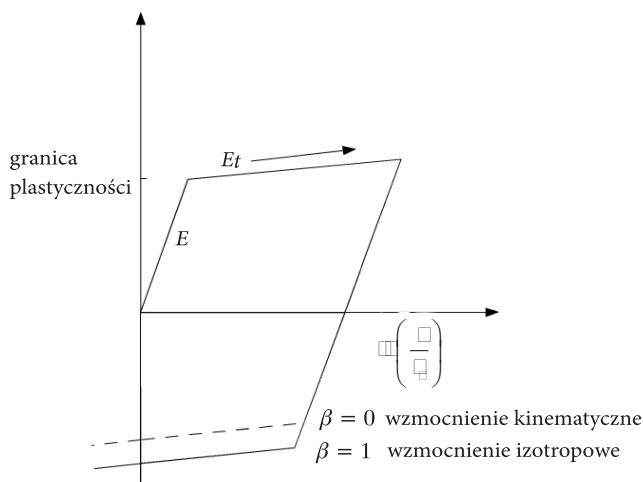
Wzajemną penetrację kontaktujących się powierzchni ograniczono, stosując metodę kary (*penalty method*) [7]. Sztywność kontaktu jest proporcjonalna do sztywności kontaktujących się elementów i ich wielkości. Iteracyjny proces rozwiązania (*iterative penetration checking*) oparty na metodzie Newtona-Raphsona zapewnia, że spełnione są zarówno równania równowagi jak i warunki kontaktu (ograniczenie penetracji), ale wymaga dodatkowych iteracji, co wydłuża czas obliczeń. Analiza dynamiczna procesu uderzenia była realizowana przy użyciu oprogramowania LS-Dyna w ujęciu *explicit* [7].

## 7. Model materiału

W analizie dynamicznej przy użyciu oprogramowania LS-Dyna użyto modelu materiału oznaczonego MAT\_003 (\*MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC [7]). Stosowany jest tu opis dla materiału plastycznego ze wzmocnieniem kinematycznym lub izotropowym. Jest to model bardzo efektywny i dopasowany zarówno do elementów belkowych, powłokowych, jak i bryłowych.

Opis ten w swych równaniach konstytutywnych uwzględnia tensor prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$ . Jest ona liczona przy użyciu zależności Cowpera-Symonds, w których pojawia się współczynnik skali dla granicy plastyczności:

$$1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{1/p}$$



Rys. 4. Sprężysto-plastyczny model materiału ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym,  $l_0$  i  $l$  — odpowiednio długości nieodkształconej i odkształconej próbki poddanej jednoosiowemu obciążeniu.  $E$  i  $E_t$  — nachylenia odcinków krzywej (moduł Younga i moduł styczny)

Dla pominięcia wpływu prędkości odkształceń używa się współczynników prędkości odkształcenia  $C = 0$  i  $P = 0$  w oprogramowaniu LS-Dyna, co zastosowano w analizowanym modelu.

Kinematyczne, izotropowe bądź pośrednie wzmocnienie określone jest za pomocą współczynnika wzmocnienia z przedziału  $\beta' \in \langle 0; 1 \rangle$ . Jeśli  $\beta' = 0$ , wzmocnienie jest kinematyczne, jeśli  $\beta' = 1$  — izotropowe. Model materiału przedstawia powyższy rysunek 4.

## 8. Analiza wpływu prędkości uderzenia na energochłonność konstrukcji

W wyniku analizy numerycznej procesu wyboczenia walca przy uderzeniu płytą sztywną (masa płyty stała i równa 5 kg) o prędkości początkowej kolejno 5, 10, 15 i 20 m/s, otrzymano dwanaście wyników przy uwzględnieniu trzech wariantów imperfekcji.

Energia pochłonięta przez walec

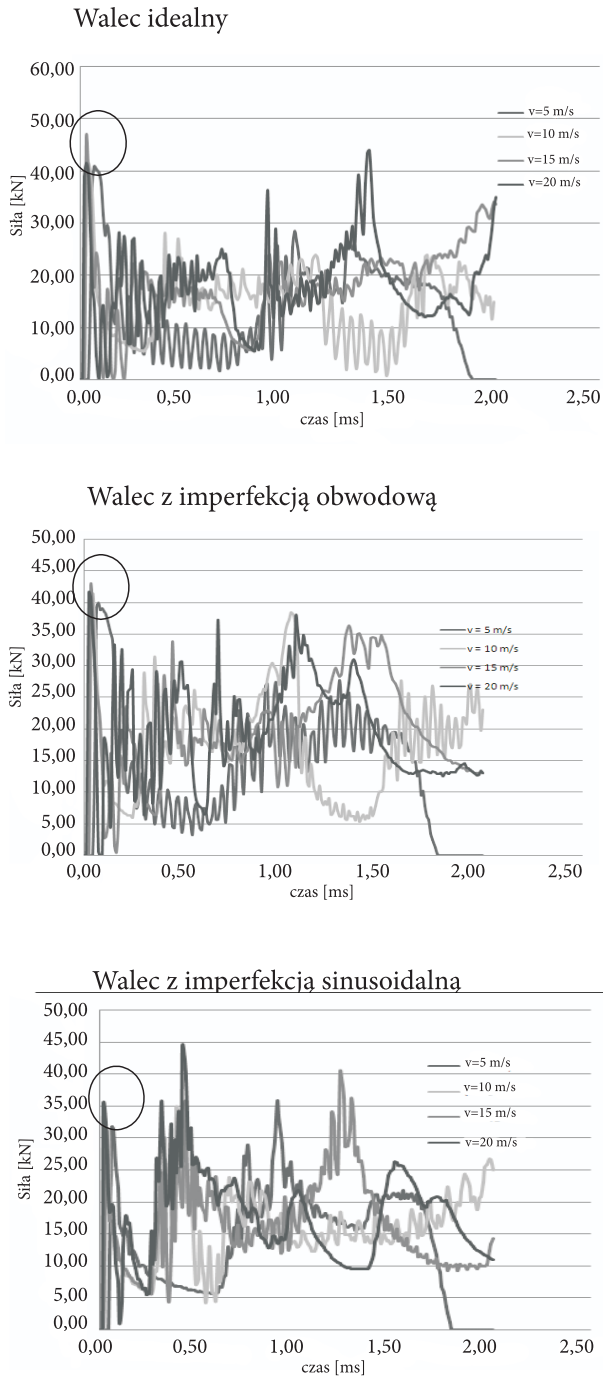
TABELA 1

Prędkość [m/s]	Energia wewnętrzna [J]		
	Idealny	Impf. obw.	Impf. sin.
5	62,26	62,31	62,24
10	249,36	249,44	248,54
15	560,54	562,17	559,44
20	994,24	987,46	975,5

Siła krytyczna w procesie uderzenia

TABELA 2

Prędkość [m/s]	Siła krytyczna [kN]		
	Idealny	Impf. obw.	Impf. sin.
5	40,9	39,9	31,7
10	41,3	40,9	31,3
15	46,4	42,6	30,6
20	46,2	41,6	35,3



Rys. 5. Porównanie zmienności siły w funkcji czasu przy jednakowych geometriach walca

W tabeli 1 przedstawiono wartości energii pochłoniętej przez walec, liczonej jako pole powierzchni pod krzywą na wykresie siły w funkcji czasu. Jak widać energia ta rośnie wraz ze wzrostem prędkości płyty uderzającej. Natomiast przy jednakowych prędkościach, dla różnych geometrii walca energia ta jest porównywalna. Jest to wynikiem tego, że walec pochłania całą energię kinetyczną płyty, która rośnie przy coraz większych prędkościach uderzenia.















W tabeli 2 zgromadzono wartości sił krytycznych (przez wielu autorów nazywanych obciążeniami granicznymi jeśli występują imperfekcje [8]), które wystąpiły w czasie zgniatania. Najmniejsze wartości otrzymano dla wariantu uderzenia walca z imperfekcją sinusoidalną. Wynika to z kształtu imperfekcji, który pogłębia działanie fali odkształceń rozchodzącej się po uderzeniu, co ułatwia wyboczenie.

Na rysunku 5 przedstawiono wykresy przebiegów siły (reakcje w płycie dolnej) w czasie. Porównano zachowanie się walca prostego z imperfekcją obwodową i sinusoidalną przy różnych prędkościach uderzenia. Dla wszystkich typów walców widać, że początkowo (do 2 m/s) procesy te zachodzą podobnie. Widoczne są bardzo duże wahania wartości sił. Można to tłumaczyć ciągłym nakładaniem się na siebie fal uderzenia i fal odbitych w materiale walca.

Tabela 3 przedstawia natomiast zmiany w charakterze deformacji dla poszczególnych procesów. W przypadku wszystkich walców widoczna nieregularna deformacja pojawia się dopiero przy prędkości 15 m/s. Natomiast początek odkształceń pojawia się w walcu prostym zarówno na górze i na dole, natomiast w walcu z imperfekcją obwodową na górze, a z imperfekcją sinusoidalną — na dole. Jest to spowodowane różnymi typami imperfekcji i różnym ich wpływem na falę odkształceń.




























TABELA 3

Charakter deformacji przy uderzeniu płytą sztywną

Model	Prędkość płyty [m/s]	Krok 1 $t = 0,3$ m/s	Krok 2 $t = 1$ m/s	Krok 3 $t = 2,2$ m/s	Krok 4 $t = 3,2$ m/s
Walec idealny	5				
Walec idealny	10				
Walec idealny	15				
Walec idealny	20				



cd. tabeli 3

Walec z imperfekcją obwodową	5				
Walec z imperfekcją obwodową	10				
Walec z imperfekcją obwodową	15				
Walec z imperfekcją obwodową	20				
Walec z imperfekcją sinusoidalną	5				
Walec z imperfekcją sinusoidalną	10				
Walec z imperfekcją sinusoidalną	15				
Walec z imperfekcją sinusoidalną	20				

## 9. Analiza uderzenia płytami o ustalonej energii kinetycznej i zmiennej prędkości

Przeprowadzono również obliczenia dla uderzającej płyty o ustalonej energii kinetycznej, lecz o zmiennej prędkości. Jako wyjściową przyjęto wartość energii dla płyty o masie 5 kg i prędkości 15 m/s, tzn.  $E_k = mv^2/2 = 562,5$  J. Do analiz przyjęto następujące wartości:

- $E_k = 562,5$  J,  $v = 5$  m/s,  $m = 45$  kg,
- $E_k = 562,5$  J,  $v = 10$  m/s,  $m = 11,25$  kg,
- $E_k = 562,5$  J,  $v = 20$  m/s,  $m = 2,8125$  kg.

Obliczenia przeprowadzono dla wszystkich analizowanych poprzednio typów walców.

W wyniku otrzymano wartości sił krytycznych przedstawionych w tabeli 4. Jak widać, warunki brzegowe, takie jak prędkość i masa płyty, nie mają wpływu na wartości sił krytycznych, jeśli energia kinetyczna jest niezmienna. Jedyna zauważalna

różnica pojawia się przy małej prędkości i dużej masie płyty, kiedy (szczególnie dla walca z imperfekcją obwodową) wartość siły spada.

Dużą zależność od warunków brzegowych wykazują natomiast deformacje, pokazane w tabeli 5. Szczególnie widoczne jest to dla walca idealnego, gdzie pierwsza fala wyboczeniowa i warunki jej powstania mają największe znaczenie dla postaci utraty stateczności.










TABELA 4

Siły krytyczne przy ustalonej energii kinetycznej

$v$ [m/s]	$m$ [kg]	Siła krytyczna [kN]		
		Walec idealny	Walec z imperfekcją obwodową	Walec z imperfekcją sinusoidalną
5	45	42,9	37,5	27,7
10	11,25	46,7	45,1	25,2
15	5	46,7	43,2	25,4
20	2,8125	46,4	46,0	27,9

TABELA 5

Deformacje przy ustalonej energii kinetycznej (krok czasowy  $t = 1,5$  m/s)

$v$ [m/s]	$m$ [kg]	Walec idealny	Walec z imperfekcją obwodową	Walec z imperfekcją sinusoidalną
5	45			
10	11,25			
20	2,8125			

## 10. Wnioski

W opracowaniu podano metody szacowania analitycznego obciążeń krytycznych dla procesu utraty stateczności walcowych powłok cienkościennych.

W wyniku wykonanej analizy numerycznej stwierdzono, że energochłonność walcowej konstrukcji cienkościennej wzrasta wraz z prędkością płyty uderzającej, a nie zależy od rodzaju imperfekcji.

Stwierdzono natomiast, że wartości sił krytycznych zależą przede wszystkim od energii kinetycznej uderzającej płyty oraz od charakteru imperfekcji powłoki. Fakty te wynikają z mechanizmów powstawania i propagacji fal wyboczeniowych. W powłokach idealnych siły krytyczne osiągają najwyższe wartości.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.07.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2009 r.

#### LITERATURA

- [1] R. GRYBÓŚ, *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, IPPT PAN, PWN, Warszawa, 1980.
- [2] S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa, 1973.
- [3] J. NOWAK, *Cylindryczne elementy energochłonne obciążone falą uderzeniową*, Warszawa, 2008.
- [4] Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Arkady, Warszawa, 1961.
- [5] F. KELLER, *Design criteria for the optimization of a composite shell*, Architecture des Vehicules, 2001.
- [6] E. SZYMCZYK, *Metoda optymalnego kształtowania wytrzymałości wojskowych konstrukcji lotniczych w warunkach ekstremalnych obciążeń*, Warszawa, 2003.
- [7] J. O. HALQUIST, *LS-Dyna. Theoretical manual*, California Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [8] Z. WASZCZYŹYŃ, CZ. CICHON, M. RADWAŃSKA, *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1990.
- [9] K. MILLER, G. JOLDES, D. LANCE, A. WITTEK, *Total Lagrangian explicit dynamics finite element algorithm for computing soft tissue deformation*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 23, 2007, 121-134.

D. MIEDZIŃSKA, J. JACHIMOWICZ, P. DZIEWULSKI

#### Stability of thin-walled cylinders subjected to impact load by a rigid plate

**Abstract.** The results of dynamic numerical analyses of stability of thin-walled steel cylinders exposed to an impact load from an infinitely rigid plate with variable kinetic energy were presented. The influence of this energy and velocities on the deformation process and critical force values (forces causing the instability) was shown. Also the theoretical bases of the instability phenomenon were presented as well as the FEM formulas for dynamic processes.

**Keywords:** dynamic stability, thin-walled cylinder, kinetic energy, crush elements, instability

**Universal Decimal Classification:** 624.074.4.046

