



Metoda analizy niesprężystych elementów żelbetowych ściskanych mimośrodowo

ANNA STOLARCZUK, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę analizy statycznego odkształcania ściskanych elementów żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej elementów i nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych: betonu i stali. Dla stali zbrojeniowej zastosowano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Dla betonu przyjęto model materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem osłabienia materiałowego. Metodę analizy wyteżenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Opracowano efektywne algorytmy rozwiązania układów równań konstytutywnych i przyrostowych równań równowagi prętowych elementów żelbetowych umożliwiających analizę wyboczenia.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji, ściskane elementy żelbetowe, nieliniowość fizyczna, nieliniowość geometryczna

Symbole UKD: 624.012.45

1. Wstęp

Celem artykułu jest opracowanie modelu obliczeniowego ściskanych elementów żelbetowych, który umożliwi badanie zachowania elementu od stanu czysto sprężystego, przez stan sprężysto-plastyczny, do pełnego uplastycznienia i zniszczenia przekroju, z uwzględnieniem wyboczenia.

Opracowanie metody rozwiązania wymaga przeprowadzenia rozważań w zakresie modelowania niesprężystych właściwości materiałów konstrukcyjnych oraz modelowania procesów odkształcania ściskanego elementu żelbetowego.

Modelowanie właściwości materiałów konstrukcyjnych przeprowadzono z wykorzystaniem założeń teorii plastycznego płynięcia. Dla stali zbrojeniowej zastosowano

model materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Dla betonu przyjęto zredukowaną (statyczną) formę niestandardowego modelu dynamicznego odkształcania [1], w którym pominięto wyznaczanie wytrzymałości dynamicznej. Model ten opisuje właściwości sprężyste betonu, ograniczone właściwości idealnego płynięcia plastycznego, osłabienie materiałowe oraz zmiany objętości. W modelu pominięto degradację modułu odkształcania. Przyjęty model betonu umożliwia uproszczony opis stanów zniszczenia (zarysowania lub zmiążdżenia) materiału jako stanów utraty nośności osiągniętych w procesie osłabienia materiałowego przy rozciąganiu lub ścisaniu.

Analiza obejmuje opis zachowania ściskanego elementu żelbetowego, modelowanego jako ustrój prętowy. Ustrój ten obciążony jest statycznie siłą normalną, momentem zginającym oraz obciążeniem ciągłym, działającym w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej elementu. Podstawą teoretycznego modelowania zachowania elementu konstrukcyjnego są równania teorii dużych przemieszczeń ustroju prętowego. Analiza pracy czynnych sił wewnętrznych obejmuje siły podłużne, poprzeczne i momenty zginające.

Metodę analizy wytężenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Rozwiązanie układów nieliniowych równań równowagi przeprowadzono na podstawie algorytmów analizy elementów prętowych umożliwiających określenie stanów przemieszczenia, odkształcania i naprężenia z uwzględnieniem efektów nieliniowości fizycznej materiałów oraz nieliniowości geometrycznej elementu konstrukcyjnego.

2. Modelowanie właściwości materiałów konstrukcyjnych

2.1. Stal zbrojeniowa

Przyjęto sprężysto-idealnie plastyczny model stali zbrojeniowej. Rozważano zredukowany płaski stan naprężenia, ze względu na charakter pracy wiotkich prętów zbrojenia w elemencie żelbetowym (rozciąganie lub ściskanie ze ścinaniem).

Model fizyczny stali zbrojeniowej opisują równania przyrostowe:

$$\sigma_{11}^n = \frac{\sigma_{11}^{n-1} + E_s \Delta \varepsilon_{11}^n}{1 + \frac{2}{3} E_s \Delta \Lambda^n}, \quad \sigma_{12}^n = \frac{\sigma_{12}^{n-1} + 2\mu_s \Delta \varepsilon_{12}^n}{1 + 2\mu_s \Delta \Lambda^n}, \quad (1)$$

gdzie: E_s — moduł odkształcania;
 μ_s — moduł odkształcania postaciowego $\Delta \varepsilon_{ij}^n$;
 $i, j = 1, 2$ — znane przyrosty odkształceń w stali;
 $\Delta \Lambda^n$ — mnożnik skalarny definiujący stan naprężenia;
 n — krok chwilowego stanu naprężenia-odkształcania.

Określenie skalarnego mnożnika $\Delta\Lambda^n$ wymaga sprawdzenia wartości funkcji uplastycznienia dla materiału uplastyczniającego się zgodnie z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Hencky:

$$F^n = \frac{\sqrt{J_2^n}}{k_y} - 1, \quad (2)$$

gdzie: $J_2^n = \frac{1}{6}(\sigma_{ij}^n\sigma_{ij}^n - \sigma_{ii}^n\sigma_{jj}^n)$ — drugi niezmiennik dewiatora naprężenia;

k_y — granica plastyczności stali dla czystego ścinania.

Stwierdzenie przy wstępnym założeniu $\Delta\Lambda^n = 0$, że $F^n < 0$ lub $F^n = 0$ i $\Delta F^n < 0$ oznacza czysto sprężysty stan naprężenia (lub odciążenie), natomiast $F^n > 0$ oznacza idealnie plastyczny stan naprężenia, dla którego należy wyznaczyć wartość mnożnika $\Delta\Lambda^n$ z warunków:

$$F^n = 0, \quad \Delta F^n = 0. \quad (3)$$

Rozwiązanie powyższego równania otrzymuje się numerycznie metodą Newtona, uzyskując rozwiązanie po i -tej iteracji:

$$\Delta\Lambda_{(i)}^n = \Delta\Lambda_{(i-1)}^n - \left[\frac{\partial F(\Delta\Lambda_{(i-1)}^n)}{\partial \Delta\Lambda_{(i-1)}^n} \right]^{-1} F(\Delta\Lambda_{(i-1)}^n) \quad (4)$$

z założoną dokładnością $\Delta\Lambda_0$:

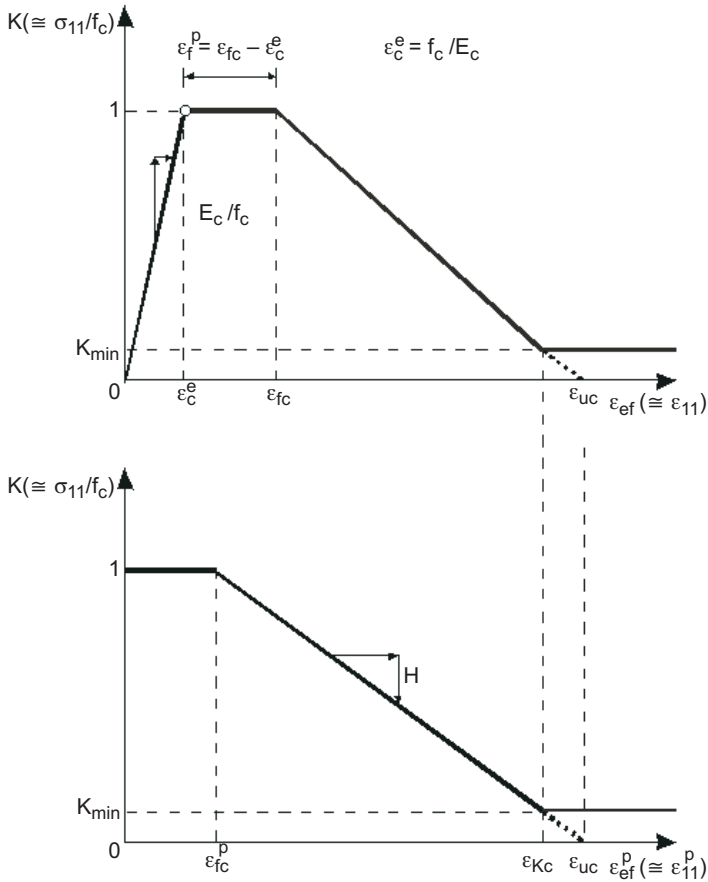
$$|\Delta\Lambda_{(i)}^n - \Delta\Lambda_{(i-1)}^n| \leq \Delta\Lambda_0. \quad (5)$$

Rozwiązanie numeryczne nieliniowego równania algebraicznego (4) jest dobrze uwarunkowane — istnieje tylko jeden pierwiastek $\Delta\Lambda^n > 0$.

2.2. Beton

Dla betonu przyjęto zredukowaną formę niestandardowego modelu dynamicznego odkształcania [1]. Redukcja ta polega na pominięciu wyznaczania wytrzymałości dynamicznej betonu i umożliwia opis statycznego zachowania materiału z uwzględnieniem osłabienia materiałowego.

Model opisuje cztery fazy zachowania betonu (rys. 1): 1° — sprężystego osiągnięcia początkowej powierzchni plastyczności; 2° — idealnego płynięcia plastycznego w ograniczonym zakresie odkształcenia; 3° — osłabienia materiałowego; 4° — zniszczenia (zarysowania przy rozciąganiu lub zmiażdżenia przy ściskaniu) interpretowaną jako fazę naprężeń resztkowych.



Rys. 1. Fazy zachowania betonu

Model fizyczny betonu opisują równania przyrostowe:

$$\sigma_{11}^n = \frac{\sigma_{11}^{n-1} + E_c \Delta \varepsilon_{11}^n}{1 + \frac{2}{3} E_c \Delta \Lambda^n}, \quad \sigma_{12}^n = \frac{\sigma_{12}^{n-1} + 2\mu_c \Delta \varepsilon_{12}^n}{1 + 2\mu_c \Delta \Lambda^n}, \quad (6)$$

gdzie: E_c — moduł odkształcenia;
 μ_c — moduł odkształcenia postaciowego;
 $\Delta \varepsilon_{ij}^n$, $i, j = 1, 2$ — znany przyrost odkształceń w betonie;
 $\Delta \Lambda^n$ — mnożnik skalarny definiujący stan naprężenia;
 n — krok chwilowego stanu naprężenia-odkształcenia.

Określenie skalarnego mnożnika $\Delta\Lambda^n$ wymaga sprawdzenia wartości funkcji uplastycznienia:

$$F^n(\sigma_{ij}^n, K^n) = \left[\frac{\tau_0^n}{\rho^n(\varphi)} + K^n a \right]^2 - K^n b \sigma_0^n - K^{n2} c, \quad (7)$$

gdzie: σ_{ij}^n — tensor naprężenia;
 τ_0^n — styczne naprężenie oktaedryczne, jako funkcja drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia;
 σ_0^n — średnie naprężenie normalne, jako funkcja pierwszego niezmiennika tensora naprężenia;
 $\rho^n(\varphi)$ — funkcja określająca kształt przekroju powierzchni granicznej płaszczyzną oktaedryczną $\sigma_0 = \text{const}$, zależna od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia;
 a, b, c — stałe materiałowe, będące funkcjami podstawowych wytrzymałości betonu dla jednoosiowego i dwuosiowego ściskania oraz jednoosiowego rozciągania;
 K^n — parametr ewolucji powierzchni plastyczności (tj. parametr idealnego płynięcia plastycznego-osłabienia materiałowego-zniszczenia);
 n — krok chwilowego stanu naprężenia-odkształcenia.

Stwierdzenie przy wstępnym założeniu $\Delta\Lambda^n = 0$, że $F^n < 0$ lub $F^n = 0$ i $\Delta F^n < 0$ oznacza czysto sprężysty stan naprężenia (lub odciążenie), natomiast $F^n > 0$ oznacza niesprężyste stany naprężenia, dla których należy wyznaczyć wartość mnożnika $\Delta\Lambda^n$ z równania:

$$\Delta\Lambda^n = \frac{\frac{\partial F^n}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^n}{\frac{\partial F^n}{\partial K} A(H, \eta_{ef}) + \frac{\partial F^n}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial G^n}{\partial \sigma_{kl}}}, \quad A(H, \eta_{ef}) = -H \eta_{ef} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right), \quad (8)$$

gdzie: C_{ijkl} — tensor stałych sprężystości.

W równaniu (8) występują ponadto następujące parametry i funkcje. Parametr ewolucji K^n zdefiniowano w następujący sposób (rys. 1):

$$K^n = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p \leq \varepsilon_{fc}^p \\ K^{n-1} + \Delta K^n & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p > \varepsilon_{fc}^p, \\ K_{\min} & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p > \varepsilon_{uc}^p \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie: ε_{ef}^p — efektywne odkształcenia plastyczne;

ε_{fc}^p — graniczne odkształcenia plastyczne w fazie idealnego płynięcia;
 ε_{uc}^p — graniczne odkształcenia plastyczne w fazie osłabienia materiałowego.

Zmianę ΔK^n parametru ewolucji opisuje następująca zależność:

$$\Delta K^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p \leq \varepsilon_{fc}^p \\ H(\sigma_i^0) \Delta \varepsilon_{ef}^{np} & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p > \varepsilon_{fc}^p \\ 0 & \text{dla } \varepsilon_{ef}^p > \varepsilon_{uc}^p \end{cases} \quad (10)$$

Bezwymiarowy moduł osłabienia ma postać:

$$H(\sigma_i^0) = -\frac{1}{\sigma_i^0 (\varepsilon_{uc} - \varepsilon_{fc} + \frac{f_c}{E_c})}, \quad (11)$$

gdzie: σ_i^0 — bezwymiarowa intensywność naprężenia odniesiona względem stanu naprężenia na początkowej powierzchni plastyczności;
 $\varepsilon_{fc}, \varepsilon_{uc}$ — odkształcenia graniczne;
 E_c — moduł odkształcenia;
 f_c — wytrzymałość betonu dla jednoosiowego ściskania.

Funkcja potencjału plastycznego $G^n(\sigma_{ij}^n, K^n)$, opisująca niestowarzyszone prawo płynięcia, została przyjęta w postaci zmodyfikowanego równania powierzchni plastyczności:

$$G^n(\sigma_{ij}^n, K^n) = \left[\frac{\tau_0^n}{\rho^n(\varphi)} + K^n a \right]^2 - K^n \frac{b}{\beta} \sigma_0^n - K^{n^2} c = 0, \quad (12)$$

gdzie β to stała materiałowa określająca zmiany objętościowe materiału podczas deformacji plastycznych.

Przyjęty model odkształcenia betonu, umożliwia przybliżone modelowanie mechanizmów zarysowania (tj. powstawania, rozwierania i zamykania rys) lub zmiażdżenia, zarówno w procesach monotonicznego odkształcania, jak i w procesach cyklicznego, przemennego odkształcania. Mechanizm zarysowania lub zmiażdżenia betonu wynika z przyjętego prawa osłabienia materiałowego, które zakłada stopniową utratę nośności materiału aż do osiągnięcia stanu naprężeń resztkowych. Wyróżniono przypadki osiągania stanu naprężeń resztkowych: w procesie rozciągania, dla $\sigma_0^n \leq 0$ oraz w procesie ściskania, dla $\sigma_0^n > 0$.

Osiągnięcie stanu naprężeń resztkowych w procesie rozciągania ($\sigma_0^n \leq 0$) powoduje stan zarysowania i nie oznacza bezpowrotnego zniszczenia materiału. Stan zarysowania nie redukuje wytrzymałości betonu na ściskanie i możliwe jest ponowne odkształcenie przy ściskaniu po uprzednim zamknięciu rysy. Przyjmując ε_0^* za wartość trwałego odkształcenia objętościowego, przy którym następuje zarysowanie, to stan rozwarcia uogólnionej rysy jest określony przez warunek $\varepsilon_0^n < \varepsilon_0^*$, natomiast stan zamknięcia rysy i ponowna praca materiału na ściskanie następuje gdy $\varepsilon_0^n > \varepsilon_0^*$. Beton uprzednio zarysowany traci zdolność do ponownego przenoszenia naprężeń rozciągających.

Osiągnięcie stanu naprężeń resztkowych w procesie ściskania powoduje:

- zmiążdżenie betonu, jeżeli, $\sigma_0^n > \sigma_0^*$,
- częściowe zniszczenie, jeżeli $0 < \sigma_0^n \leq \sigma_0^*$,

gdzie σ_0^* jest umowną, graniczną wartością średniego naprężenia normalnego.

Zmiążdżenie betonu oznacza zdolność do przenoszenia naprężeń resztkowych. Zniszczenie częściowe (analogiczne do procesu zarysowania) charakteryzuje się możliwością ponownego rozpoczęcia procesu odkształcania przy ściskaniu, jeżeli aktualne odkształcenie objętościowe ε_0^n jest większe od wartości granicznej ε_0^* osiągniętej w chwili częściowego zniszczenia materiału w poprzednim cyklu odkształcenia.

3. Układ równań podstawowych

3.1. Równania równowagi i związki geometryczne

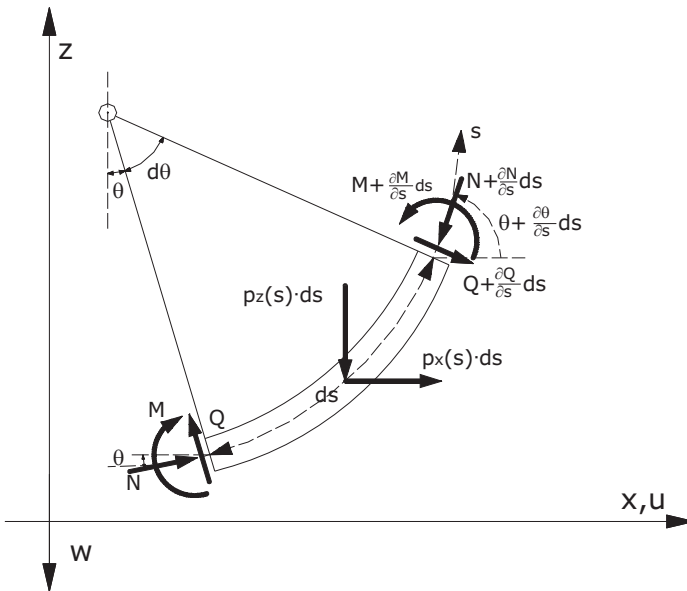
Analiza obejmuje pracę ściskanego elementu żelbetowego, przedstawionego jako płaski ustrój prętowy z uwzględnieniem jego krzywizny początkowej. Omawiany ustrój obciążony jest statycznie siłą normalną i momentem zginającym na jednym z węzłów brzegowych oraz obciążeniem nierównomiernie rozłożonym, działającym w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni przekroju poprzecznego elementu. Podstawą teoretycznego ujęcia zachowania się konstrukcji są równania teorii dużych przemieszczeń ustroju prętowego. Analiza pracy czynnych sił wewnętrznych obejmuje pracę sił podłużnych, poprzecznych i momentów zginających.

W rozpatrywanym elemencie żelbetowym uwzględniamy charakterystyczne uwarunkowania geometryczne, tj. zmiany przekroju betonu i stali zbrojeniowej, zakrzywienie początkowe oraz warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia i działania obciążenia zewnętrznego.

W globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x, z\}$, dla układu sił wewnętrznych podłużnych N , poprzecznych Q i momentów zginających M oraz składowych obciążeń zewnętrznych $\{p_x, p_z\}$ działających na odkształcony element

o długości ds i kącie nachylenia θ , różniczkowe równania równowagi mają postać (rys. 2):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(N \cos \theta)}{\partial s} + \frac{\partial(Q \sin \theta)}{\partial s} + p_x(s) &= 0 \\ -\frac{\partial(N \sin \theta)}{\partial s} + \frac{\partial(Q \cos \theta)}{\partial s} + p_z(s) &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

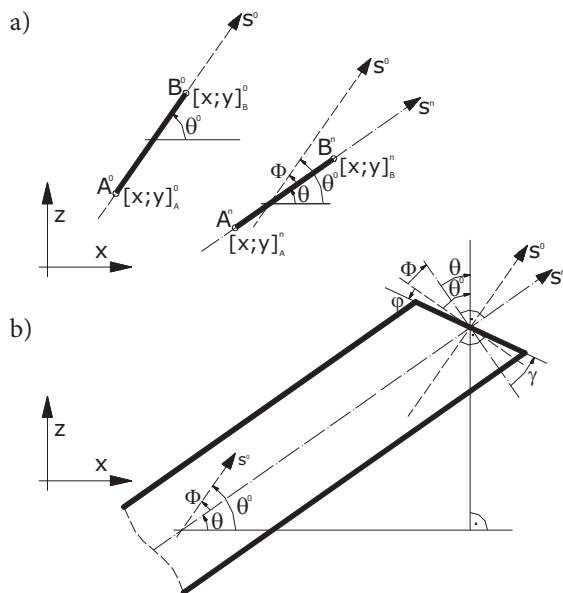


Rys. 2. Schemat układu równowagi sił wewnętrznych

Uwzględniamy nieliniowe związki geometryczne, które określają odkształcenie podłużne osi środkowej $e(s)$, zmianę średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego $\kappa(s)$ oraz średni kąt odkształcenia postaciowego $\gamma(s)$ (rys. 3):

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{1}{2} \frac{ds^{02} - ds^2}{ds^2} \\ \kappa(s) &= \frac{d\varphi}{ds} \\ \gamma(s) &= \varphi + \Phi, \quad \Phi = \theta^0 - \theta, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie: φ — średni kąt obrotu przekroju poprzecznego;
 Φ — kąt obrotu osi środkowej pręta.

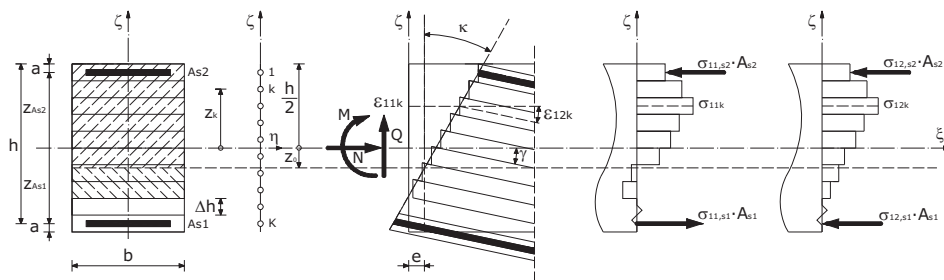


Rys. 3. Geometria układu prętowego

Zależności (14) odniesione są do aktualnej konfiguracji elementu prętowego. W zależnościach tych indeksem ⁽⁰⁾ oznaczono odpowiednie wielkości dla konfiguracji początkowej (poprzedniej). Definicja wielkości $e(s)$ wg zależności (14)₁ dostosowana została do przyjętego oznaczenia dodatniej siły podłużnej jako siły ściskającej (rys. 2).

3.2. Równania równowagi wewnętrznej w przekroju poprzecznym

Model obliczeniowy przekroju poprzecznego elementu prętowego opracowano przy złożeniu podziału przekroju na warstwy betonowe o grubości Δh oraz wyróżnieniu dwu warstw stalowych o przekrojach A_{s1} i A_{s2} (rys. 4).



Rys. 4. Model żelbetowego przekroju poprzecznego

Funkcjonowanie modelu obliczeniowego przekroju jest uwarunkowane modelami odkształcenia betonu i stali oraz hipotezą kinematyczną dla przekroju poprzecznego. Podstawą tej hipotezy jest założenie płaskiego przekroju, który nie jest prostopadły do odkształconej osi środkowej elementu. W modelu za oś środkową uznawana jest oś przechodząca w połowie wysokości przekroju poprzecznego. Hipoteza kinematyczna określa stan odkształcenia wszystkich warstw przekroju oraz zasadę współpracy warstw przenoszących naprężenia.

Stan odkształcenia w poszczególnych warstwach przekroju poprzecznego dla każdego kroku obciążenia n jest określony układem zależności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11r}^n &= e^n + z_r \cdot \kappa^n, \quad z_r = \{z_k, z_{s1}, z_{s2}\}, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \varepsilon_{12r}^n &= \gamma^n.\end{aligned}\quad (15)$$

Dla znanych odkształceń podłużnych osi środkowej e^n zmiany średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego κ^n oraz średniego kąta odkształcenia postaciowego γ^n , wartości siły podłużnej N^n , momentu zginającego M^n oraz sił poprzecznej Q^n wyznacza się z równań równowagi przekroju poprzecznego:

$$\begin{aligned}N^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{11k}^n A_k + \sigma_{11s1}^n A_{s1} + \sigma_{11s2}^n A_{s2} \\ M^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{11k}^n A_k z_k + \sigma_{11s1}^n A_{s1} z_{s1} + \sigma_{11s2}^n A_{s2} z_{s2} \\ Q^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{12k}^n A_k + \sigma_{12s1}^n A_{s1} + \sigma_{12s2}^n A_{s2},\end{aligned}\quad (16)$$

gdzie A_k — pole powierzchni k -tej warstwy przekroju.

4. Dyskretyzacja różnicowa elementu prętowego

Równania równowagi (13) oraz związki geometryczne (14) wraz z modelami odkształcenia materiałów i modelem przekroju poprzecznego zdefiniowanym równaniami (16) stanowią sformułowanie problemu w ramach technicznej teorii konstrukcji prętowych. Takie przedstawienie problemu odpowiada teorii geometrycznie nieliniowej pozwalającej na opis dużych przemieszczeń elementu.

Rozwiązanie układu równań podstawowych przeprowadzono metodą różnicową na podstawie przyjętej dyskretyzacji elementu konstrukcyjnego (rys. 5).

Dyskretyzacja ustrojów prętowych polega na dokonaniu podziału osi środkowej prętów węzłami o współrzędnych $\{x, z\}_i$, $i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, I$. Na tej

podstawie równaniom równowagi (13) można nadać formę różnicową ze względu na różniczkowe operatory przestrzenne:

$$\begin{aligned}
 -N_{i1} \cos \theta_{i1} + N_{i0} \cos \theta_{i0} + Q_{i1} \sin \theta_{i0} - Q_{i0} \sin \theta_{i0} + F_x(s_i) &= 0 \\
 -N_{i1} \sin \theta_{i1} + N_{i0} \sin \theta_{i0} + Q_{i1} \cos \theta_{i0} - Q_{i0} \cos \theta_{i0} + F_z(s_i) &= 0 \\
 M_{i+1} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1} &= 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie: $i1 = i + \frac{1}{2}$, $i0 = i - \frac{1}{2}$ — oznaczenia pośrednich węzłów podziału przestrzennego;

$N_{i1} = \frac{N_{i+1} + N_i}{2}$ — średnia siła podłużna na odcinku $(i, i + 1)$;

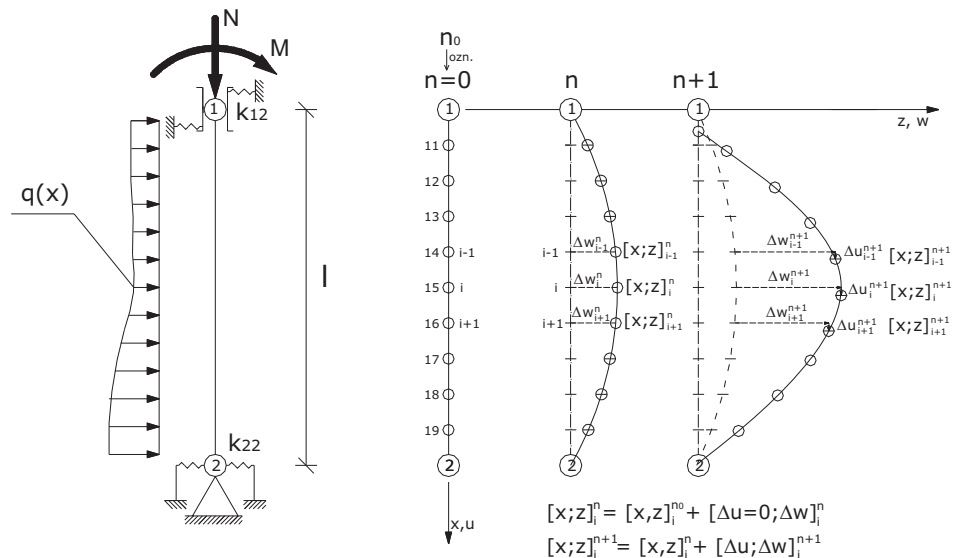
$Q_{i1} = \frac{Q_{i+1} + Q_i}{2}$ — średnia siła poprzeczna na odcinku $(i, i + 1)$;

$F_x(s_i) = p_x(s_i) \Delta s_i$, $F_z(s_i) = p_z(s_i) \Delta s_i$ — składowe obciążenia i -tego węzła;

$\Delta x_{i1} = x_{i+1} - x_i$, $\Delta z_{i1} = z_{i+1} - z_i$, $\Delta s_{i1} = \sqrt{\Delta x_{i1}^2 + \Delta z_{i1}^2}$, $\Delta s_i = \frac{\Delta s_{i1} + \Delta s_{i0}}{2}$

— składowe długości odcinka $(i, i + 1)$;

$\sin \theta_{i1} = \frac{\Delta y_{i1}}{\Delta s_{i1}}$, $\cos \theta_{i1} = \frac{\Delta x_{i1}}{\Delta s_{i1}}$ — funkcje kątów obrotu odcinków $(i, i + 1)$.



Rys. 5. Dyskretyzacja elementu konstrukcyjnego

Dyskretyzacja osi środkowej modelu pozwala również na różnicowe sformułowanie związków geometrycznych (14) w postaci:

$$\begin{aligned} e(s_i) &= \frac{1}{2} \frac{\Delta s_i^{-02} - \Delta s_i^{-2}}{\Delta s_i} \\ \kappa(s_i) &= \frac{\varphi_{i1} - \varphi_{i0}}{\Delta s_i} \\ \gamma(s_i) &= \bar{\varphi}_i + \bar{\Phi}_i, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie: $\bar{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i1} + \varphi_{i0}}{2}$ — średnia wartość kąta obrotu przekroju poprzecznego

na odcinku $(i, i + 1)$;

$\bar{\Phi}_i = \frac{\Phi_{i1} + \Phi_{i0}}{2}$ — średnia wartość kąta obrotu osi środkowej na odcinku $(i, i + 1)$;

$\Phi_{i1} = \theta_{i1}^0 - \theta_{i1} \cong \sin(\theta_{i1}^0 - \theta_{i1}) = \sin \theta_{i1}^0 \cdot \cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i1}^0 \cdot \sin \theta_{i1}$ — kąt obrotu osi środkowej na odcinku $(i, i + 1)$.

Dyskretyzacja osi środkowej elementu prętowego wymaga rozpatrzenia problemów wynikających z przyjętego podziału przestrzennego. W tym celu przeprowadza się pełną analizę odkształcenia/naprężenia przekrojów poprzecznych, co pozwala na określenie zmian sztywności na długości elementów.

5. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe i warunki symetrii wyraża się w sposób typowy dla metody różnicowej przez wprowadzenie węzłów fikcyjnych: $i_b = i, i_s = I + 1$.

Najbardziej odpowiednie jest formułowanie warunków brzegowych przez wprowadzenie tzw. węzła podwójnego składającego się z węzła rzeczywistego $i_r = i_b + 1$ oraz pokrywającego się z nim węzła fikcyjnego i_b . W węzłach tych nie występuje różnica przemieszczeń i mają one te same współrzędne podczas deformacji konstrukcji:

$$(x_{i_r}, z_{i_r}) = (x_{i_b}, z_{i_b}) = (x_{i_r}^0, z_{i_r}^0) \quad (19)$$

Węzły te tworzą fikcyjne odcinki brzegowe (i_b, i_r) , dla których, w zależności od sposobu zamocowania brzegu, przyjmujemy warunki:

$$\varphi_{i_b1} = k\varphi_{i_r0} = k\varphi_{i_r1}, \quad \Phi_{i_b1} = k\Phi_{i_r0} = k\Phi_{i_r1}. \quad (20)$$

gdzie: $k = 0$ — dla brzegu utwierdzonego;
 $k = 1$ — dla brzegu przegubowo podpartego.

Wykorzystując podane zależności, można wyznaczyć odkształcenia podłużne oraz zmiany średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego i średnie odkształcenia postaciowe w rzeczywistym węźle brzegowym. Należy zwrócić uwagę, że tak określone wielkości odnoszące się do węzłów brzegowych, będą mniej dokładne niż dla pozostałych węzłów wewnętrznych modelu dyskretnego.

Warunki symetrii w węźle fikcyjnym $i_s = I + 1$ formułuje się tradycyjnie w następujący sposób:

$$(x_{I+i}, z_{I+i}) = (-x_{I-i}, z_{I-i}), \quad (21)$$

$$\varphi_{I1} = -\varphi_{I0}, \quad \Phi_{I1} = -\Phi_{I0}. \quad (22)$$

W przypadku zadanego momentu brzegowego $M_{i_b} = M$ konieczne jest spełnienie równania zgodności momentów na brzegu:

$$F_M = M_{i_b} - M_{i_b} - 1 = 0. \quad (23)$$

Spełnienie tego warunku wymaga rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych (16) dla obydwu węzłów brzegowych: fikcyjnego i_b i rzeczywistego $i_r = i_b - 1$ względem krzywizn $\kappa = \{\kappa_{i_b}, \kappa_{i_b-1}\}$, przy znanych odkształceniach podłużnych $e = \{e_{i_b}, e_{i_b-1}\}$ i średnich kątach obrotu przekroju poprzecznego $\varphi = \{\varphi_{i_b}, \varphi_{i_b-1}\}$.

Rozwiązanie równania (24) otrzymuje się numerycznie metodą Newtona, uzyskując wynik po i -tej iteracji:

$$\kappa_{(i)}^n = \kappa_{(i-1)}^n \pm \left[\frac{\partial F_{M(i-1)}^n}{\partial \kappa_{(i-1)}^n} \right]^{-1} F_{M(i-1)}^n \quad (24)$$

z założoną dokładnością $\Delta\kappa$:

$$|\kappa_{(i)}^n - \kappa_{(i-1)}^n| \leq \Delta\kappa. \quad (25)$$

W równaniu (24) znak „+” obowiązuje dla węzła i_b , a znak „-” dla węzła $i_b - 1$. Rozwiązanie równania (23) w każdym kroku obciążenia wymaga przyjęcia zerowego przybliżenia rozwiązania (24) jako wynik z poprzedniego kroku obciążenia $\kappa_{(i=0)}^n = \kappa^{n-1}$.

6. Metoda rozwiązywania układu równań równowagi

Rozwiązanie układu nieliniowych równań równowagi (17) przeprowadzono metodą śledzenia ścieżki rozwiązania dla wielu zmiennych [2, 3]. Metoda ta jest nazywana także metodą długości łuku (ang. *arc-length*) lub metodą kontynuacyjną.

W tym celu układ równań (17), który zapisano w macierzowej formie układu funkcji $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ niewiadomych przemieszczeń $\mathbf{q} = (u, w, \varphi)$, jako sumę składowych sił wewnętrznych i składowych obciążenia zewnętrznego:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{P} = 0, \quad (26)$$

zostanie uzupełniony dodatkowym równaniem więzów:

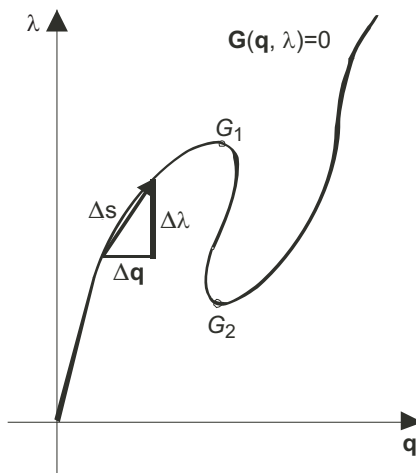
$$f(\mathbf{q}, \lambda) = 0, \quad (27)$$

łącącym przemieszczenia \mathbf{q} z parametrem obciążenia λ .

Otrzymany w ten sposób rozszerzony układ równań:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{w}) = \begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \\ f(\mathbf{q}, \lambda) \end{cases} = 0, \quad \mathbf{w} = \begin{cases} \mathbf{q} \\ \lambda \end{cases}, \quad (28)$$

umożliwia wyznaczenie nie tylko poszukiwanego wektora przemieszczeń \mathbf{q} , lecz także parametru obciążenia λ na nieliniowej ścieżce równowagi zawierającej lokalne punkty graniczne G_1 i G_2 (rys. 6).



Rys. 6. Nieliniowa ścieżka równowagi

W celu rozwiązania układu równań (28)₁ należy zastosować linearyzację względem wektora \mathbf{w} z wykorzystaniem metody Newtona [4, 5]. W wyniku tej linearyzacji otrzymujemy następujący układ równań:

$$\partial \mathbf{Q}(\mathbf{w}) \Delta \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \partial \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \mathbf{q} + \partial \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \lambda \\ \partial f(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \mathbf{q} + \partial f(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \lambda \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

w którym występują następujące oznaczenia:

$\partial \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \equiv \mathbf{G}_{,\mathbf{q}} = \mathbf{K}_T$ — macierz sztywności stycznej układu konstrukcyjnego;

$\partial \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \lambda = \mathbf{P} \Delta \lambda$ — wynik linearyzacji równania (26) względem λ ;

$\partial f(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{q}$ — funkcja gradientu $\mathbf{f}^T = \nabla_{\mathbf{q}} f$ równania więzów f względem wektora przemieszczeń \mathbf{q} ;

$\partial f(\mathbf{q}, \lambda) \Delta \lambda = f_{,\lambda} \Delta \lambda$ — pochodna cząstkowa funkcji f względem parametru obciążenia λ .

Wykorzystując oznaczenia linearyzacji (29), układ równań można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ \mathbf{f}^T & f_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Wykorzystując metodę rozwiązania macierzy blokowych do rozwiązania układu równań (30), otrzymujemy nieznaną przyrost parametru obciążenia:

$$\Delta \lambda = - \frac{f + \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{q}_G}{f_{,\lambda} + \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{q}_p} \quad (31)$$

oraz przyrost przemieszczeń:

$$\Delta \mathbf{q} = \Delta \lambda \Delta \mathbf{q}_p + \Delta \mathbf{q}_G, \quad (32)$$

gdzie wprowadzono definicje:

$$\Delta \mathbf{q}_p = (\mathbf{K}_T)^{-1} \mathbf{P}, \quad \Delta \mathbf{q}_G = -(\mathbf{K}_T)^{-1} \mathbf{G}. \quad (33)$$

Metoda śledzenia ścieżki rozwiązania wymaga wyznaczenia początkowego (tzw. zerowego, startowego) rozwiązania na początku każdego kroku przyrostu obciążenia. Rozwiązanie początkowe $\Delta \mathbf{q}_{p0}$ wyznacza się z rozwiązania układu równań liniowych (33)₁. Następnie określa się początkową wartość przyrostu parametru obciążenia $\Delta \lambda_0$ przez skalowanie wektora stycznego o składowych $(\Delta \mathbf{q}_{p0}, \Delta \lambda_0)$, z wykorzystaniem parametru skalowania jako przyrostu długości łuku Δs :

$$\pm \Delta \lambda_0 \|\Delta \mathbf{q}_{p0}\| = \Delta s. \quad (34)$$

Znak przyrostu parametru obciążenia $\Delta\lambda_0$ zależy od nachylenia ścieżki rozwiązania w układzie współrzędnych $(\Delta\mathbf{q}_{p0}, \Delta\lambda_0)$, czyli od sztywności stycznej układu konstrukcyjnego. Określenie tego znaku jest ułatwione, jeżeli zastosuje się skalarny parametr sztywności układu konstrukcyjnego. Definicję i sposób wyznaczania tego parametru można zaczerpnąć z pracy [6].

Równanie więzów przyjęto w postaci zaproponowanej w pracy [7]:

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = g(\mathbf{q}, \lambda) - \Delta s, \quad g(\mathbf{q}, \lambda) = \sqrt{(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})^T (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) + (\lambda - \bar{\lambda})^2}, \quad (35)$$

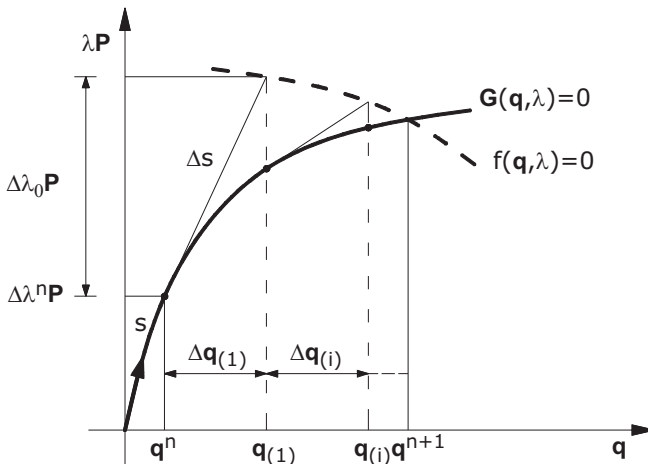
gdzie $\bar{\mathbf{q}}$ i $\bar{\lambda}$ oznaczają wartości wektora przemieszczeń i parametru obciążenia z poprzedniego kroku obciążenia $n-1$, uzyskane z założoną dokładnością.

Dla przyjętej postaci równania więzów (35) odpowiednie wartości gradientu i pochodnej cząstkowej mają postać:

$$\mathbf{f}^T = \frac{(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})^T}{g(\mathbf{q}, \lambda)}, \quad \mathbf{f}_{,\lambda} = \frac{(\lambda - \bar{\lambda})}{g(\mathbf{q}, \lambda)}. \quad (36)$$

Rozwiązanie układu równań (28) uzyskuje się iteracyjnie po i -tej iteracji (rys. 7):

$$\lambda_{(i+1)} = \lambda_{(i)} + \Delta\lambda_{(i+1)}, \quad \mathbf{q}_{(i+1)} = \mathbf{q}_{(i)} + \Delta\mathbf{q}_{(i+1)}. \quad (37)$$



Rys. 7. Metoda długości łuku

Proces iteracyjnego poprawiania wyniku kończy się w chwili osiągnięcia żądanej dokładności ε_G rozwiązania:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{q}_{(i+1)}, \lambda_{(i+1)})\| \leq \varepsilon_G. \quad (38)$$

7. Algorytm wyznaczenia przemieszczeń

Ogólny algorytm rozwiązania zagadnienia statyki dyskretyzowanego układu konstrukcyjnego, można przedstawić w następującej sekwencji czynności.

1. Dla znanych w kroku obciążenia n aktualnych współrzędnych węzłów $(x, z)_i^n$ oraz parametru obciążenia λ^n i uogólnionych przemieszczeń $\mathbf{q}^n = (u_i^n, w_i^n, \varphi_i^n)$ określamy wg (18) odkształcenia podłużne e_i^n , zmiany średniego kąta obrotu przekrojów poprzecznych κ_i^n oraz średnie kąty odkształcenia postaciowego γ_i^n w każdym węźle i podziału elementu prętowego.
2. Korzystając z równań opisujących hipotezę kinematyczną (15), wyznaczamy odkształcenia $(\varepsilon_{ijr})_i^n = (\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijs1}, \varepsilon_{ijs2})_i^n$ w każdej warstwie przekroju poprzecznego $r = \{k, s1, s2\}$.
3. Dla znanych odkształceń $(\varepsilon_{ijr})_i^{n-1}$, wyznaczamy przyrosty odkształceń $(\Delta\varepsilon_{ijr})_i^n = (\varepsilon_{ijr})_i^n - (\varepsilon_{ijr})_i^{n-1}$ w warstwach przekroju poprzecznego z uwzględnieniem transformacji odkształceń $(\bar{\varepsilon}_{ijr})_i^{n-1} = (\varepsilon_{ijr})_i^{n-1} \frac{1 + 2(\varepsilon_{ijr})_i^n}{1 + 2(\varepsilon_{ijr})_i^{n-1}}$.
4. Dla przyrostów odkształceń $(\Delta\varepsilon_{ijr})_i^n$ oraz znanych naprężeń $(\sigma_{ijr})_i^{n-1}$ wyznaczamy naprężenia $(\sigma_{ijr})_i^n = (\sigma_{ijk}, \sigma_{ijs1}, \sigma_{ijs2})_i^n$ w poszczególnych warstwach przekroju zgodnie z przyjętymi modelami odkształcenia betonu i stali.
5. Zgodnie z równaniami (16) wyznaczamy wartości sił podłużnych N_i^n , momentów zginających M_i^n oraz sił poprzecznych Q_i^n w węzłach osi podłużnej elementu.
6. Na podstawie przyjętej numerycznej metody rozwiązania rozszerzonego układu nieliniowych równań równowagi (28) określamy poszukiwane przyrosty: parametru obciążenia $\Delta\lambda^{n+1}$ i uogólnionych przemieszczeń $\Delta\mathbf{q}_i^{n+1} = (\Delta u_i^{n+1}, \Delta w_i^{n+1}, \Delta\varphi_i^{n+1})$ oraz parametr obciążenia $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta\lambda^{n+1}$ i przemieszczenia $\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta\mathbf{q}_i^{n+1}$ w następnym kroku obciążenia $n + 1$.
7. Uaktualniamy współrzędne poszczególnych węzłów podziału osi środkowej elementu prętowego $(x, z)_i^{n+1} = (x, y)_i^n + (\Delta u, \Delta w)_i^{n+1}$.

Powyższy algorytm należy powtarzać dla kolejnych zmian wartości obciążenia, uwzględniając zmianę położenia wszystkich węzłów podziału. Podstawą omawianej analizy jest wyznaczenie naprężeń w warstwach stalowych i betonowych oraz metoda numerycznego rozwiązania układu nieliniowych równań równowagi, pozwalająca na określenie uogólnionych przemieszczeń poszczególnych węzłów podziału elementu prętowego.

8. Zakończenie

W pracy przedstawiono sformułowanie teoretyczne oraz algorytmizację metody analizy zachowania ściskanych elementów żelbetowych poddanych działaniu krótkotrwałych obciążeń statycznych.

Metoda analizy wyężenia konstrukcji jest podstawą opracowania własnych procedur numerycznych i programów obliczeniowych z wykorzystaniem metody różnic skończonych.

Przyjęty rząd fizycznej nieliniowości równań konstytutywnych betonu umożliwia śledzenie zjawisk osłabienia materiałowego oraz zarysowania i zmiażdżenia w obszarach krytycznego wyężenia prętowego elementu żelbetowego.

Przyjęty rząd geometrycznej nieliniowości związków odkształceniowo-przemieszczeniowych umożliwia analizę zjawisk wyboczenia prętowego elementu żelbetowego.

Artykuł wpłynął do redakcji 5.06.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2009 r.

LITERATURA

- [1] A. STOLARSKI, *Model dynamicznego odkształcania betonu*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 37, 3-4, 1991, 405-447.
- [2] P. WRIGGERS, *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] Z. WASZCZYSZYN, CZ. CICHON, M. RADWAŃSKA, *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1990.
- [4] J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa, 1980.
- [5] A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa, 1971.
- [6] M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań, 1985.
- [7] M. A. CRISFIELD, *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*, Computers and structures, 13, 1981, 55-62.

A. STOLARCZUK, A. STOLARSKI

Method of analysis of inelastic reinforced concrete members compressed eccentrically

Abstract. Theoretical formulation and algorithmization of the method of the analysis of behaviour of compressed reinforced concrete members subjected to the short-duration static loading were introduced in the paper. The method of analysis of the structure effort is the basis of development of the own numeric procedures and computational programmes using the finite difference method. The received order of the physical nonlinearity of constitutive equations for the concrete makes possible tracing the material softening phenomena as well as cracking and crushing in the areas of critical effort of the reinforced concrete bar member. The received order of the geometrical nonlinearity of strain-displacement relationships makes possible the analysis of buckling phenomena of the reinforced concrete bar member.

Keywords: mechanics of structures, compressed reinforced concrete members, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity

Universal Decimal Classification: 624.012.45