



## Wpływ liczby Poissona, grubości ścianki zbiornika i warunków brzegowych na mechaniczne charakterystyki grubościennego zbiornika kulistego obciążonego wewnątrz ciśnieniem kwazistatycznym

EDWARD WŁODARCZYK, ROBERT KASZEWSKI<sup>1</sup>,  
MARIUSZ ZIELENKIEWICZ<sup>1</sup>

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

<sup>1</sup>Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,  
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

**Streszczenie.** Rozwiązano w analitycznej postaci zagadnienie brzegowe dla grubościennego kulistego zbiornika obciążonego wewnątrz ciśnieniem kwazistatycznym. Stany przemieszczenia i naprężeń w ściance zbiornika określono zamkniętymi analitycznymi wzorami, które można stosować w obliczeniach inżynierskich. Zbadano ilościowy wpływ warunków brzegowych, liczby Poissona i grubości ścianki zbiornika na generowane w niej pola przemieszczenia i naprężeń. Oszacowano minimalny okres równomiernego narastania ciśnienia wewnątrz zbiornika od 0 do maksymalnej wartości  $p_0$ , który spełnia warunek kwazistatycznego obciążenia. Okazuje się, że obejmuje on szeroki zakres występujących w technice zmiennych obciążeń, które można aproksymować modelem kwazistatycznym.

**Słowa kluczowe:** wytrzymałość zbiorników grubościennych, obciążenia kwazistatyczne, zbiorniki kuliste

**Symbole UKD:** 623.52

### 1. Wprowadzenie

Dostatecznie wolno narastające z upływem czasu ciśnienie  $p(t)$  wewnątrz, na przykład grubościennego, kulistego zbiornika, pozwalające zaniedbać wpływ sił inercyjnych na jego mechaniczne parametry, będziemy nazywać obciążeniem kwazistatycznym, a spowodowane nim radialne przemieszczenie, odkształcenia

i naprężenia w elementach ścianki zbiornika — stanem kwazistatycznym. Przy takim założeniu naprężenia w ściance zbiornika w każdej chwili są w przybliżeniu zrównoważone przez aktualne wewnętrzne ciśnienie  $p(t)$ . To daleko idące uproszczenie w znacznym stopniu ułatwia rozwiązanie problemu. Okazuje się również, że dosyć dobrze aproksymuje dynamiczne stany przemieszczenia i naprężenia w ściankach zbiornika. Na przykład, wyniki dynamicznego i kwazistatycznego rozwiązania problemu ekspandującej kulistej fali naprężenia w izotropowym ośrodku sprężystym różnią się tylko o 14% [1-3]. Rozwiązanie to można również uzyskać z rozwiązania grubościennego kulistego zbiornika jako przypadek graniczny przy wzroście grubości ścianki zbiornika do nieskończoności [4].

Zaletą rozwiązań kwazistatycznych są proste, zamknięte wzory analityczne, określające mechaniczne charakterystyki badanych obiektów. Ułatwiają one ich analizę i są użyteczne w inżynierskich zastosowaniach.

Mając na uwadze przytoczone wyżej fakty, w niniejszej pracy podjęto próbę analizy wpływu liczby Poissona  $\nu$  i grubości ścianki oraz warunków brzegowych na mechaniczne charakterystyki grubościennego kulistego zbiornika obciążonego wewnętrznym ciśnieniem zmieniającym się w funkcji czasu w sposób kwazistatyczny.

## 2. Sformułowanie problemu

Określimy kwazistatyczne stany: radialnego przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia w grubościennym, kulistym zbiorniku obciążonym wewnętrznym ciśnieniem  $p(t)$ . Zakładamy, że funkcja  $p(t)$  zmienia się z upływem czasu  $t$  dostatecznie wolno, tak aby można zaniedbać wpływ sił inercyjnych na mechaniczne charakterystyki ścianki zbiornika. Jej materiał jest izotropowy i liniowo-sprężysty. Oznaczmy przez  $a$  i  $b$  promienie, odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny zbiornika. Problem rozpatrujemy w ramach teorii małych odkształceń.

Zagadnienie będziemy rozwiązywać w sferycznym układzie współrzędnych Lagrange'a  $r, \varphi, \theta$ . Ze względu na kulistą symetrię problem jest przestrzennie jednowymiarowy.

W związku z tym stany naprężenia i odkształcenia w materiale zbiornika reprezentowane są przez następujące składowe:

- $\sigma_r$  — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$  — naprężenia obwodowe (styczne),
- $\varepsilon_r$  — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$  — odkształcenia obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Zgodnie z liniową teorią sprężystości i uogólnionym prawem Hooke'a mamy:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} \right], \quad (2.2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right], \quad (2.3)$$

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

gdzie  $u$  i  $r$  są odpowiednio radialnym przemieszczeniem elementu ścianki zbiornika i współrzędną Lagrange'a, a  $E$  oraz  $\nu$  oznaczają moduł Younga i liczbę Poissona.

Równanie ruchu elementu ścianki zbiornika ma postać:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

gdzie  $\rho_0$  jest gęstością materiału ścianki zbiornika.

Eliminując z równania (2.5) naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  za pomocą wyrażeń (2.2) i (2.3), otrzymuje się:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

gdzie

$$c_e^2 = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} c_0^2, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}. \quad (2.7)$$

Wielkość  $c_e$  oznacza prędkość propagacji fali kulistej w ośrodku liniowo-sprężystym.

W przypadku kwazistatycznym mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx 0$$

i równanie problemu (2.6) redukuje się do postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = 0. \quad (2.8)$$

Równanie (2.8) rozwiążemy dla dwóch zestawów warunków brzegowych:

- wewnętrzna powierzchnia zbiornika obciążona jest wolno zmieniającym się z upływem czasu  $t$  ciśnieniem  $p(t)$ , zatem warunek brzegowy na tej powierzchni ma postać:

$$\sigma_r = -p(t) \text{ dla } r = a; \quad (2.9)$$

- zewnętrzny brzeg zbiornika jest swobodny, tj.:

$$\sigma_r = 0 \text{ dla } r = b; \quad (2.10)$$

- lub zewnętrzny brzeg zbiornika jest zamocowany, tj.:

$$u = 0 \text{ dla } r = b. \quad (2.11)$$

Warunki początkowe są jednorodne, tj.:

$$u \equiv 0, \quad (\partial u / \partial t) \equiv 0 \text{ dla } t = 0. \quad (2.12)$$

Tak sformułowany problem rozwiązujemy w następnym punkcie.

### 3. Rozwiązanie problemu

Najbardziej ogólne rozwiązanie równania (2.8) ma postać

$$u = A(t)r + \frac{B(t)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie  $A(t)$  i  $B(t)$  oznaczają dowolne funkcje czasu zmieniające się w sposób ciągły i dostatecznie wolno, tak żeby  $(\partial^2 u / \partial t^2) \approx 0$  w każdej chwili  $t$ . Dalsze rozważania ograniczymy do stanu przemieszczenia i naprężenia.

Po podstawieniu (3.1) do wyrażeń (2.2)-(2.4), otrzymuje się:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1+\nu)A - 2(1-2\nu)\frac{B}{r^3} \right], \quad (3.2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1+\nu)A + (1-2\nu)\frac{B}{r^3} \right], \quad (3.3)$$

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3E}{1+\nu} \frac{B}{r^3}. \quad (3.4)$$

Z warunków brzegowych i rozwiązania (3.1) oraz wyrażeń (3.2)-(3.4), mamy:

— dla zbiornika z zewnętrznym brzegiem swobodnym [ $\sigma_r(b) = 0$ ]:

$$u = \frac{2(1-2\nu)r^3 + (1+\nu)b^3}{2(b^3 - a^3)} \frac{p a^3}{E r^2}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_r = -\frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \frac{a^3}{r^3} p, \quad (3.6)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \frac{b^3 + 2r^3}{b^3 - a^3} \frac{a^3}{r^3} p, \quad (3.7)$$

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3}{2} \frac{b}{b^3 - a^3} \frac{a^3}{r^3} p; \quad (3.8)$$

— dla zbiornika z zewnętrznym brzegiem zamocowanym [ $u(b) = 0$ ]:

$$u = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(b^3 - r^3)}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} \frac{p a^3}{E r^2}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_r = -\frac{(1+\nu)r^3 + 2(1-2\nu)b^3}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} \frac{a^3}{r^3} p, \quad (3.10)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{-(1+\nu)r^3 + (1-2\nu)b^3}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} \frac{a^3}{r^3} p, \quad (3.11)$$

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3(1-2\nu)b^3}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} \frac{a^3}{r^3} p. \quad (3.12)$$

W granicznym przypadku dla rosnącej do nieskończoności grubości ścianki zbiornika ( $b \rightarrow \infty$ ) z wyprowadzonych wzorów (3.5)-(3.12) otrzymuje się kwazi-statyczne rozwiązanie problemu dla kulistej kawerny w ośrodku nieskończonym obciążonej wewnątrz ciśnieniem  $p(t)$ , a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2} \frac{p}{E} \frac{a^3}{r^2}, \\ \sigma_r &= -\frac{a^3}{r^3} p, \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} p, \\ \sigma_z &= \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3}{2} \frac{a^3}{r^3} p. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Tak uzyskane wzory (3.13) są zgodne z wynikami zamieszczonymi w pracy [1].

#### 4. Teoretyczna analiza wyników rozwiązania

W celu uproszczenia analizy ilościowej poszczególnych parametrów, charakteryzujących kwazistatyczny stan ścianki zbiornika, wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, \quad \eta = \frac{c_0 t}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad u = \frac{u}{a}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{p_0}, \\ S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p_0}, \quad S_z = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{p_0}, \quad P = \frac{p_0}{E}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ ;

$p_0$  — maksymalna wartość ciśnienia w zbiorniku;

$\rho_0$  — gęstość materiału ścianki zbiornika.

Wzory (3.5)-(3.13) w wielkościach bezwymiarowych (4.1) można zapisać w postaci:

— dla zbiornika z zewnętrznym brzegiem swobodnym:

$$\frac{U}{P} = \frac{(1+\nu)\beta^3 + 2(1-2\nu)\xi^3}{2(\beta^3 - 1)} \frac{1}{\xi^2}, \quad (4.2)$$

$$S_r = -\frac{\beta^3 - \xi^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.3)$$

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\beta^3 + 2\xi^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.4)$$

$$S_z = S_\varphi - S_r = \frac{3}{2} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^3}; \quad (4.5)$$

— dla zbiornika z zewnętrznym brzegiem zamocowanym:

$$\frac{U}{P} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(\beta^3 - \xi^3)}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\beta^3} \frac{1}{\xi^2}, \quad (4.6)$$

$$S_r = -\frac{2(1-2\nu)\beta^3 + (1+\nu)\xi^3}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\beta^3} \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.7)$$

$$S_\varphi = \frac{(1-2\nu)\beta^3 - (1+\nu)\xi^3}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\beta^3} \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.8)$$

$$S_z = S_\varphi - S_r = \frac{3(1-2\nu)\beta^3}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\beta^3} \frac{1}{\xi^3}; \quad (4.9)$$

— dla kulistej kawerny w ośrodku nieskończonym:

$$\frac{U}{P} = \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\xi^2}, \quad (4.10)$$

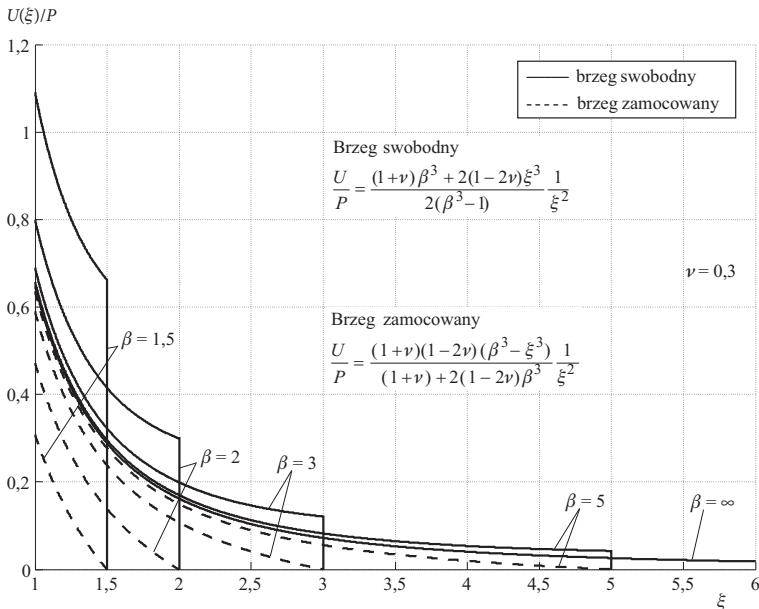
$$S_r = -\frac{1}{\xi^3}, \quad S_\varphi = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^3}, \quad S_z = S_\varphi - S_r = \frac{3}{2} \frac{1}{\xi^3}. \quad (4.11)$$

Przytoczone wyżej wzory stanowią podstawę do ilościowej teoretycznej analizy wpływu parametrów  $\nu$  i  $\beta$  oraz warunków brzegowych dla  $\xi = \beta$  na wartości mechanicznych charakterystyk ścianki zbiornika. Jako pierwszą w kolejności rozpatrzmy bezwymiarową względną wielkość przemieszczenia, tj.  $U/P$ .

#### 4.1. Analiza kwazistatycznego względnego przemieszczenia $U/P$

Z wzorów (4.2) i (4.6) bezpośrednio wynika, że wielkość  $U/P$  osiąga maksymalną wartość na wewnętrznej powierzchni zbiornika, tj. dla  $\xi = 1$ . Następnie, na skutek przestrzennej dywergencji wielkość  $U/P$  maleje w ściance zbiornika w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od jego centrum.

Zmianę wielkości  $U/P$  w funkcji  $\xi$  dla kilku wartości parametru  $\beta$  i  $\nu = 0,3$  przedstawiono na rysunku 1. Linie ciągłe charakteryzują zmianę  $U/P$  w ścianie zbiornika ze swobodnym zewnętrznym brzegiem, a linie przerywane — z brzegiem zamocowanym. W zbiorniku z brzegiem swobodnym przemieszczenie w ścianie maleje wraz ze wzrostem jej grubości (wzrost  $\beta$ ) i przy  $\beta \approx 5$  otrzymuje się wynik w przybliżeniu taki sam jak w nieograniczonym ośrodku z kulistą kawerną obciążoną ciśnieniem  $p$ . Zjawisko to powodowane jest przestrzenną dywergencją wielkości  $U/P$ . W zbiorniku z zamocowanym brzegiem mają miejsce relacje odwrotne — przemieszczenie rośnie wraz ze wzrostem grubości ścianki zbiornika. Jest to wynikiem wpływu sprężystej ściśliwości ( $\nu = 0,3$ ) materiału ścianki zbiornika.



Rys. 1. Zmiana wielkości  $U/P$  w funkcji  $\xi$  dla czterech wartości  $\beta$  i  $\nu = 0,3$

Wpływ liczby Poissona  $\nu$  na przemieszczenie elementów ścianki zbiornika ze swobodnym zewnętrznym brzegiem jest nieznaczny. W ramach danej grubości ścianki różnice wartości  $U/P$  nie przekraczają średnio kilkunastu procent dla  $\nu$  zawartych w przedziale  $0,2 \leq \nu \leq 0,5$  (tab. 1). Zwróćmy uwagę na fakt, że dla względnej grubości ścianki zbiornika  $\beta = 5$  wartości  $U/P$  z dokładnością do ułamka procenta są takie same jak w nieograniczonym ośrodku z kulistą kawerną obciążoną wewnętrznym ciśnieniem  $p$ .



TABELA 1

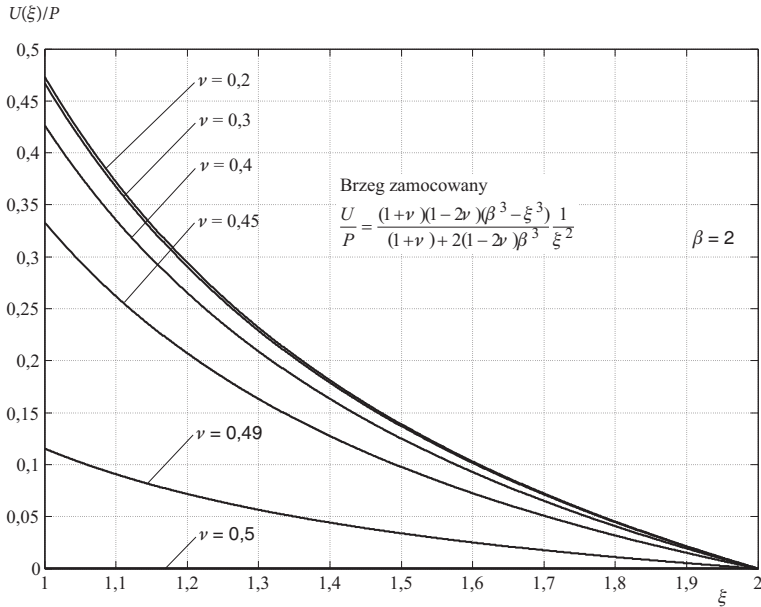
Wpływ liczby Poissona  $\nu$  na względne przemieszczenie elementów ścianki zbiornika z zewnętrznym brzegiem swobodnym

$\xi$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5
$\nu = 0,2; \beta = 5$										
$U/P$	0,610	0,426	0,315	0,244	0,195	0,161	0,109	0,082	0,057	0,048
$U/P$ kawerna	0,600	0,417	0,306	0,234	0,185	0,150	0,096	0,067	0,038	0,024
$\nu = 0,3; \beta = 5$										
$U/P$	0,658	0,458	0,339	0,261	0,208	0,170	0,113	0,082	0,054	0,042
$U/P$ kawerna	0,650	0,451	0,332	0,254	0,201	0,163	0,104	0,072	0,041	0,026
$\nu = 0,4; \beta = 5$										
$U/P$	0,707	0,492	0,362	0,278	0,220	0,180	0,117	0,083	0,051	0,036
$U/P$ kawerna	0,700	0,486	0,357	0,273	0,216	0,175	0,112	0,078	0,044	0,028
$\nu = 0,5; \beta = 5$										
$U/P$	0,756	0,525	0,386	0,295	0,233	0,189	0,121	0,084	0,047	0,030
$U/P$ kawerna	0,750	0,521	0,383	0,293	0,231	0,188	0,120	0,083	0,047	0,030

Wpływ parametru  $\nu$  na zmianę wielkości  $U/P$  w ściance zbiornika z zamocowanym zewnętrznym brzegiem pokazany jest na rysunku 2. Jak widać, w tym przypadku jest on diametralnie różny od wyżej przedstawionego. Można wyróżnić dwa przedziały wartości liczbowych parametru  $\nu$ , w których elementy ścianki zbiornika mają różne przyrosty przemieszczenia. Dla  $\nu \leq 0,4$  zmiany wielkości  $U/P$  są nieznaczne. Natomiast dla  $0,4 < \nu \leq 0,5$  zmiany  $U/P$  są duże i w granicznym przypadku materiału nieściśliwego, tj. dla  $\nu = 0,5$  mamy  $(U/P) \equiv 0$ .

Na zakończenie tej części analizy porównamy kwazistatyczne wartości wielkości  $U/P$  dla wewnętrznej powierzchni zbiornika ( $\xi = 1$ ) przy  $\beta = 5$  i zewnętrznym brzegu swobodnym z dynamicznym rozwiązaniem uzyskanym w pracy [3] dla kulistej kawerny obciążonej nagle ciśnieniem  $p_0$  w ośrodku nieskończonym. Rozwiązanie to ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{U(1, \eta)}{P} &= \frac{1+\nu}{2} \left\{ 1 - \left[ \sqrt{1-2\nu} \sin \omega x + \cos \omega x \right] e^{hx} \right\} = \\ &= \frac{1+\nu}{2} \left\{ 1 - \left[ \sqrt{1+(1-2\nu)^2} \sin(\omega x + \varphi) \right] e^{hx} \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

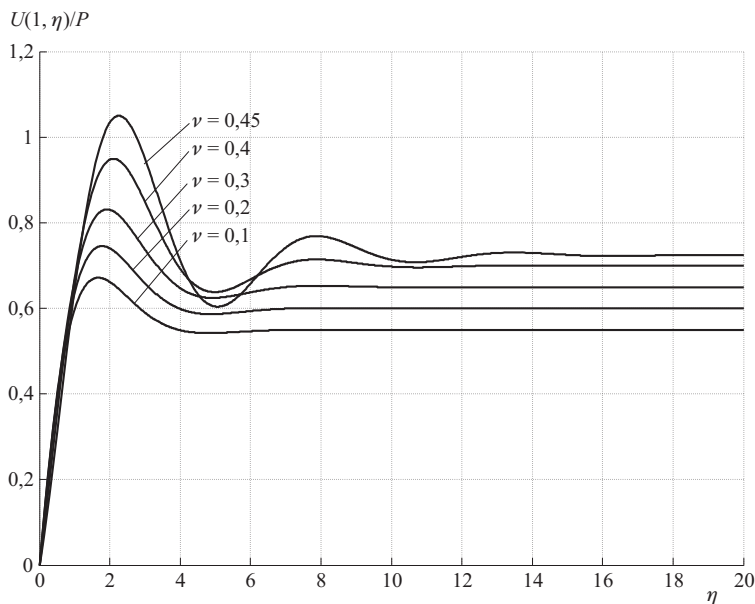


Rys. 2. Wpływ parametru  $\nu$  na zmiany wielkości  $U/P$  w ścianie zbiornika z zamocowanym zewnętrznym brzegiem dla  $\beta = 2$

gdzie

$$\begin{aligned} \omega x &= -\frac{\eta}{\sqrt{1-\nu^2}}, & hx &= -\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}}\eta, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1-2\nu}}, & \eta &= \frac{c_0 t}{a}, & c_0 &= \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Wyniki tego rozwiązania przedstawione są na rysunku 3. Jak widać, dla ośrodków ściśliwych ( $\nu \leq 0,4$ ) po upływie czasu  $t = (a\eta/c_0) \approx 10a/c_0$  przemieszczenie powierzchni kawerny zmierza do jej kwazistatycznego położenia, tj.  $(U/P) = (1 + \nu)/2$ . Zwróćmy uwagę na fakt, że dla metali wartość prędkości propagacji fali sprężystej  $c_0$  jest rzędu kilku tysięcy m/s (stal  $\sim 5000$  m/s), zatem minimalny czas kwazistatycznego narastania ciśnienia w kawernie od 0 do maksymalnej wartości  $p_0$ , na przykład dla stali wynosi  $(a[m]/500)$ s. Taki czas równomiernego narastania ciśnienia obejmuje szeroki zakres występujących w technice obciążeń, które można traktować w sposób kwazistatyczny.



Rys. 3. Zmiana względnego przemieszczenia ( $U/P$ ) powierzchni kawerny ( $\xi = 1$ ) w funkcji  $\eta$  dla kilku wartości parametru  $\nu$

## 5. Analiza naprężenia zastępczego $S_z$

W realnych ośrodkach (metalach, skałach itp.) zawsze występuje skończona wartość granicy sprężystości. Uzyskane rozwiązanie badanego problemu obowiązuje w zakresie sprężystym. Z tych faktów wynika ograniczenie na maksymalną wartość ciśnienia wytworzonego wewnątrz zbiornika, tj.  $p_0 \leq p_{\max}$ . Po przekroczeniu tej wartości ciśnienia, w metalach sprężysto-plastycznych pojawiają się w bezpośrednim otoczeniu wewnętrznej powierzchni zbiornika odkształcenia plastyczne. W tym zakresie ciśnień przytoczone w niniejszej pracy rozwiązanie traci fizyczny sens.

Jak wiadomo, w metalach plastyczne odkształcenia powodowane są przez składowe dewiatora naprężeń. Na tej podstawie można sądzić, że warunek początku płynięcia materiału zbiornika zależy tylko od różnicy naprężeń  $\sigma_\varphi - \sigma_r$ . Rzeczywiście, wyrażenie  $(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$  określa maksymalną wartość naprężenia stycznego. Zgodnie zatem z warunkiem plastyczności Treski, a w przypadku symetrii kulistej — również z warunkiem Hubera-Misesa-Henckiego, mamy:

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_0, \quad (5.1)$$

gdzie  $\sigma_0$  jest wartością granicy plastyczności, otrzymaną z próby rozciągania danego materiału.

Maksymalną wartość ciśnienia  $p_0$ , przy której nie pojawia się jeszcze odkształcenie plastyczne zgodnie z warunkiem (5.1), można określić za pomocą wzoru:

$$p_0 = \frac{\sigma_0}{S_z(1)} \quad \text{lub} \quad \frac{p_0}{\sigma_0} = \frac{1}{S_z(1)}. \quad (5.2)$$

Dla zbiornika z zewnętrznym brzegiem swobodnym mamy:

$$\frac{p_0}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \frac{\beta^3 - 1}{\beta^3}, \quad (5.3)$$

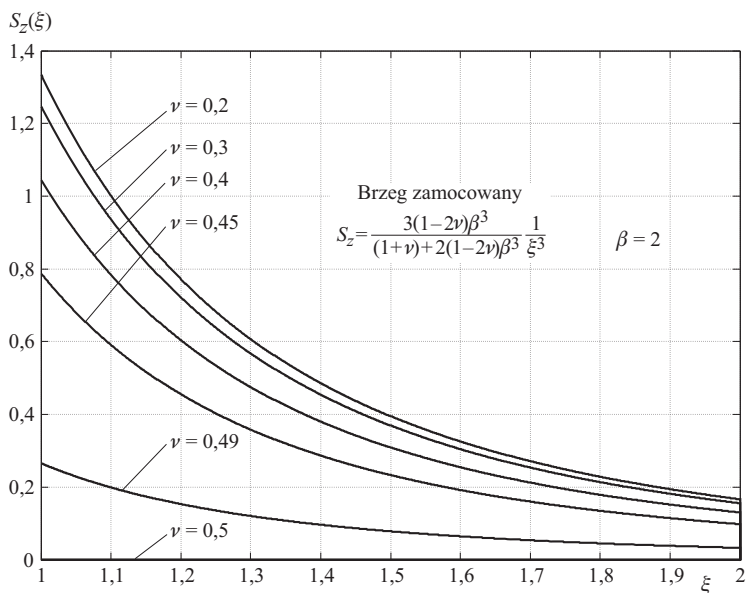
a dla brzegu zamocowanego jest:

$$\frac{p_0}{\sigma_0} = \frac{1 + \nu + 2(1 - 2\nu)\beta^3}{3(1 - 2\nu)\beta^3}. \quad (5.4)$$

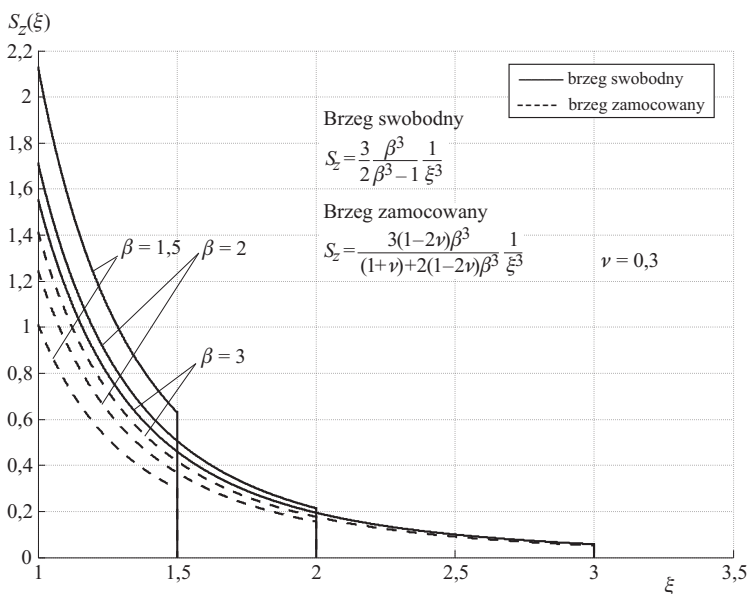
Z powyższych wzorów wynika, że w zbiorniku z zewnętrznym brzegiem swobodnym wartość stosunku  $p_0/\sigma_0$  nie zależy od liczby Poissona  $\nu$  i zdeterminowana jest wyłącznie przez parametr  $\beta$  (grubość ścianki). Ze wzrostem  $\beta$  wartość stosunku  $p_0/\sigma_0$  dąży do  $2/3$ . Natomiast dla zbiornika z brzegiem zamocowanym wartość stosunku  $p_0/\sigma_0$  istotnie zależy od  $\nu$  i  $\beta$ . W szczególnym przypadku ze wzoru (5.4) wynikają nierówności: jeśli  $\beta^3 \leq (1 + \nu)/(1 - 2\nu)$ , to  $(p_0/\sigma_0) \geq 1$ . Na przykład dla  $\beta = 1,5$  i  $\nu = 0,4$  mamy  $(p_0/\sigma_0) = 1,36$ . Wzrost parametru  $\nu$  (maleje ścisłość) przy zamocowanym zewnętrznym brzegu zbiornika zwiększa opór materiału ścianki i trudniej osiągnąć w nim stan odkształceń plastycznych.

Z wzorów (4.5) i (4.9) bezpośrednio wynika, że względna różnica naprężeń  $S_z$  maleje w ściance zbiornika odwrotnie proporcjonalnie do sześcianu odległości od jego środka dla obydwóch warunków brzegowych. W przypadku zewnętrznego brzegu swobodnego wielkość  $S_z$  nie zależy od parametru  $\nu$  (ściśłości materiału ścianki). Jest to spowodowane brakiem oporu ze strony zewnętrznego brzegu i materiał ścianki swobodnie przemieszcza się niezależnie od wartości parametru  $\nu$ . Natomiast istotny wpływ ścisłości materiału ścianki jest widoczny dla brzegu zamocowanego (rys. 4). Podobnie jak w przypadku przemieszczenia względnego  $U/P$ , dla  $\nu \leq 0,4$  zmiany wielkości  $S_z$  są umiarkowane, a w przedziale  $0,4 < \nu \leq 0,5$  zmniejszanie się wartości  $S_z$  wraz ze wzrostem  $\nu$  jest intensywne. W granicznym przypadku dla materiału nieściśliwego jest  $S_z = 0$ .

Zmiany wielkości  $S_z$  w funkcji  $\xi$  dla kilku wartości parametru  $\beta$  i  $\nu = 0,3$  przedstawiono na rysunku 5. Wzrost grubości ścianki zmniejsza przyrosty naprężenia  $S_z$  w zbiorniku z brzegiem swobodnym i zwiększa — z brzegiem zamocowanym. Ze wzrostem parametru  $\beta$  wpływ rodzaju warunku dla zewnętrznego brzegu na zmianę  $S_z$  w ściance maleje (linie ciągłe i przerywane zbliżają się do siebie) i można przyjąć, że dla  $\beta \approx 5$  wpływ ten zanika. Uzyskuje się wyniki jak dla kawerny kulistej w ośrodku nieograniczonym.

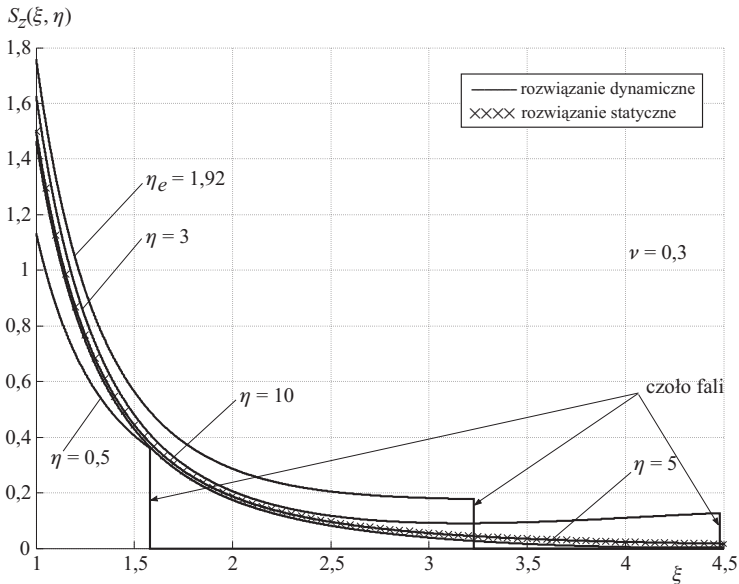


Rys. 4. Wpływ parametru  $\nu$  na zmiany wielkości  $S_z$  w ścianie zbiornika z zamocowanym zewnętrznym brzegiem dla  $\beta = 2$



Rys. 5. Zmiana wielkości  $S_z$  w funkcji  $\xi$  dla trzech wartości parametru  $\beta$  i  $\nu = 0,3$

Z kolei na rysunku 6 przytoczono zmiany naprężenia  $S_z$  w funkcji  $\xi$  dla kilku dyskretnych wartości  $\eta$  w ośrodku nieograniczonym od kulistej kawerny obciążonej nagle ciśnieniem  $p_0$  [3]. Jak widać dla  $\eta = 10$  wynik dynamiczny jest taki sam jak kwazistatyczny. Zatem minimalny czas równomiernego narastania ciśnienia od 0 do wartości  $p_0$  rzędu  $(10a/c_0)s$  już spełnia warunki obciążenia kwazistatycznego. Na przykład, dla zbiornika stalowego o średnicy  $a = 1$  m otrzymuje się  $t = 10/500 = 0,02$  s. Wynika stąd wniosek, że ciśnienie generowane w zbiorniku, na przykład detonacją wybuchowej mieszaniny gazowej, można aproksymować z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością obciążeniem kwazistatycznym i stosować w obliczeniach inżynierskich wyprowadzone w niniejszej pracy zamknięte analityczne wzory.



Rys. 6. Zmiana wielkości  $S_z(\xi, \eta)$  dla kulistej kawerny w funkcji  $\xi$  dla kilku wartości  $\eta$  i  $\nu = 0,3$

## 6. Wnioski końcowe

Kwazistatyczny stan przemieszczenia i naprężenia w ścianie kulistej zbiornika ze swobodnym lub zamocowanym brzegiem zewnętrznym, obciążonego wewnętrznym słabo zmiennym z upływem czasu ciśnieniem, określony jest analitycznymi zamkniętymi wzorami, które można stosować w obliczeniach inżynierskich.

Przemieszczenie elementów ścianki zbiornika maleje w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od jego środka. Natomiast naprężenia maleją odwrotnie proporcjonalnie do sześciastu tej odległości. Zjawisko to powodowane jest przestrzenną dywergencją wymienionych parametrów.

Naprężenia w ściance zbiornika z zewnętrznym brzegiem swobodnym nie zależą od liczby Poissona  $\nu$ . Jej wpływ na wartości  $U/P$  jest rzędu kilkunastu procent (tab. 1). Liczba Poissona  $\nu$ , charakteryzująca ściśliwość materiału ścianki, w sposób istotny determinuje stan przemieszczenia i naprężenia w zbiorniku z zamocowanym brzegiem zewnętrznym (rys. 2 i 4). Dla  $\nu \leq 0,4$  zmiany wielkości ( $U/P$ ) i  $S_z$  są umiarkowane. Natomiast w przedziale  $0,4 < \nu \leq 0,5$  zmiany obydwóch wielkości są duże. W granicznym przypadku dla  $\nu = 0,5$  (materiał nieściśliwy) mamy  $(U/P) \equiv 0$  i  $S_z \equiv 0$ .

Wzrost grubości ścianki zmniejsza wartości parametrów  $U/P$  i  $S_z$  w zbiorniku z brzegiem swobodnym i zwiększa — z brzegiem zamocowanym (rys. 1 i 5). Ze wzrostem parametru  $\beta$  różnice między obydwoimi przypadkami maleją i dla  $\beta > 5$  wielkości  $U/P$  oraz  $S_z$  zbiegają do wartości uzyskanych z kawerny kulistej w ośrodku nieograniczonym.

Minimalny czas równomiernego narastania ciśnienia od 0 do maksymalnej wartości  $p_0$ , który spełnia warunek kwazistatycznego obciążenia w zbiornikach metalowych jest rzędu  $10a/c_0$ . Obejmuje to szeroki zakres występujących w technice obciążeń, dla których można stosować w obliczeniach inżynierskich wyprowadzone w niniejszej pracy zamknięte analityczne wzory.

Artykuł wpłynął do redakcji 1.07.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lipcu 2009 r.

#### LITERATURA

- [1] H. G. HOPKINS, *Dynamic expansion of spherical cavities in metals*, in: *Progress in Solid Mechanics*, Sneddon J. N., Hill R. (ed.), 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- [2] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of an expanding spherical stress wave*, *Shock Waves*, 18, 6, 2009.
- [3] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Analysis of the parameters of a spherical stress wave expanding in linear isotropic elastic medium*, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47, 4, 2009.
- [4] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Dynamics of a thick-walled spherical casing loaded with a time depending internal pressure*, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47, 1, 2008.
- [5] W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.

E. WŁODARCZYK, R. KASZEWSKI, M. ZIELENKIEWICZ

#### **Influence of Poisson's ratio, reservoir wall thickness and boundary conditions on mechanical characteristics of a thick-walled spherical reservoir loaded internally by quasi-static pressure**

**Abstract.** The initial-boundary value problem of a thick-walled spherical reservoir loaded internally by quasi-static pressure was solved analytically. The states of displacement and stresses in the reservoir wall were determined by closed form analytical formulae, which can be used in engineering calculations.

The quantitative influence of boundary conditions, Poisson's ratio and reservoir wall thickness on the generated fields of displacement and stresses was studied. The minimal period of pressure increase inside the reservoir from 0 to the maximum value  $p_0$ , which fulfills the condition of a quasi-static load, was estimated. It turns out, that it covers the wide range of variable loads appearing in engineering, and which can be approximated with quasi-static model.

**Keywords:** thick-walled reservoir strength, quasi-static load, spherical reservoirs

**Universal Decimal Classification:** 623.52